ESERCIZIO 0 (OBBLIGATORIO)

Si stimi il parametro A pari alla cifra più significativa del proprio numero di matricola. Esplicitare la risposta sull'elaborato scritto.

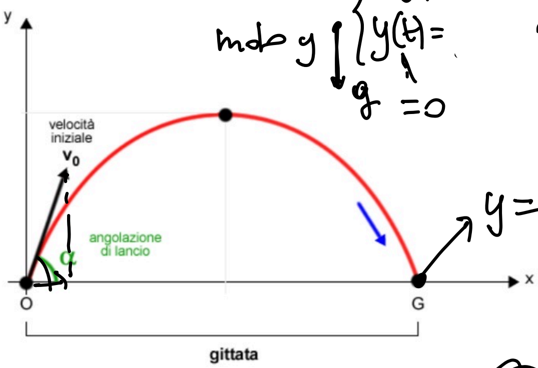
La cifra più significativa è quella più a sinistra diversa da zero, ad esempio in 123456 è "1"

ESERCIZIO 1:

Una macchina di allenamento per il tennis spara una pallina con velocità pari a v_0=(10.0 ± 0.4) m/s ad un angolo variabile α rispetto al suolo. Viene misurata la gittata della pallina, (ovvero a che distanza cade rispetto alla macchina) al variare dell'angolo di lancio. La regolazione dell'angolazione ha un'incertezza di ±1.5 °

α Angolo °	x Gittata misurata (m)
7	2.33
10	3.22
25	6.48
40	7.63
45	7.56

Tab.1



moto x $\begin{cases} x(t) = V_{0x}\, t \\ y(t) = V_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ moto y

$\to V_{0x} = V_0 \cos\alpha$

$\to V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$

g $=0$

$y=0 \quad t\left(V_{0y} - \frac{1}{2} g t\right) = 0$

$t = \frac{2V_{0y}}{g}$

$x = V_{0x} \frac{2V_{0y}}{g} = \frac{2V_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$

Un calcolo cinematico teorico, che trascura gli attriti, prevede la seguente relazione per la gittata in funzione della velocità iniziale e dell'angolo:

$$\boxed{x = \frac{v_0^2}{g} sin(2\alpha)} \qquad (1)$$

dove *g* è la costante di gravità pari a *g*=(9.80652 ± 0.00001) m/s^2 ed **α** è espresso in radianti.

1a. Si calcolino i valori di gittata previsti dalla teoria per i diversi angoli in tabella

1b. Considerando le incertezze di α, v_0 e *g* distribuite in modo gaussiano e scorrelate, si stimi l'incertezza sulle gittate calcolate al punto 1a. Si scriva la formula utilizzata in maniera implicita e con i passaggi numerici;

Si vuole ora valutare la compatibilità tra i lanci sperimentali e le previsioni teoriche, per questo si fanno tre test:

1c. Si calcoli la compatibilità di ciascuna gittata calcolata con le rispettive gittate misurate, considerando trascurabile l'errore delle gittate misurate;

1d. Si determini, tramite un unico test con livello di confidenza del 99%, la compatibilità complessiva delle gittate misurate con quelle calcolate tramite l'equazione (1); Il modello riproduce i dati entro l'errore? Si commenti il risultato

1.a) Calcoliamo i valori teorici usando $x = V_0^2/g \sin(2\alpha)$

si ricordi di convertire deg → rad

$\alpha = 7$ 2.467 m

$\alpha = 10$ 3.485 m

$\alpha = 25$ 7.81 m

$\alpha = 40$ 10.04 m

$\alpha = 45$ 10.19 m

→ mettere unità di misura

1.b) ci sono due maniere di procedere:

