Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - Ingegneria Aerospaziale **A**
Seconda prova parziale - 16 giugno 2015

Nome____________________ **Cognome**____________________ **Matricola**____________

Problema	1	2	3	4	I p. p.	Finale
Voto						

Problema 1 Si consideri la trasformazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice standard A è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il rango e la nullità di L.
(b) Trovare una base di $\operatorname{im} L$.
(c) Trovare trasformazioni lineari $L_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ed $L_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $L_2 \circ L \circ L_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
(d) Trovare le matrici standard di L_1 e di L_2.

Problema 2 Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(b) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità.
(c) Trovare una base per ciascun autospazio di A.
(d) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Problema 3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un endomorfismo $L\colon V \longrightarrow V$ si dice **involutorio** se $L^2 = L \circ L = \mathrm{id}_V$.
(a) È vero o falso che un endomorfismo involutorio è un isomorfismo?
(b) Quali sono i possibili autovalori per un endomorfismo involutorio?
Supponiamo ora che V sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Fissato un vettore unitario $\mathbf{n}$ in V, definiamo $L\colon V \longrightarrow V$, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$.
(c) Far vedere che L è una trasformazione lineare.
(d) Calcolare $L(\mathbf{n})$ e far vedere che L è involutorio.
(e) Utilizzando i dati di cui disponiamo, trovare gli autospazi di L.
(f) Per $V = \mathbb{R}^4$ ed $\mathbf{n} = (0, 0, 1, 0)$, calcolare la matrice standard di L.

Problema 4 Nello spazio euclideo E^4 si considerino le varietà lineari definite dalle equazioni

$$L\colon \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases}, \qquad M\colon \begin{cases} 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 = x_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Trovare equazioni parametriche per L e per M.
(b) Calcolare direzione e dimensione di L e di M.
(c) Determinare la posizione reciproca di L e di M.
(d) Trovare punti di minima distanza tra L ed M e calcolare la distanza $d(L, M)$.
(e) Determinare la varietà lineare N parallela ad L e passante per M.
(f) Calcolare la distanza $d(L, N)$.

---

leggere le regole sul retro

Regole d'esame

- Scrivere nome, cognome e matricola **LEGGIBILI** in ogni foglio (cartellina bianca, testo del compito e fogli di brutta).
- Durata della prova: due ore.
- **NON** è consentito l'uso di libri, dispense o appunti.
- **NON** è consentito l'uso di smart phones, tablets, calcolatrici e gadgets simili.
- Svolgere i propri calcoli su fogli a parte e riportare sulla cartellina bianca solo i calcoli necessari a motivare la risposta, scritti a penna, nera o blu, in modo chiaro e leggibile. **TUTTE LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE**.
- Consegnare **SOLO** la cartellina bianca con le risposte e questo foglio, i fogli di "brutta" **NON** vanno consegnati.
- L'uscita dall'aula è consentita solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato.
- Durante la prova i candidati non possono comunicare tra loro o passarsi materiale, pena l'esclusione immediata dalla prova (cartellino rosso senza cartellino giallo).

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - Ingegneria Aerospaziale $\boxed{\textbf{B}}$
Seconda prova parziale - 16 giugno 2015

Nome____________________ **Cognome**____________________ **Matricola**____________

Problema	1	2	3	4	I p. p.	Finale
Voto						

Problema 1 Si consideri la trasformazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice standard A è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il rango e la nullità di L.
(b) Trovare una base di $\operatorname{im} L$.
(c) Trovare trasformazioni lineari $L_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ed $L_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $L_2 \circ L \circ L_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
(d) Trovare le matrici standard di L_1 e di L_2.

