II appello invernale di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

13 febbraio 2014

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Tot. scritto	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con coordinate ortogonali (x, y, z, w), si considerino le due sottovarietà π e r di equazioni

$$\pi : \begin{cases} 2x & +y & -z & -2w = & 2 \\ & y & +z & -w = & 0 \end{cases} \quad , \quad r = R + \langle \vec{t} \rangle \ ,$$

ove $R(3, 0, 0, 0)$ e $\vec{t} = (0, 1, -1, 2)$, rispettivamente.

a) (2pt) Mostrare che π è un piano e scriverlo nella forma $\pi = Q + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, ove $Q, \vec{u}, \vec{v}$ hanno coordinate intere e in modulo ≤ 2. ($Q(1, 0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 2, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1, 1, 0)$.)

b) (2pt) Qual'è la posizione reciproca di π e r? (Complementari)

c) (2pt) Determinare un versore $\vec{n}$ perpendicolare a r e π. ($\vec{n} = (2/3, 0, -2/3, -1/3)$)

d) (2pt) Calcolare la distanza tra r e π. (È $4/3$).

e) (4pt) Scrivere l'equazione parametrica dell'unica retta $s = S + \langle \vec{n} \rangle$ congiungente r con π e perpendicolare ad entrambi. (Il vettore $(R - Q) - 4/3\vec{n} = (-8/9, -1, 1/9, -22/9) = -5/9\vec{t} - 4/9\vec{u} + 4/9\vec{v}$. Quindi la retta s passa congiunge i punti $S = R + (5/9)\vec{t} \in r$ e $T = Q + (4/9)\vec{u} - (4/9)\vec{v} \in \pi$, ed è parallela a $\vec{n}$.)

Esercizio 2. Nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, si consideri la parabola di equazione

$$\mathcal{Q} : 4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \ .$$

Sia A la matrice di $\mathcal{Q}$.

a) (3pt) Si determini la forma canonica di $\mathcal{Q}$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}\right)^2 \ .$$

b) (3pt) Si determinino le coordinate ortogonali in cui $\mathcal{Q}$ assume forma canonica.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

c) (4pt) Si determinino il vertice e l'asse di $\mathcal{Q}$. (vertice $V = (1/5, 3/5)$; asse $2x + y = 1$.)

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ la rigidità che ruota gli assi di $30°$ in senso antiorario e porta il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel punto $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

a) (3pt) Scrivere la matrice P di f.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) (3pt) Sia r la retta di equazione

$$2x - 3y = 4 .$$

Determinare l'equazione delle rette $f(r)$ e $f^{-1}(r)$.

Svolgimento. Conviene forse calcolare anche

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-2\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{4} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Scriviamo $f(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ e $f^{-1}(x,y) = (\tilde{\varphi}(x,y), \tilde{\psi}(x,y))$, cioè

$$\begin{cases} \varphi(x,y) & = & \frac{1}{2} & + & \frac{\sqrt{3}}{2}x & - & \frac{1}{2}y \\ \psi(x,y) & = & -1 & + & \frac{1}{2}x & + & \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} , \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}(x,y) & = & \frac{1-2\sqrt{3}}{2} & + & \frac{\sqrt{3}}{2}x & + & \frac{1}{2}y \\ \tilde{\psi}(x,y) & = & \frac{1+2\sqrt{3}}{4} & - & \frac{1}{2}x & + & \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} .$$

Allora l'equazione di $f^{-1}(r)$ si trova esplicitando $2\varphi(x,y) - 3\psi(x,y) = 4$. Invece l'equazione di $f(r)$ si trova esplicitando $2\tilde{\varphi}(x,y) - 3\tilde{\psi}(x,y) = 4$.

c) (4pt) Sia $\mathcal{C}$ l'ellisse di equazione

$$x^2 + 3y^2 = 1 .$$

Determinare la matrice delle ellissi $f(\mathcal{C})$ e $f^{-1}(\mathcal{C})$.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dunque $f^{-1}(\mathcal{C})$ ha matrice $P^{\mathrm{t}}AP$ mentre $f(\mathcal{C})$ ha matrice $(P^{-1})^{\mathrm{t}}AP^{-1}$. Si può anche esplicitare

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \ : \ \varphi(x,y)^2 + 3\psi(x,y)^2 = 1 \ \ , \ \ f(\mathcal{C}) \ : \ \tilde{\varphi}(x,y)^2 + 3\tilde{\psi}(x,y)^2 = 1 .$$

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Siano $P_1, \ldots, P_N \in A$, punti in uno spazio affine (A, V) sul corpo C. Spiegare come e perchè, dati $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in C$, con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1$, si può definire il punto $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_N P_N$. Perché occorre la condizione sui λ_i?

Esercizio 5. (**Domanda per l'orale**) Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $\varphi \in End_C V$ una applicazione C-lineare. Siano $w_1, \ldots, w_N$ autovettori di φ appartenenti a autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Dimostrare che $w_1, \ldots, w_N$ sono linearmente indipendenti.