Supporto alla didattica 11 - 11-15/01/2021 - Soluzioni

Esercizio 1

(a)

I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti se il sistema omogeneo $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \underline{0}$ ammette soluzioni non banali, ossia se la matrice associata a tale sistema ha rango minore o uguale a 2. Applichiamo l'algoritmo di Gauss per calcolare il rango di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t^2+t \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2t^2+t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t^2+t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-4 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango massimo se $t^2 - 4 \neq 0$, dunque i tre vettori sono linearmente dipendenti se $t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

(b)

Per $t \neq \pm 2$, f esiste sempre: i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, e dunque formano una base di $\mathbf{R}^3$.
Per $t = 2$, $v_3 = (6, 1, 6) = 5v_1 + v_2$. Se f esistesse, allora dovremmo avere

$$f(v_3) = 5f(v_1) + f(v_2)$$

per linearità. Ma per ipotesi $f(v_3) = (0, 1, 1)$ e $5f(v_1)+f(v_2) = 5\cdot(1, 2, 1)+(-1, -1, 0) = (4, 9, 5)$, dunque tale f non può esistere.
Per $t = -2$, $v_3 = (2, 1, 2) = v_1 + v_2$. Anche in questo caso, verifichiamo la linearità di f:

$$(0, 1, 1) = f(v_3) = f(v_1) + f(v_2) = (1, 2, 1) + (-1, -1, -0).$$

Siccome in questo caso la properità di linearità è soddisfatta, f esiste.
In conclusione, una funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(v_1) = (1, 2, 1)$, $f(v_2) = (-1, -1, 0)$ ed $f(v_3) = (0, 0, 1)$ esiste per ogni $t \in \mathbf{R}\backslash\{2\}$.

Esercizio 2

Calcoliamo il polinomio caratteristico associato alla matrice A :

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 0 & -8-t & 12 \\ 0 & -6 & 10-t \end{pmatrix} = (1-t)\,[(t+8)(t-10)+72] =$$

$$= (1-t)(t^2-2t-8) = (1-t)(t+2)(t-4)$$

A possiede tre autovalori distinti di molteplicità algebrica (e geometrica) 1, dunque è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è data dalla matrice diagonale

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice Q, calcoliamo gli autospazi associati ai tre autovalori.

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -9 & 12 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} == \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} y = z \\ y = 4z \end{cases} \right\} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x = y - z \\ y = 2z \end{cases} \right\} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x = -y + z \\ y = z \end{cases} \right\} = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mettendo in colonna gli autovettori ottenuti sopra, abbiamo

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3

(a)

La base canonica di V è $B = \{1, x, x^2\}$. Osserviamo innanzitutto che il prodotto di due polinomi commuta dunque la forma bilineare g è simmetrica e possiamo riduci a calcolare solo gli elementi di A che stanno nella parte triangolare superiore.

$$g(1,1) = \int_{-1}^{1} 1dt = 2, \qquad g(1,x) = \int_{-1}^{1} xdt = 0, \qquad g(1,x^2) = \int_{-1}^{1} x^2dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$g(x,x) = \int_{-1}^{1} x^2dt = \frac{2}{3}, \qquad g(x,x^2) = \int_{-1}^{1} x^3dt = 0,$$

$$g(x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} x^4dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(b)

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $15A$. Per ottenere gli autovalori di A poi dovremmo dividere per 15.

$$p_{15A}(t) = \det \begin{pmatrix} 30-t & 0 & 10 \\ 0 & 10-t & 0 \\ 10 & 0 & 6-t \end{pmatrix} = (30-t)(10-t)(6-t) - 100(10-t) =$$

$$= (10-t)\left[(30-t)(6-t) - 100\right] = (10-t)(t^2 - 36t + 80) = (10-t)(t - 18 - 2\sqrt{61})(t - 18 + 2\sqrt{61})$$

Dunque $15A$ ha tre autovalori distinti che sono $t = 10$, $t = 18 + 2\sqrt{61}$, $t = 18 - 2\sqrt{61}$. Osserviamo che sono tutti e tre positivi, di conseguenza anche, dividendo per 15, gli autovalori di A saranno positivi e quindi A è definita positiva.

(c)

Dal punto (a) sappiamo già che $g(1,x)=0$. Ci basta quindi cercare un terzo polinomio che sia ortogonale a 1 e x. Sia $p(x)=aX^2+bx+c$ e poniamo quindi

$$\begin{cases} g(1,p)=0 \\ g(x,p)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{3}a+2c=0 \\ \frac{2}{3}b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-\frac{1}{3}a \\ b=0 \end{cases} .$$

Una base ortogonale quindi è $\{1, x, x^2-\frac{1}{3}\}$.

Esercizio 4

(a)

Verificando che $\overrightarrow{P-Q}=(1,-1,2,-1,1)^T$ e $\overrightarrow{R-P}=(1,0,-1,0,1)^T$ sono linearmente indipendenti, si trova che P,Q,R sono in posizione generica e quindi π è una sottovarietà lineare di dimensione 2, ovvero un piano.

I punti di π sono tutte le possibili combinazioni $P+\lambda\overrightarrow{P-Q}+\mu\overrightarrow{R-P}$ al variare di $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, pertanto le equazioni parametriche di π sono

$$\begin{cases} x_1=1+\lambda+\mu \\ x_2=-\lambda \\ x_3=2+2\lambda-\mu \\ x_4=-\lambda \\ x_5=1+\lambda+\mu \end{cases} .$$

Procedendo ad eliminare i parametri troviamo le equazioni cartesiane (ricordiamo che ne servono: $\dim\mathbf{R}^5-\dim\pi=5-2=3$)

$$\begin{cases} x_1=x_5 \\ x_2=x_4 \\ x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases} .$$

(b)

Notiamo che $\overrightarrow{P-Q}$ e $\overrightarrow{R-P}$ sono ortogonali (il prodotto scalare dei due vettori è nullo), pertanto il triangolo di vertici P,Q,R ha area data da:

$$\frac{\|\overrightarrow{P-Q}\|\|\overrightarrow{R-P}\|}{2}=\frac{\sqrt{8}\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}.$$

(c)

Abbiamo $\operatorname{dist}(O,\pi)=\operatorname{dist}(O,H)=\|\overrightarrow{H-O}\|$ dove H è la proiezione ortogonale di O su π. Pertanto scegliamo H un punto generico su π (che soddisfi le sue equazioni parametriche) ed imponiamo che $\overrightarrow{H-O}$ appartenga ad $U^\perp$ dove $U=\langle\overrightarrow{P-Q},\overrightarrow{R-P}\rangle$. Equivalentemente, risolviamo il sistema nelle incognite (λ,μ) dato dalle equazioni $\begin{cases} \overrightarrow{H-O}\cdot\overrightarrow{P-Q}=0 \\ \overrightarrow{H-O}\cdot\overrightarrow{Q-R}=0 \end{cases}$. Troviamo:

$$\begin{cases} (1+\lambda+\mu)+\lambda+2(2+2\lambda-\mu)+\lambda+(1+\lambda+\mu)=0 \\ (1+\lambda+\mu)-(2+2\lambda-\mu)+(1+\lambda+\mu)=0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} 6+8\lambda=0 \\ 3\mu=0 \end{cases} ,$$

che porge $\lambda = -\dfrac{3}{4}$ e $\mu = 0$. Pertanto $H = \dfrac{1}{4}(1,3,2,3,1)$ e $\|\overrightarrow{H-O}\| = \sqrt{\dfrac{24}{16}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.