Problema 2 Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(b) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità.
(c) Trovare una base per ciascun autospazio di A.
(d) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Problema 3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un endomorfismo $L\colon V \longrightarrow V$ si dice **involutorio** se $L^2 = L \circ L = \mathrm{id}_V$.
(a) È vero o falso che un endomorfismo involutorio è un isomorfismo?
(b) Quali sono i possibili autovalori per un endomorfismo involutorio?
Supponiamo ora che V sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Fissato un vettore unitario $\mathbf{n}$ in V, definiamo $L\colon V \longrightarrow V$, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$.
(c) Far vedere che L è una trasformazione lineare.
(d) Calcolare $L(\mathbf{n})$ e far vedere che L è involutorio.
(e) Utilizzando i dati di cui disponiamo, trovare gli autospazi di L.
(f) Per $V = \mathbb{R}^4$ ed $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)$, calcolare la matrice standard di L.

Problema 4 Nello spazio euclideo E^4 si considerino le varietà lineari definite dalle equazioni

$$L\colon \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 = 1 \end{cases}, \qquad M\colon \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Trovare equazioni parametriche per L e per M.
(b) Calcolare direzione e dimensione di L e di M.
(c) Determinare la posizione reciproca di L e di M.
(d) Trovare punti di minima distanza tra L ed M e calcolare la distanza $d(L, M)$.
(e) Determinare la varietà lineare N parallela ad L e passante per M.
(f) Calcolare la distanza $d(L, N)$.

---

leggere le regole sul retro

Regole d'esame

- Scrivere nome, cognome e matricola **LEGGIBILI** in ogni foglio (cartellina bianca, testo del compito e fogli di brutta).
- Durata della prova: due ore.
- **NON** è consentito l'uso di libri, dispense o appunti.
- **NON** è consentito l'uso di smart phones, tablets, calcolatrici e gadgets simili.
- Svolgere i propri calcoli su fogli a parte e riportare sulla cartellina bianca solo i calcoli necessari a motivare la risposta, scritti a penna, nera o blu, in modo chiaro e leggibile. **TUTTE LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE**.
- Consegnare **SOLO** la cartellina bianca con le risposte e questo foglio, i fogli di "brutta" **NON** vanno consegnati.
- L'uscita dall'aula è consentita solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato.
- Durante la prova i candidati non possono comunicare tra loro o passarsi materiale, pena l'esclusione immediata dalla prova (cartellino rosso senza cartellino giallo).

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - Ingegneria Aerospaziale $\boxed{\textbf{C}}$
Seconda prova parziale - 16 giugno 2015

Nome________________________**Cognome**________________________**Matricola**____________

Problema	1	2	3	4	I p. p.	Finale
Voto						

Problema 1 Si consideri la trasformazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice standard A è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il rango e la nullità di L.
(b) Trovare una base di $\operatorname{im} L$.
(c) Trovare trasformazioni lineari $L_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ed $L_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $L_2 \circ L \circ L_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
(d) Trovare le matrici standard di L_1 e di L_2.

Problema 2 Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(b) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità.
(c) Trovare una base per ciascun autospazio di A.
(d) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Problema 3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un endomorfismo $L\colon V \longrightarrow V$ si dice **involutorio** se $L^2 = L \circ L = \mathrm{id}_V$.
(a) È vero o falso che un endomorfismo involutorio è un isomorfismo?
(b) Quali sono i possibili autovalori per un endomorfismo involutorio?
Supponiamo ora che V sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Fissato un vettore unitario $\mathbf{n}$ in V, definiamo $L\colon V \longrightarrow V$, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$.
(c) Far vedere che L è una trasformazione lineare.
(d) Calcolare $L(\mathbf{n})$ e far vedere che L è involutorio.
(e) Utilizzando i dati di cui disponiamo, trovare gli autospazi di L.
(f) Per $V = \mathbb{R}^4$ ed $\mathbf{n} = (0, 0, 0, 1)$, calcolare la matrice standard di L.

Problema 4 Nello spazio euclideo E^4 si considerino le varietà lineari definite dalle equazioni

$$L\colon \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases}, \qquad M\colon \begin{cases} x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 = x_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Trovare equazioni parametriche per L e per M.
(b) Calcolare direzione e dimensione di L e di M.
(c) Determinare la posizione reciproca di L e di M.
(d) Trovare punti di minima distanza tra L ed M e calcolare la distanza $d(L, M)$.
(e) Determinare la varietà lineare N parallela ad L e passante per M.
(f) Calcolare la distanza $d(L, N)$.

