Tema A

1) Rispetto alle basi standard in partenza e in arrivo, la f_h è associata alla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduco A_h in forma a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-hII]{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & -h & -h^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \text{ e } IV]{\text{Scambio}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & -h & -h^2 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi che

- $h \neq 0 \Rightarrow f_h$ è un isomorfismo, $\operatorname{Im}(f_h) = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\ker(f_h) = 0$.

- $h = 0 \Rightarrow f_0$ ha rango 2 e $\operatorname{Im}(f_0)$ è generato dalle matrici corrispondenti alle prime due colonne di A_0, cioè

$$\operatorname{Im}(f_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Infine, $\ker(f_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Si ha quindi che f_h è un isomorfismo salvo che per $h=0$.

Vediamo ora la controimmagine di $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h & 7 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h & -h^2 & -7h \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h & 7 \\ 0 & 0 & -h & -h^2 & -7h \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Per $h \neq 0$ si ha quindi $d=0$, $c=7$, $b=0$, $a=-7$ e così la controimmagine cercata è $-7+7x^2$.

Per $h=0$ si ha quindi $b=7-c$, $a=-7$ da cui si ricava che la controimmagine cercata è

$$-7+(7-c)x+cx^2+dx^3 = -7+7x+c(-x+x^2)+dx^3.$$

2)

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Iniziamo a calcolare la matrice della restrizione della forma a V, rispetto alla base data:

$$(0 \ -1 \ -1)\, G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1 \ \ 0 \ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$(0 \ -1 \ -1)\, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, \ 0 \ -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$(1 \ \ 1 \ \ 1)\, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6 \ \ 2 \ \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

e $(1 \ -\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3})\, G \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = (14/3 \ \ 2 \ \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 14/3$

Pertanto una base ortogonale per V è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}$

Vediamo ora chi è $V^\perp$: è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow V^\perp = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Inoltre $(-3 \ \ 8 \ \ 1)\, G \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ \ 1 \ \ -1) \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$

Così rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}\right\}$ abbiamo che la matrice di g è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 14/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che g è definita positiva.

3) $A_t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1-t \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 6+t \end{pmatrix}$

Sviluppo il determinante di A_t con la regola di Laplace sulla ~~prima~~ terza colonna:

$$(1-t)(15-7) - 2(15+14) + (6+t)(3+6) =$$

$$= 8-8t-58+54+9t = t+4$$

Quindi A_t non è invertibile solo per $t=-4$.

$A_{-4} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Questa non ha rango 3 e poiché

le sue colonne non sono tutte multiple tra loro non ha nemmeno rango 1. Così $rk(A_{-4}) = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{II}]{-\mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

A_{-5}

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-3\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 11 & 0 & 7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-3\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 10 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+3\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 29 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{III}]{\mathrm{I}-\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -32 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 39 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 29 & -9 \end{array}\right)$$

4) $\sigma \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \pi \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Li porto in forma parametrica

$$\begin{cases} x_1 = -\lambda - \mu \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 + \lambda' + \mu' \\ x_2 = 2 - \lambda' - \mu' \\ x_3 = \lambda' \\ x_4 = \mu' \end{cases}$$

Così la giacitura del primo è $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

mentre quella del secondo è $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Vediamo ora se le giaciture si intersecano:

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\1&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III+I\\IV+I}]{II-I} \begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&2&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{III-IV} \begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$$

Quindi le due giaciture si intersecano in uno spazio di dimensione 1, che è $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Vediamo ora $\sigma \cap \pi$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&1&0&0&2\\1&1&0&0&4\\-1&1&2&2&0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&4\\0&1&0&0&2\\0&-1&1&1&-4\\0&2&2&2&4\end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&4\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&-2\\0&0&2&2&0\end{array}\right) \Rightarrow \xcancel{\begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = 2\\ x_3 = -2-t\\ x_4 = t\end{cases}}$$

I due piani non s'intersecano e non sono né paralleli né sghembi.

In base a quanto visto, la retta

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2+t \\ x_4 = 1-t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

è parallela ad entrambi i piani e passa per $(1,2,2,1)$.

Tema B

1) Matrice di f_h rispetto alle basi standard:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & h & 1 \\ h & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante è $\det(A_h) = 4h(h-1)$. Quindi

- $h \neq 0, h \neq 1$: $\ker(f_h) = 0$ $\quad \dim \ker(f_h) = 0$

  $\operatorname{Im}(f_h) = M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad \dim \operatorname{Im}(f_h) = 4$

f_h è isomorfismo in questo caso.