STD $S_x^2 \simeq \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_*^2 S_v^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_*^2 S_g^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_*^2 S_\alpha^2$ ← approssimato

dove $*$ sono i punti (α_i, v_i, g) e S_v, S_g, S_α le incertezza delle singole misure date dal problema. Il calcolo delle derivate è tedioso

$$\frac{\partial x}{\partial v_0} = 2\frac{v_0}{g}\sin(2\alpha) \qquad S_v = 0.4\ m/s$$

$$\frac{\partial x}{\partial g} = -\frac{v_0^2}{g^2}\sin(2\alpha) \qquad S_g = 0.00001\ m/s^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 2\frac{v_0^2}{g}\cos(2\alpha) \qquad S_\alpha = 1.5°$$

Tuttavia è più semplice e accurato usare le formule per i prodotti ovvero se $f = A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$

$$\left(\frac{S_x}{x}\right)^2 = 2\left(\frac{S_v}{V}\right)^2 + \left(\frac{S_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{S_{\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right)^2$$ ← corretto

Le prime due in ALT sono immediate. Per la terza

$$S_{\sin 2\alpha} \simeq 2\cdot\cos(2\alpha)\cdot S_\alpha \Rightarrow \left(\frac{S_{\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right)^2 = \frac{4}{tg^2(2\alpha)}$$

Si noti che non appaiono i termini di correlazione perché così esplicitato sul testo.

A conti fatti:

$$S_{x^*} = (0.554, 0.574, 0.713, 0.809, 0.816)\ m$$

1c) Le compatibilità calcolate con r

$$r_i = \frac{|x_i - x^*|}{\sqrt{S_{x^*}^2 + S_{x_i}^2}}$$ per ciascun punto

Si procede quindi punto per punto ottenendo

$$r = (0.25, 0.47, 1.87, 2.98, 3.23)$$

ultimi due valori sospetta incompatibilità...

1d) unico test χ^2

$$\left(\frac{x_1 - x_1^*}{S x_1^*}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_2^*}{S x_2^*}\right)^2 + \dots = \chi^2_m$$

si prende quindi il quadrato dei termini precedenti e se ne fa la somma:

$$\chi^2_m = 0.06 + 0.22 + 3.49 + 8.90 + 10.45 = 23.12$$

da confrontare con χ^2 a 5 gradi di libertà.
[nessun vincolo per la stima di x^*]
per un $CL = 0.99$ $\chi^2_0 [k=5, 0.99] = 15.086$.
siccome $\chi^2_m > \chi^2_0$ allora TEST NON E' SUPERATO, IPOTESI RIGETTATA. I dati non supportano con CL 99% il modello teorico di riferimento. (infatti non considera attrito)

ESERCIZIO 2:

Sia X_1 una variabile casuale descritta da una densità di probabilità $f_1(X_1)$ di tipo gaussiano centrato in $\boldsymbol{\mu}_1$ con varianza σ. Sia X_2 una variabile casuale descritta da una densità di probabilità $f_2(X_2)$ di tipo gaussiano centrato in $\boldsymbol{\mu}_2=E(X_1)+D$ con varianza σ e D positivo. Si costruiscano infine due variabili aleatorie $Y=X_1+X_2$ con densità di probabilità pari a $f_Y=0.5\, f_1+0.5\, f_2$ **e** $Z=X_1X_2$. Assumendo $E(X_1)=A$ con A risultato dell'esercizio, $\sigma=A/100$ e $D=100\sigma$

Rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

2a. Si stimi la covarianza tra X_1 e X_2 : $COV(X_1;X_2)$;

2b. Si stimi la speranza matematica di Y: E(Y);
2c. Si stimi la varianza di Y: VAR(Y);
2d. Si calcoli la probabilità che Y appartenga all'intervallo $[E(X_1)+\sigma_1;E(X_2)]$.

