Supporto alla didattica 10 - 11-15/01/2021 - Soluzioni

Esercizio 1

(a)

Chiamiamo $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}$ le matrici dei coefficienti dei sistemi che definiscono r ed s_α rispettivamente, $b_1, b_2 \in \mathbf{R}^2$ i vettori dei termini noti dei due sistemi, $A \in M_{4\times 3}$ la matrice $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ e $b \in \mathbf{R}^4$ il vettore $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. La posizione reciproca di r ed s_α è ricavabile, al variare di α, dal confronto tra $rk(A)$ e $rk(A|b)$; riduciamo allora a scala $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 9\alpha+2 \\ 2-9\alpha & 0 & -2 & 6\alpha-9\alpha^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 9\alpha+1 \\ 0 & 0 & -9\alpha & -9\alpha^2+15\alpha-2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9\alpha-3 \\ 0 & 0 & -9\alpha & -9\alpha^2+15\alpha-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -9\alpha & -9\alpha^2+15\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 9\alpha-3 \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq 0, \frac{1}{3}$ allora $rk(A) = 3$ e $rk(A|b) = 4$; la prima condizione significa che i vettori direttori di r ed s_α sono linearmente indipendenti, mentre la seconda ci dice che r ed s_α non si intersecano: di conseguenza le due rette sono sghembe. Se $\alpha = \frac{1}{3}$ allora $rk(A) = rk(A|b) = 3$; come in precedenza i vettori direttori di r ed $s_{\frac{1}{3}}$ sono linearmente indipendenti, ma stavolta r ed $s_{\frac{1}{3}}$ si intersecano: di conseguenza le due rette sono incidenti. Infine per $\alpha = 0$ otteniamo $rk(A) = 2$ e $rk(A|b) = 3$; la prima condizione ci dice che i vettori direttori di r ed s_0 sono linearmente dipendenti, la seconda che r ed s_0 non si incontrano: di conseguenza le due rette sono parallele.

(b)

Visto che r ed s_α sono incidenti solo per $\alpha = \frac{1}{3}$, dobbiamo verificare che r ed $s_{\frac{1}{3}}$ sono perpendicolari; per farlo basta verificare che i vettori direttori delle due rette sono perpendicolari. Ricavando la forma parametrica di r ed $s_{\frac{1}{3}}$ dalla loro forma cartesiana, otteniamo (verificatelo):

$$r : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s_{\frac{1}{3}} : \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come vettori direttori delle due rette possiamo allora prendere $u := (2, 1, 2)^T$ e $v := (-2, 2, 1)^T$ (visto che ogni multiplo di un vettore direttore è ancora un vettore direttore), ed otteniamo $u \cdot v = -4 + 2 + 2 = 0$; r ed $s_{\frac{1}{3}}$ sono dunque davvero perpendicolari.

(c)

Per identificare un sistema di riferimento dello spazio affine $\mathbb{A}^3$ ci servono un punto di $\mathbb{A}^3$ ed una base di $\mathbf{R}^3$; se chiamiamo O l'origine di $\mathbb{A}^3$, il sistema di riferimento R è dato da $(O, \{e_1, e_2, e_3\})$. Per descrivere il sistema R' richiesto dall'esercizio, dobbiamo normalizzare u e v (che già sappiamo essere ortogonali), trovare un vettore w' di norma 1 perpendicolare sia a u che a v e trovare il punto di intersezione tra r ed $s_{\frac{1}{3}}$ (che è il punto di $\mathbb{A}^3$ in cui è centrato R').

u e v hanno entrambi norma 3, dunque definiamo $u' := \frac{1}{3}u$ e $v' := \frac{1}{3}v$; per w' possiamo prendere $w' := u' \times v'$ ovvero $w' = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^T$ (che sappiamo essere perpendicolare ad u' e v' per definizione e di norma 1 perché u' e v' lo sono). Per trovare il punto $P := r \cap s_{\frac{1}{3}}$ dobbiamo trovare $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ 2 + \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2\mu \\ 3 + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

(abbiamo imposto che un generico punto di r debba appartenere ad $s_{\frac{1}{3}}$ e, al tempo stesso, viceversa). Facendo i conti otteniamo $\lambda = -\frac{1}{3}$ e $\mu = -\frac{2}{3}$ da cui, sostituendo, $P = \frac{1}{3}(1, 5, -2)^T$. Il sistema R' è dunque dato da

$$R' = (P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \{u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\})$$

Se R ed R' fossero entrambi centrati in O, indicate con x ed x' rispettivamente le coordinate di un punto di $\mathbb{A}^3$ rispetto ad R ed R', avremmo $x = Mx'$ dove $M := (u'|v'|w')$; visto che però R' è centrato in P, a quest'espressione dobbiamo aggiungere il termine $+P$, ottenendo $x = Mx' + P$.

