Appello di Geometria Sessione Estiva AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
13 luglio 2015

Non consegnare brutte copie. Consegnare solo questi fogli. Risposte brevi, ma ben giustificate.

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1 (11 pt)	Es. 2 (11 pt)	Es. 3 (11 pt)	Totale (33 pt)	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\pi : \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

a) (2pt) Scrivere delle equazioni parametriche per π e σ.

b) (3pt) Determinare la posizione reciproca di π e di σ ed eventuali intersezioni.

Sono incidenti in $(0, 1, 2, 1)$. Gli spazi direttori sono complementari.

c) (3pt) Sia M la retta intersezione di σ con $x_3 = 0$. Determinare la posizione reciproca di π e di M.

Gli spazi direttori si intersecano solo in 0, quindi la retta non è parallela al piano. La retta e il piano non sono incidenti, altrimenti dovrebbero intersecarsi in $(0, 1, 2, 1)$, che non sta su M ! Quindi la retta M e il piano π sono sghembi.

d) (3pt) Determinare un punto $P \in \pi$ e un punto $Q \in M$ in modo che la distanza tra P e Q sia minima. Quanto distano π e M ?

$P = (5/13, -2/13, 1/13, -2/13)$ $Q = (0, -2/13, 0, -2/13)$. La dstanza è $\sqrt{2/13}$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

a) (2pt) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

b) (3pt) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità. (Suggerimento: dovreste riuscire a indovinare uno zero del polinomio caratteristico!)

Il polinomio caratteristico è $(x - 9)^2(x + 9)$.

c) (3pt) Trovare una base di ciascun autospazio di A.

$$\ker(A-9) = \langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle, \ker(A+9) = \langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

d) (3pt) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Se si pone

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$AP = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} .$$

Siccome P è ortogonale $P^{-1} = P^t$ e

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3. Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 12 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (2pt) Calcolare il rango e la nullità di f

b) (2pt) Trovare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e di $\ker(f)$.

c) (3pt) Determinare esplicitamente, in termini delle basi standard, delle trasformazioni lineari $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che $f_2 \circ f \circ f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

d) (4pt) Determinare le rappresentazioni matriciali in termini delle basi standard delle f_1 e f_2 scelte, e pervenire a una identità matriciale della forma

$$F_2 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 12 & -1 & 2 \end{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

con matrici esplicite F_1, F_2, G.

Risposta. Le prime due domande sono facilissime; rango e nullità di A sono entrambi $= 2$. Veniamo alla terza domanda. Dobbiamo trovare una successione di applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^2$$

il cui composto sia l'identità di $\mathbb{R}^2$. Chiamiamo

$$(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}) \ , \ (e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}) \ , \ (e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, e_3^{(4)}, e_4^{(4)}) \ ,$$

le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^4$, rispettivamente. Si vede subito che $e_1^{(3)}$ non sta in $\mathrm{Im}(f)$, perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \neq 0$$

Quindi possiamo prendere, per esempio, come $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che porta

$$e_1^{(3)} \mapsto 0 \ , \ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto e_1^{(2)} \ , \ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \mapsto e_2^{(2)} \ .$$

Allora la composta $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^2$ porta $(e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, e_3^{(4)}, e_4^{(4)})$ ordinatamente in $(e_1^{(2)}, e_2^{(2)})$ e quindi ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nelle basi canoniche. Come f_1 si prende allora l'applicazione che porta $(e_1^{(2)}, e_2^{(2)})$ ordinatamente in $(e_1^{(4)}, e_2^{(4)})$, che ha matrice quindi

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nelle basi canoniche. Cosí abbiamo $f_2 \circ f \circ f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, come si voleva.

Per rispondere anche alla quarta domanda manca solo da scrivere la matrice di f_2 rispetto alle basi canoniche. Siccome

$$f_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto e_1^{(2)} \quad , \quad f_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \mapsto e_2^{(2)} \ ,$$

(ricordiamo che $f_2(e_1^{(3)}) = 0$), si ha che

$$f_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto (1/2)e_1^{(2)} \quad , \quad f_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto (-1/6)e_1^{(2)} + (1/12)e_2^{(2)} \ .$$

Quindi la matrice di f_2 rispetto alle basi canoniche è

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} \ .$$

Per convincersi, controllare che effettivamente $F_2 A F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Un endomorfismo $p : V \to V$ si dice una *proiezione* se $p^2 = p$.

a) Quali sono i possibili autovalori di p?

Siccome $p^2 = p$, se $v \neq 0$ è un autovettore di autovalore λ, si ha $pv = \lambda v$ e $p^2 v = \lambda v$. Ma è anche $p^2 v = p(\lambda v) = \lambda^2 v$. Quindi $\lambda^2 = \lambda$, e λ può essere solo 0 o 1.

b) Mostrare che, $\forall v \in V$, il vettore $w = v - pv \in \ker(p)$. Dedurne che ogni $v \in V$ è somma di autovettori di p.

È chiaro che $p(w) = p(v - pv) = pv - p^2 v = 0$. Quindi $v = w + pv$, ove w è autovettore di autovalore 0 e $pv = p(pv)$ è autovettore di autovalore 1.

c) Dedurre da quanto precede che esiste una base di V formata da autovettori di p.

Data una base qualunque $v_1, \dots, v_n$ di V, si scrive ogni $v_i = w_i + pv_i$ e dunque l'insieme

$$\{w_1, \dots, w_n, pv_1, \dots, pv_n\} \ ,$$

che è formato di autovettori di p, contiene una base di V.

d) Mostrare che esistono due sottospazi U e W di V tali che p sia la proiezione di V su U nella direzione di W. (Spiegare anche cosa significa questa frase.)

Si prende $U = \langle pv_1, \dots, pv_n \rangle$ e $W = \langle w - 1, \dots, w_n \rangle$. Si ha $V = U \oplus W$ e $p(u + w) = u$, $\forall u \in U$ e $w \in W$.