2e. La speranza matematica di Z in funzione di $E(X_1)$ e σ^2;
2f. Si calcoli la varianza di Z VAR(Z)

Facoltativo 2g: discutere quanto ci si aspetta che valga la probabilità che Y appartenga all'intervallo $[E(X_1)+\sigma_1;E(X_2)]$ per $D=2\sigma_1$;

Allora $X_1 : G_1(\mu_1, \sigma^2)$ $X_2 = G_2(\mu_1 + D; \sigma^2)$ ← gaussiane

$Y = X_1 + X_2$ con $f_Y(y) = \frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_2$

$Z = X_1 X_2$. Allora vale $X_2 = X_1 + D$

2a covarianza $\mathrm{COV}[X_1, X_2]$

$\mathrm{COV}[X_1, X_2] = E[X_1, X_1 + D] =$

$E[X_1, X_1] = \mathrm{VAR}[X_1] = \sigma^2 = (A/100)^2 \ll 1$!

quindi $\mathrm{cov}[X_1, X_2] = \underset{A=1}{0.0001}$ e $\underset{A=9}{0.0081}$. Quasi tutti

avete $A=2$ quindi $\mathrm{cov}[X_1, X_2] = 0.0004 = 0.4‰$

2b speranza matematica di Y

$E[Y] = E[X_1 + X_2] = E[2X_1 + D] = 2E[X_1] + D$

siccome $E[X_1] = A$

$E[Y] = 2A + D = [6 \text{ per } A=2]$

2c VAR [Y]

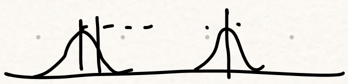
$\mathrm{VAR}[Y] = \mathrm{VAR}[X_1 + X_2] = \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + 2\,\mathrm{cov}[X_1, X_2]$

$= \sigma^2 + \sigma^2 + 2\sigma^2 = 4\sigma^2 = 4\left(\frac{A}{100}\right)^2$

$= [0.0016 \text{ per } A=2]$

2d siccome $D \gg \sigma$ e dato $f_Y = \frac{1}{2} f_{X_1} + \frac{1}{2} f_{X_2}$

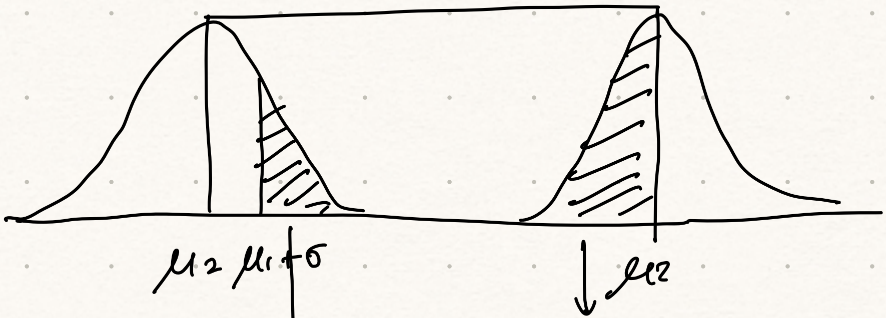
allora



$P(y \in [\mu_1 + \sigma, \mu_2] \simeq$

D

non serviva tabelle!



$P_1 = \left(\frac{1-0.683}{2}\right)$ $\qquad$ $P_2 = 0.5$

e quindi

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = 0.33$$

2e $Z = X_1X_2$

$E[Z] = E[X_1X_2]$ per calcolarla usiamo la relazione $COV[X_1,X_2] = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$

e $COV[X_1,X_2] = s^2$

$= s^2 - E[X_1]E[X_2]$

$= s^2 - \mu_1(\mu_1+D)$

$= [8.0004$ per $A=2]$

2F $VAR[Z]$

$$VAR[Z] = VAR[X_1X_2] = VAR[X_1^2 + X_1D] + 2COV[X_1,X_2]$$

ESERCIZIO 3:

In un canale scavato in un materiale solido vengono prodotte delle gocce mescolando due liquidi non miscibili. La lunghezza X di tali gocce viene misurata contemporaneamente da due due telecamere ad alta risoluzione ottenendo due set di dati, come riportato in Tab.2 in cui D è un parametro (privo di incertezza) che stima la discrepanza della seconda camera rispetto alla prima.