---

leggere le regole sul retro

Regole d'esame

- Scrivere nome, cognome e matricola **LEGGIBILI** in ogni foglio (cartellina bianca, testo del compito e fogli di brutta).
- Durata della prova: due ore.
- **NON** è consentito l'uso di libri, dispense o appunti.
- **NON** è consentito l'uso di smart phones, tablets, calcolatrici e gadgets simili.
- Svolgere i propri calcoli su fogli a parte e riportare sulla cartellina bianca solo i calcoli necessari a motivare la risposta, scritti a penna, nera o blu, in modo chiaro e leggibile.
  TUTTE LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.
- Consegnare **SOLO** la cartellina bianca con le risposte e questo foglio, i fogli di "brutta" **NON** vanno consegnati.
- L'uscita dall'aula è consentita solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato.
- Durante la prova i candidati non possono comunicare tra loro o passarsi materiale, pena l'esclusione immediata dalla prova (cartellino rosso senza cartellino giallo).

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - Ingegneria Aerospaziale **D**
Seconda prova parziale - 16 giugno 2015

Nome____________________ **Cognome**____________________ **Matricola**____________

Problema	1	2	3	4	I p. p.	Finale
Voto						

Problema 1 Si consideri la trasformazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice standard A è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il rango e la nullità di L.
(b) Trovare una base di $\operatorname{im} L$.
(c) Trovare trasformazioni lineari $L_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ed $L_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $L_2 \circ L \circ L_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
(d) Trovare le matrici standard di L_1 e di L_2.

Problema 2 Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(b) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità.
(c) Trovare una base per ciascun autospazio di A.
(d) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Problema 3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un endomorfismo $L\colon V \longrightarrow V$ si dice **involutorio** se $L^2 = L \circ L = \mathrm{id}_V$.
(a) È vero o falso che un endomorfismo involutorio è un isomorfismo?
(b) Quali sono i possibili autovalori per un endomorfismo involutorio?
Supponiamo ora che V sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Fissato un vettore unitario $\mathbf{n}$ in V, definiamo $L\colon V \longrightarrow V$, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$.
(c) Far vedere che L è una trasformazione lineare.
(d) Calcolare $L(\mathbf{n})$ e far vedere che L è involutorio.
(e) Utilizzando i dati di cui disponiamo, trovare gli autospazi di L.
(f) Per $V = \mathbb{R}^4$ ed $\mathbf{n} = (0, 1, 0, 0)$, calcolare la matrice standard di L..

Problema 4 Nello spazio euclideo E^4 si considerino le varietà lineari definite dalle equazioni

$$L\colon \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}, \qquad M\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 = 1 \end{cases}.$$

((a) Trovare equazioni parametriche per L e per M.
(b) Calcolare direzione e dimensione di L e di M.
(c) Determinare la posizione reciproca di L e di M.
(d) Trovare punti di minima distanza tra L ed M e calcolare la distanza $d(L, M)$.
(e) Determinare la varietà lineare N parallela ad L e passante per M.
(f) Calcolare la distanza $d(L, N)$.

---

leggere le regole sul retro

Regole d'esame

- Scrivere nome, cognome e matricola **LEGGIBILI** in ogni foglio (cartellina bianca, testo del compito e fogli di brutta).
- Durata della prova: due ore.
- **NON** è consentito l'uso di libri, dispense o appunti.
- **NON** è consentito l'uso di smart phones, tablets, calcolatrici e gadgets simili.
- Svolgere i propri calcoli su fogli a parte e riportare sulla cartellina bianca solo i calcoli necessari a motivare la risposta, scritti a penna, nera o blu, in modo chiaro e leggibile. **TUTTE LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE**.
- Consegnare **SOLO** la cartellina bianca con le risposte e questo foglio, i fogli di "brutta" **NON** vanno consegnati.
- L'uscita dall'aula è consentita solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato.
- Durante la prova i candidati non possono comunicare tra loro o passarsi materiale, pena l'esclusione immediata dalla prova (cartellino rosso senza cartellino giallo).