$\boxed{\text{A}}$

Terzo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica

02 luglio 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x e sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a+b+c+hd & b+c+hd \\ -b-c & hb \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$ il nucleo di f_h, l'immagine di f_h e le loro dimensioni.

(b) Esistono dei valori di $h \in \mathbf{R}$ per cui f_h non è isomorfismo? Giustificare la risposta.

(c) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Sia g la forma bilineare su $\mathbf{R}^3$ con matrice (rispetto alla base canonica)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $V = \text{span}\{(0,-1,-1),(1,1,1))\}$. Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1 := \{w_1, w_2\}$ per V (rispetto a g).

(b) Si determini la base $\mathcal{B}_2$ di $V^\perp$ (rispetto a g)

(c) Si dia la matrice di g rispetto a $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e si dimostri che g è definita positiva.

(3) Sia $t \in \mathbf{R}$. Sia $A_t \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1-t \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 6+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino tutti i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A_t non è invertible.

(b) Per ciascun valore di t trovato nel punto precedente si detetmini $\text{rk}(A_t)$.

(c) Si determini $(A_{-5})^{-1}$

(4) Nello spazio affine $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\sigma = \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi = \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca dei due piani.

(b) Determinare, se esiste, l'equazione parametrica di una retta per il punto $(1,2,2,1)$ parallela ad entrambi i piani.

(5) (a) Si dia la definizione di dimensione per uno spazio vettoriale.

(b) Dato uno spazio vettoriale finitamente generato V ed un suo sottospazio vettoriale U, si dimostri che $\dim U = \dim V$ se e solo se $U = V$.

B

Terzo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica

02 luglio 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x e sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} 2a + 4b + 2d & 2b + hc + d \\ ha + 2b + d & c + d \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$ il nucleo di f_h, l'immagine di f_h e le loro dimensioni.

(b) Esistono dei valori di $h \in \mathbf{R}$ per cui f_h non è isomorfismo? Giustificare la risposta.

(c) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) Sia g la forma bilineare su $\mathbf{R}^3$ con matrice (rispetto alla base canonica) todo

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $V = \text{span}\{(0, 1, 1), (1, -1, -1)\}$. Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1 := \{w_1, w_2\}$ per V (rispetto a g).

(b) Si determini la base $\mathcal{B}_2$ di $V^\perp$ (rispetto a g)

(c) Si dia la matrice di g rispetto a $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e si dimostri che g è definita positiva.

(3) Sia $t \in \mathbf{R}$. Sia $A_t \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1-t \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino tutti i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A_t non è invertible.

(b) Per ciascun valore di t trovato nel punto precedente si detetmini $\text{rk}(A_t)$.

(c) Si determini $(A_{-16})^{-1}$

(4) Nello spazio affine $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_4 + 3 = 0 \\ x_1 - x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle due rette.

(b) Determinare, se esiste, l'equazione parametrica di un piano per il punto $(1, 0, 2, -1)$ perpendicolare ad entrambe le rette.

(5) (a) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale.

(b) Dato uno spazio vettoriale V ed un suo sottospazio $W = \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, si dimostri che i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni vettore $v \in W$ si scrive in modo unico come loro combinazione lineare.

C

Terzo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica

02 luglio 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x e sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a - c - d & 2a + hb + hc \\ 3a + b - d & (1 - h)b \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$ il nucleo di f_h, l'immagine di f_h e le loro dimensioni.
(b) Esistono dei valori di $h \in \mathbf{R}$ per cui f_h non è isomorfismo? Giustificare la risposta.
(c) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Sia g la forma bilineare su $\mathbf{R}^3$ con matrice (rispetto alla base canonica) todo

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $V = \text{span}\{(1, -1, 1), (0, 3, 0))\}$. Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1 := \{w_1, w_2\}$ per V (rispetto a g).
(b) Si determini la base $\mathcal{B}_2$ di $V^\perp$ (rispetto a g)
(c) Si dia la matrice di g rispetto a $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e si dimostri che g è definita positiva.

(3) Sia $t \in \mathbf{R}$. Sia $A_t \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 - t & 2 & -3 \\ t + 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino tutti i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A_t non è invertible.
(b) Per ciascun valore di t trovato nel punto precedente si detetmini $\text{rk}(A_t)$.
(c) Si determini $(A_3)^{-1}$

(4) Nello spazio affine $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\sigma = \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5 = 0 \\ x_1 - x_4 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi = \begin{cases} x_2 - x_4 + 2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5 = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca dei due piani.
(b) Determinare, se esiste, l'equazione parametrica di una retta per l'origine perpendicolare ad entrambi i piani.

(5) (a) Si dia la definizione di insieme di generatori per uno spazio vettoriale.
(b) Dato uno spazio vettoriale finitamente generato V con $V \neq \{0\}$, si dimostri che esiste almeno una base $\mathcal{B}$ per V.

D

Terzo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica

02 luglio 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x e sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da
$$f_h(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a+b-2d & b+hc \\ hb+c & d \end{pmatrix},$$
dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.
  (a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$ il nucleo di f_h, l'immagine di f_h e le loro dimensioni.
  (b) Esistono dei valori di $h \in \mathbf{R}$ per cui f_h non è isomorfismo? Giustificare la risposta.
  (c) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Sia g la forma bilineare su $\mathbf{R}^3$ con matrice (rispetto alla base canonica)
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
  (a) Sia $V = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$. Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1 := \{w_1, w_2\}$ per V (rispetto a g).
  (b) Si determini la base $\mathcal{B}_2$ di $V^\perp$ (rispetto a g)
  (c) Si dia la matrice di g rispetto a $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e si dimostri che g è definita positiva.

(3) Sia $t \in \mathbf{R}$. Sia $A_t \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice
$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t-2 & t-3 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
  (a) Si determinino tutti i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A_t non è invertible.
  (b) Per ciascun valore di t trovato nel punto precedente si detetmini $\text{rk}(A_t)$.
  (c) Si determini $(A_3)^{-1}$

(4) Nello spazio affine $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino il piano π e la retta r di equazioni
$$\pi = \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r = \begin{cases} x_2 - x_4 + 1 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_3 = -1. \end{cases}$$
  (a) Determinare la posizione reciproca dei due piani.
  (b) Determinare, se esiste, l'equazione parametrica o cartesiana di un sottospazio H di dimensione 3 che contenga sia π che r.

(5) (a) Si dia la definizione di funzione lineare tra spazi vettoriali.
  (b) Data una funzione lineare tra spazi vettoriali $f : V \longrightarrow W$, si dimostri che f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0\}$.