X_1 (um)	X_2 (um)	#
104	104+D	2
105	105+D	8
106	106+D	18
107	107+D	21
108	108+D	14
109	109+D	4

Tab 2

Rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

3a. stimare la miglior stima di lunghezza misurata con relativa incertezza per entrambi i set sperimentali
3b. stimare l'incertezza della singola misura per entrambi i set sperimentali
3c. stimare il valore massimo di D per cui il Set 1 e 2 si possono ritenere compatibili in modo ottimo;
3d. proporre un metodo per poter costituire un campione solo a partire dal Set 1 e Set 2 e stimarne la varianza nel caso in cui D sia pari al valore ricavato nel punto 3c).

Si supponga di stimare la grandezza fisica $Y=X_1+X_2$ di cui alla Tab.2:

3e. stimare l'incertezza della singola misura di Y valutando il termine di covarianza;
3f. stimare la miglior stima di Y e la relativa incertezza;

3.1] stime e incertezze

Assumendo le misure come misure ripetute in assenza di incertezze sistematiche, la miglior stima delle misure è la media aritmetica e l'associata deviazione standard della media.

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{1,i} \qquad N = 67$$

$$S_{\bar{x}_1} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_1)^2}$$

per $\bar{x}_2$; sia $x_{2,i} = x_{2,i}' + D$ allora

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{2,i} = D + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_{2,i}$$

$$S_{\overline{x}_2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x'_{2,i} - \overline{x}_2)^2}$$

La D si elide anche perché $VAR[x+D] = VAR[x]$

Si ottiene quindi

$$\overline{x}_1 = (106.7 \pm 0.2)\ \mu m$$

$$\overline{x}_2 = (106.7 + D \pm 0.2)\ \mu m$$

$$S_{\overline{x}_1} = S_{\overline{x}_2} = S_{\overline{x}} = 0.2\ \mu m$$

3b) incertezza singola misura

$$S_{x_1} = S_{\overline{x}_1}\sqrt{N} \quad ; \quad S_{x_2} = S_{\overline{x}_2}\sqrt{N}$$

$$S_{x_1} = S_{x_2} = S_x = 1.19\ \mu m$$

3c) valore massimo di D affinché i due set siano ottimamente compatibili

La condizione di compatibilità delle medie è

$$r = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{S_{\overline{x}_1}^2 + S_{\overline{x}_2}^2}} < 1$$

siccome $S_{\overline{x}_1} = S_{\overline{x}_2}$ allora siccome $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$, e $S_{\overline{x}_1} = S_{\overline{x}_2} = S_{\overline{x}}$

$$r = \frac{|D|}{\sqrt{2}\,S_{\overline{x}}} < 1 \Rightarrow |D| < \sqrt{2}\,S_{\overline{x}} = 0.21\ \mu m$$

3d) Assunto che le due serie sono compatibili, ciascuna misura x_1, x_2' proviene dallo stesso campione. A questo punto se ho a disposizione le singole misure posso aumentare n° bin, altrimenti posso riscalare gli eventi come

$$Y_1 = X_1 - \bar{X_1} \quad \text{oppure} \quad \frac{X_1 - \bar{X_1}}{S_{x_1}}$$

$$Y_2 = X_2' - \bar{X_2} \quad \text{oppure} \quad \frac{X_2' - \bar{X_2}'}{S_{x_2}}$$

nel primo caso ottengo una gaussiana a media zero e ampiezza $\frac{S_x}{\sqrt{2}}$, nel secondo $G(0,1)$ gaussiana standard.

chi ha proposto di calcolare media pesata non aveva gran torto se la domanda fosse stata di dare un valore unico.