(d)

L'unico valore di α per cui s_α è parallela ad r è $\alpha = 0$, dunque dobbiamo scrivere le equazioni di s_0 nel sistema di riferimento R'. Le equazioni di s_0 sono

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e poiché le equazioni di passaggio da R ad R' sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - 2y' - z' + 1) \\ y = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z' + 5) \\ z = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z' - 2) \end{cases}$$

sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} z' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$$

La forma parametrica di s_0 nel sistema R' è dunque

$$s_0' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avremmo potuto ricavare quest'ultima espressione anche partendo dalla forma parametrica di s_0 nel sistema R, che è (verificatelo)

$$s_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per ottenere un vettore direttore di s_0 in R' basta osservare che $(2, 1, 2)^T = 3u'$, dunque come vettore direttore q di s_0' possiamo prendere $q = (1, 0, 0)$ (o un suo multiplo qualsiasi); in alternativa, possiamo osservare che se R ed R' fossero entrambi centrati in O il cambio di coordinate sarebbe semplicemente $\underline{x} = M\underline{x}'$, e visto che una traslazione non modifica la direzione di un vettore possiamo ricavare q come $q = M^{-1}(2, 1, 2)^T$.

Un punto cui applicare q per ottenere la scrittura s_0' si ottiene con la formula $M^{-1}(\underline{x} - P) = \underline{x}'$ ponendo $\underline{x} = (0, 1, 0)^T$; il risultato di quest'operazione dà $\underline{x}' = (0, 0, 1)^T$, cosa che ci consente di scrivere

$$s_0' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè la stessa espressione trovata in precedenza.

Esercizio 2

(a) e (b)

La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_k$ è

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

e la sottomatrice di A relativa alla parte quadratica dell'equazione di $\mathcal{C}_k$ è

$$B := \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza $det(A) = -det(B) = k^2 - 1$ e quindi la conica è degenere per $k = \pm 1$. Visto che $k = \pm 1$ dà $rk(A) = 2$ e $det(B) = 0$, le coniche degeneri che otteremo sono rette parallele: $\mathcal{C}_1$ è descritta dall'equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ cioè $(x + y)^2 - 1 = 0$ ovvero $(x + y + 1)(x + y - 1) = 0$, mentre l'equazione di $\mathcal{C}_{-1}$ è $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ ovvero $(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$.

(c) e (d)

$\mathcal{C}_k$ è un'ellisse non degenere con punti reali quando $det(A) < 0$ e $det(B) > 0$, ovvero per $k \in (-1; 1)$. Visto che l'equazione di $\mathcal{C}_k$ non contiene termini lineari in x o y, il centro di quest'ellisse è $(0, 0)$, e adesso dobbiamo solo trovare la forma canonica. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = -(1+t)[(1-t)^2 - k^2] = -(1+t)(1-t-k)(1-t+k)$ quindi i suoi autovalori sono $-1, 1+k$ e $1-k$ (tutti positivi per $k \in (-1; 1)$); di conseguenza rispetto alla base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ data dagli autovettori (eventualmente normalizzati) relativi a questi autovalori, la matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione di $\mathcal{C}_k$ in questo nuovo sistema di riferimento è $(1+k)x^2 + (1-k)y^2 = 1$, che possiamo scrivere come $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ definendo $a := (1 + k)^{-\frac{1}{2}}$ e $b := (1 - k)^{-\frac{1}{2}}$.

(e)

$\mathcal{C}_k$ è un'iperbole non degenere per $det(A) \neq 0$ e $det(B) < 0$, ovvero per $k \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. La 'forma diagonale' di $\mathcal{C}_k$ l'abbiamo trovata al punto precedente, ed è $(1+k)x^2 + (1-k)y^2 = 1$; per scriverla come la forma canonica di un'iperbole, ovvero come $x^2 - cy^2 = d$ con $c > 0$, basta dividere l'equazione per $(1 + k)$ e portare fuori un segno meno, ottenendo

$$x^2 - \frac{k-1}{k+1}y^2 = \frac{1}{k+1}$$

Esercizio 3

(a) e (b)

Cominciamo col determinare un'equazione parametrica per π, riducendo a scala la matrice del sistema che lo definisce:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

La seconda riga dà $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, che sostituita nella prima dà $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$; di conseguenza

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}$$

Una base di W è dunque data, per esempio, da $\{(1,1,-2,0)^T, (1,-1,0,2)^T\}$; poiché, per definizione, abbiamo $\prod = \pi + \sigma(e_3 + e_4)$, una base di U è data da

$\{(1,1,-2,0)^T, (1,-1,0,2)^T, (0,0,1,1)^T\}$, e la corrispondente forma parametrica di $\prod$ è

$$\prod = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \sigma \in \mathbf{R} \right\}$$

(c)

Sappiamo che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \prod \iff \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{3}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \\ -2\lambda + \sigma \\ -2\mu + \sigma \end{pmatrix} \exists \lambda, \mu, \sigma \in \mathbf{R}$$

Riducendo a scala la matrice di questo sistema nelle incognite λ, μ e σ troveremo l'equazione cartesiana di $\prod$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$\prod$ è dunque identificato dall'equazione $2x_2 + x_3 - x_4 + 3 = 0$.

