I appello invernale di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

29 gennaio 2014

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Tot. scritto	Orale	Finale

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) (2pt) Determinare il polinomio caratteristico di A.

b) (2pt) Determinare gli autovalori, le loro molteplicità e le loro nullità.

c) (2pt) Determinare una forma canonica di Jordan J di A.

d) (4pt) Determinare una matrice $P \in GL(4, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = J$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

a) $\det(x - A_1) = (x-4)(x+1)$, $\det(x - A_2) = (x-6)(x+3)$. Dunque $\det x - A = (x-9)(x-3)(x-6)^2$.
b) Necessariamente la nullità di ciascun autovalore vale 1.
c) La matrice è diagonalizzabile e

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

d) Si ha

$$\ker(A-4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ , \ \ker(A+1) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\ker(A-6) = \langle \begin{pmatrix} -19 \\ 13 \\ 14 \\ -56 \end{pmatrix} \rangle \ , \ \ker(A+3) = \langle \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -28 \\ -14 \end{pmatrix} \rangle$$

Dunque si può prendere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -19 & 11 \\ -1 & 2 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \\ 0 & 0 & -56 & -14 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^5(\mathbb{R})$ con coordinate ortogonali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, si considerino le due sottovarietà π e σ di equazioni

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} , \quad \sigma : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 3 \end{cases} ,$$

rispettivamente.

a) (3pt) Quanto valgono le dimensioni di π e di σ? Determinare una base di ciascuno spazio direttore.

b) (4pt) Esistono rette parallele sia a π che a σ? Se sí, qual è la loro direzione?

c) (3pt) Quanto vale la dimensione di $\pi \vee \sigma$?

Soluzione. (a) Si risolvono i sistemi lineari ottenendo

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Dunque π e σ sono piani. Poniamo

$$P := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad U := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle , \quad Q := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} , \quad W := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Dunque $\pi = P + U$ e $\sigma = Q + W$.
(b) Si vede facilmente che

$$U \cap W = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Quindi ci sono rette parallele sia a π che a σ e hanno tutte la stessa direzione v.
(c) La dimensione di $U \cup W$ vale $\dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3$. Però $\pi \cap \sigma = \emptyset$ e quindi $Q - P$ è un vettore che non sta in $U + W$. Ne segue che la più piccola varietà lineare che contiene π e σ, cioè $\pi \vee \sigma$ è

$$\pi \vee \sigma = P + (\langle Q - P \rangle + U + W) ,$$

che ha dimensione 4.

Esercizio 3. Nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 13x^2 + 10xy + 13y^2 + 26x + 10y - 59 = 0 .$$

a) (3pt) Scrivere la matrice di $\mathcal{C}$ e controllare che la conica è non-degenere.

b) (3pt) Di quale tipo di conica si tratta?

c) (4pt) Determinare la forma canonica di $\mathcal{C}$ ed il riferimento in cui prende tale forma.

Svolgimento. (a) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -59 & 13 & 5 \\ 13 & 13 & 5 \\ 5 & 5 & 13 \end{pmatrix} .$$

Poiché $\det A \neq 0$, la conica è non-degenere. Poi $A' = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$ e $\det A' = 144$ dice che $\mathcal{C}$ è un'ellisse (non sappiamo per ora se ha o no punti reali, ma lo vediamo dopo). Poi

$$\det(x - A') = \begin{vmatrix} x-13 & -5 \\ --5 & x-13 \end{vmatrix} = (x-18)\,(x-8) .$$

Abbimo allora

$$\ker(A' - 18I_2) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle ,$$

$$\ker(A' - 8I_2) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Quindi abbiamo

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R}) ,$$

e

$$R^t A' R = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = R^{-1} A' R .$$

Dunque ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'+y')/\sqrt{2} \\ (x'-y')/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

(che coincide con la trasformazione inversa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/\sqrt{2} \\ (x-y)/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

perchè in questo caso $R = R^t = R^{-1}$) l'equazione di $\mathcal{C}$ diviene

$$18(x')^2 + 8(y')^2 + 36x'/\sqrt{2} + 16y'/\sqrt{2} - 59 = 0 .$$

Completando i quadrati si trova:

$$18(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - +8(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 72 ,$$

e dunque

$$\frac{(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{4} + \frac{(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{9} = 1 ,$$

L'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è allora

$$\frac{U^2}{4} + \frac{V^2}{9} = 1 ,$$

ove

$$U = (x+y+1)/\sqrt{2} \;\; , \;\; V = (x-y+1)/\sqrt{2} .$$

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Siano V e W spazi vettoriali sul corpo C e sia $\varphi : V \to W$ una applicazione C-lineare. Dimostrare che se $w_1, \ldots, w_N$ sono vettori di W linearmente indipendenti, e se $v_1, \ldots, v_N \in V$ sono tali che $\varphi(v_i) = w_i$, per $i = 1, \ldots, N$, allora $v_1, \ldots, v_N$ sono linearmente indipendenti.

Risposta. Per assurdo, se ci fosse una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_N$ nulla, a coefficienti non tutti nulli, cilè se

$$a_1 v_1 + \cdots + a_N v_N = 0 \ \ , \ \ \text{ove non tutti gli } a_i \text{ sono nulli} \ ,$$

allora

$$\varphi(a_1 v_1 + \cdots + a_N v_N) = 0 = a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_N \varphi(v_N) = a_1 w_1 + \cdots + a_N w_N \ ,$$

contraddirebbe al fatto che $w_1, \ldots, w_N$ sono vettori di W linearmente indipendenti.

Esercizio 5. (**Domanda per l'orale**) Cos'è uno *spazio normato* sul corpo $\mathbb{R}$?

Risposta. È uno spazio vettoriale V su un corpo C, munito di una applicazione C-bilineare $\circ : V \times V \to C$, simmetrica e non-degenere.