$S_x = 0.84$

3e) $Y = X_1 + X_2$

Ci si può interrogare sulla correlazione tra le due grandezze. In questo caso, per come è stato svolto l'esperimento X_1 e X_2 sono TOTALMENTE CORRELATE:

$$\rho_{x_1 x_2} = 1$$

Allora, utilizzando proprietà della varianza

$$VAR[Y] = VAR[X_1 + X_2] = VAR[X_1] + VAR[X_2] + 2COV[X_1, X_2]$$

usando $\rho_{x_1 x_2} = \frac{COV[X_1, X_2]}{\sqrt{VAR[X_1]\,VAR[X_2]}}$

otteniamo $VAR[Y] = VAR[x_1] + VAR[x_2] + 2\sqrt{VAR[x_1]VAR[x_2]}$

$= 4\,VAR[x]$ siccome $VAR[x_1] = VAR[x_2]$

ovvero $S_Y = 2S_x = 2.38$

3f) stima di Y

con i dati a disposizione costruisco quindi un nuovo set di 6 misure estratte a caso del primo e secondo set

allora

$E[Y] = E[X_1 + X_2] = E[x_1] + E[x_2]$ perché valor. è lineare

$\Rightarrow \mu_Y = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle$

Avendo a disposizione $N = 67$ allora

$$S_{\bar{Y}} = \frac{2S_x}{\sqrt{N}} = 0.29$$

ESERCIZIO 4

Sono stati osservati i seguenti conteggi O_i di decadimenti al secondo da un materiale radioattivo:

O_1	44+A
O_2	49
O_3	55
O_4	47
O_5	43

Tab 3

Ove A è il risultato dell'Esercizio 0.

4a. Si dimostri, con il metodo della massima verosimiglianza, quale sia la miglior stima del numero medio di decadimenti al secondo e la sua incertezza;
4b. Si riporti la distribuzione di probabilità di riferimento per questi eventi;
4c. Si stimi il tempo medio tra un decadimento e il successivo, assieme alla sua incertezza.

Essendo il tasso medio di decadimenti λ fisso, il numero di conteggi nell'unità di tempo è un processo Poissoniano $\mathcal{P}(n;\lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

4a Abbiamo 5 eventi di tipo poissoniano con la stessa PDF di riferimento, quindi la funzione di verosimiglianza è

$$\mathcal{L}(\lambda, \vec{n}) = \prod_{i=1}^{5} \frac{\lambda^{n_i} e^{-\lambda}}{n_i!}$$

per calcolare $\hat{\lambda}$ dobbiamo passare al logaritmo naturale $\ln \mathcal{L}(\lambda, \vec{n}) = \sum_{i=1}^{5} \ln(\lambda^{n_i}) - \sum_{i=1}^{5} \lambda_i - \cancel{\sum_{i=1}^{5} \ln(n_i!)}$

di questi, il terzo termine non dipende da λ e si può non considerare. Cercare il massimo significa derivare rispetto λ:

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\lambda} = \frac{\sum_i n_i}{\lambda} - N = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\sum n_i}{N} = \langle n \rangle}$$

allora calcolo $\langle n \rangle$. Per la incertezza possiamo ricordare che per una $\mathcal{P}$, $VAR[\mathcal{P}] = \lambda$

quindi la sua stima campionaria è $\boxed{S_{\hat{n}} = \frac{\langle n \rangle}{\sqrt{N}}}$

4b distribuzione di riferimento

$$\mathcal{P}(n; \hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}^n e^{-\hat{\lambda}}}{n!}$$

4c Tempo medio

Se $\hat{\lambda}$ è numero medio di conteggi al secondo, il tempo medio è $\tau = \frac{1}{\hat{\lambda}}$

Si ricordi che τ segue una legge di distrib. esponenziale.

$$\frac{S_\tau}{\tau} = \frac{S_{\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda}} \Rightarrow S_{\tau} = \tau \left(\frac{S_{\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda}} \right)$$