(d) ed (e)

Il punto $H \in \prod$ di minima distanza da P è, per definizione, la proiezione ortogonale di P su $\prod$, e per la definizione di distanza abbiamo $d(P, \prod) = d(P, H) = ||P - H||$; dobbiamo dunque trovare H.

Nel punto precedente abbiamo ottenuto che $\prod = Sol(A,-3)$ dove $A := (0,2,1,-1)$, e se $x_0 \in Sol(A,-3)$ sappiamo (teorema di struttura per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare) che $\prod = x_0 + Sol(A,0)$; poichè $Sol(A,0) = \{x \in \mathbf{R}^4 | x \cdot (0,2,1,-1)^T = 0\}$ e $(0,-1,-1,0) \in \prod$, possiamo scrivere

$$\prod = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}$$

Di conseguenza ogni retta perpendicolare a $\prod$ avrà come vettore direttore $v := (0,2,1,-1)^T$ (o un suo multiplo), ed in particolare la retta r passante per P e perpendicolare a $\prod$ potrà scriversi come $r : P + \tau v$ per $\tau \in \mathbf{R}$; per trovare H basta adesso determinare il punto di intersezione tra r e $\prod$.

Un punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2\tau \\ 1+\tau \\ 1-\tau \end{pmatrix} \in r$ appartiene anche a $\prod$ se e solo se soddisfa l'equazione cartesiana di $\prod$, ovvero se e solo se $2(1+2\tau) + (1+\tau) - (1-\tau) + 3 = 0$ cioè solo se $\tau = -\frac{5}{6}$. Di conseguenza:

$$H = P - \frac{5}{6}v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix}$$

e

$$d(P, \prod) = d(P,H) = d(P, P - \frac{5}{6}v) = ||P - (P - \frac{5}{6}v)|| = \frac{5}{6}||v|| = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Esercizio 4

(a)

Per vedere se r_0 ed r_1 si intersecano sostituiamo le equazioni parametriche di r_0 in quelle cartesiane di r_1 e cerchiamo le soluzioni: il sistema in t che otteniamo è

$$\begin{cases} -4t + 1 + t - 3 + t = 0 \\ -1 - t - 3 + t = 2 \end{cases}$$

che chiaramente non ha soluzioni (la seconda equazione è $-4 = 2$, impossibile); di conseguenza r_0 ed r_1 sono parallele o sghembe. Per decidere quale di queste due possibilità sia quella giusta, scriviamo entrambe le rette in forma parametrica e vediamo se i loro vettori direttori sono linearmente indipendenti o no. Abbiamo (controllate)

$$r_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad r_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori direttori sono rispettivamente $v_0 := (2,1,1)^T$ e $v_1 := (1,1,1)^T$; poiché essi sono linearmente indipendenti, possiamo concludere che r_0 ed r_1 sono sghembe.

(b)

Se P_0 e P_1 sono due punti qualsiasi delle rette r_0 ed r_1 rispettivamente, allora potranno essere scritti, per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, come

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda + 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad P_1 = \begin{pmatrix} \mu + 1 \\ \mu + 2 \\ \mu \end{pmatrix}$$

e il vettore direttore della retta l congiungente P_0 e P_1 sarà allora $P_0 - P_1$, ovvero

$$w = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu - 1 \\ \lambda - \mu - 3 \\ \lambda - \mu + 3 \end{pmatrix}$$

Affinché l sia perpendicolare sia a r_0 che ad r_1, dovrà valere

$$\begin{aligned} w \cdot v_0 = 0 &\Longleftrightarrow 4\lambda - 2\mu - 2 + \lambda - \mu - 3 + \lambda - \mu + 3 = 0 \\ w \cdot v_1 = 0 &\Longleftrightarrow 2\lambda - \mu - 1 + \lambda - \mu - 3 + \lambda - \mu + 3 = 0 \end{aligned}$$

I punti H_0 e H_1 (e di conseguenza la retta h) saranno allora individuati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4\lambda - 3\mu = 1 \\ 3\lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$$

cioè da $\lambda = \mu = 1$, che danno $H_0 = (2,0,4)^T$ e $H_1 = (2,3,1)^T$.