A

Quarto Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica

26 agosto 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2, 2x_3)$$
- (a) Si determini una base di $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$.
- (b) Si determini una base ortogonale di $\operatorname{im}(f)$.
- (c) Si determini la controimmagine di $(1, 1, 1, 1)$.

(2) Sia
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \\ -11 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$
Dato che il polinomio caratteristico di A è $(t-2)(t-3)^2$ si trovino una matrice J in forma di Jordan e una matrice Q invertibile tale che $A = QJQ^{-1}$.

(3) Per $t \in \mathbf{R}$ si consideri la conica C_t di equazione $x^2 + 4xy + 2x + 4y + t = 0$.
- (a) Si diano le matrici A e B associate a C_t.
- (b) Si determinino i valori di $t \in \mathbf{R}$ per i quali C_t è degenerare.
- (c) Per i valori di $t \in \mathbf{R}$ per i quali C_t non è degenere si classifichi la conica.

(4) Sia
$$\ell_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$
e sia
$$\ell_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 2z - 2 = y - z + 3 = 0 \right\}.$$
- (a) Si determinino delle equazioni cartesiane di ℓ_1 e delle equazioni parametriche di ℓ_2.
- (b) Si determini la distanza tra ℓ_1 e ℓ_2.
- (c) Si determini il piano π che contiene ℓ_1 ed è parallelo a ℓ_2.

(5)
- (a) Si dia la definizione di un vettore isotropo di una forma bilineare simmetrica.
- (b) Si dia un esempio di una forma bilineare non degenere che ha un vettore isotropo non nullo.
- (c) Si dimostri che una forma bilineare simmetrica reale non degenere che ammette un vettore isotropo non nullo è indefinita.

B

Quarto Appello di Geometria
CS in Astronomia, CS in Fisica
26 agosto 2021

Cognome	Nome	Matricola

Regole d'esame. Durata: **150 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

(1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, 2x_2)$$
  (a) Si determini una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$.
  (b) Si determini una base ortogonale di $\mathrm{im}(f)$.
  (c) Si determini la controimmagine di $(1, 1, 1, 1)$.

(2) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$
Dato che il polinomio caratteristico di A è $(t-2)^2(t-3)$ si trovino una matrice J in forma di Jordan e una matrice Q invertibile tale che $A = QJQ^{-1}$.

(3) Per $t \in \mathbf{R}$ si consideri la conica C_t di equazione $x^2 + 4xy + 2x + 4y + t = 0$.
  (a) Si diano le matrici A e B associate a C_t.
  (b) Si determinino i valori di $t \in \mathbf{R}$ per i quali C_t è degenerare.
  (c) Per i valori di $t \in \mathbf{R}$ per i quali C_t non è degenere si classifichi la conica.

(4) Sia
$$\ell_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$
e sia
$$\ell_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 2y - 2z - 18 = x - z - 5 = 0 \right\}.$$
  (a) Si determinino delle equazioni cartesiane di ℓ_1 e delle equazioni parametriche di ℓ_2.
  (b) Si determini la distanza tra ℓ_1 e ℓ_2.
  (c) Si determini il piano π che contiene ℓ_1 ed è parallelo a ℓ_2.

(5) (a) Si dia la definizione di un vettore isotropo di una forma bilineare simmetrica.
  (b) Si dia un esempio di una forma bilineare non degenere che ha un vettore isotropo non nullo.
  (c) Si dimostri che una forma bilineare simmetrica reale non degenere che ammette un vettore isotropo non nullo è indefinita.