La controimmagine di $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ è $2x - x^3$.

- $h = 0$ $\quad \ker(f_0) = \langle x + 2x^2 - 2x^3 \rangle$ $\quad \dim \ker f_0 = 1$

  $\operatorname{Im}(f_0) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

  $\dim \operatorname{Im}(f_0) = 3$

f_h non è isomorfismo e la controimmagine di $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

è $\frac{3}{2}x - x^2 + t(x + 2x^2 - 2x^3)$.

• $h=1$ $\quad \ker(f_1) = \langle 1+x^2-x^3 \rangle \quad \dim\ker f_1 = 1$

$$\operatorname{Im}(f_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim\operatorname{Im} f_1 = 3$$

f_1 non è isomorfismo e la controimmagine di $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ è $-1+2x-x^2+t(1+x^2-x^3)$.

2) Come base ho ortogonale ho (scelta "ovvia")

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il complemento ortogonale è dato da

$$\mathrm{Sol}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e la matrice nella base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\det(A_t) = t + 15$

Per $t = -15$ ho rango 2.

$$(A_{-16})^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -43 & 20 \\ -77 & 175 & -81 \\ -18 & 41 & -19 \end{pmatrix}$$

4) Parametricamente:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 2 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \tau \\ x_2 = 1 - \frac{2}{3}\tau \\ x_3 = 1 + \tau \\ x_4 = 1 + \frac{1}{3}\tau \end{cases}$$

Le due rette sono sghembe.

Il piano cercato ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = 4\mu \\ x_3 = 2 - \lambda + 3\mu \\ x_4 = -1 - \mu \end{cases}$$

Tema C

1) Matrice di f_h è $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & h & h & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-h & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il determinante di A_h è $-2(h-1)^2$.

- $h \neq 1$. ~~Basta~~
  f_h è isomorfismo, $\ker f_h = 0$, $\operatorname{Im} f_h = M_{2,2}(\mathbb{R})$.

  La retroimmagine di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $1+2x^3$.

- $h = 1$
  f_1 non è isomorfismo. $\ker f_1 = \langle 1-3x+x^2, 1-2x+x^3 \rangle$

  $\operatorname{Im} f_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

  f_1 non è isomorfismo e la retroimmagine di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $-1+4x+\lambda(1-3x+x^2)+\mu(1-2x+x^3)$.

2) Tengo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sostituisco $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ con

$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-18}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il complemento ortogonale è $\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ e nella nuova base la forma è data da $\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \end{pmatrix}$.

3) $\det(A_t) = t-2$.

A_t non invertibile per $t=2$. $rk(A_2)=2$.

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) I due piani non si intersecano e le loro giaciture hanno $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ come intersezione.

La retta cercata esiste: il complemento ortogonale allo spazio generato dalle due giaciture è

$\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi la retta cercata è

$$\begin{cases} x_1 = 6t \\ x_2 = t \\ x_3 = -3t \\ x_4 = -4t \end{cases}$$

Tema D

1) La matrice di f_h rispetto alle basi standard è

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante è $1-h^2$.

- $h \neq 1, -1$

  f_h è isomorfismo. $\ker f_h = 0$, $\operatorname{Im} f_h = M_{2,2}(\mathbb{R})$.

  La retroimmagine di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è $3+x^3$.

- $h=1$

  f_1 non è isomorfismo. $\ker f_1 = \langle 1-x+x^2 \rangle$

  $\operatorname{Im} f_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

  La retroimmagine di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

  $3+x^3+t(1-x+x^2)$.

- $h=-1$

  f_{-1} non è isomorfismo. $\ker f_{-1} = \langle 1-x-x^2 \rangle$

  $\operatorname{Im} f_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. La retroimmagine di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è $3+x^2+t(1-x-x^2)$.

2) Tengo $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e cambio $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ con

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{-8}{8}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Il complemento ortogonale è $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\\cancel{x}1\end{pmatrix} \right\rangle$

La metrica è $\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

3) $\det(A_t) = -7(t-4)$

A_t non è invertibile per $t=4$. $rk(A_4) = 2$

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix}-3/7 & 1 & -1/7\\6/7 & -1 & 2/7\\4/7 & 0 & -1/7\end{pmatrix}$$

4) La retta e il piano non si intersecano e la retta è parallela al piano. L'iperpiano cercato esiste, ed è

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + 2\nu \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda - \nu \\ x_4 = \mu \end{cases} \quad \text{cioè} \quad x_2 = x_4$$