Appello estivo di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

9 luglio 2014

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Tot. scritto	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con coordinate ortogonali (x, y, z, w), si considerino le due sottovarietà π e σ di equazioni

$$\pi : \begin{cases} x + y + w = 3 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x - z - 2w = -4 \\ 2x + y - w = 4 \end{cases}.$$

a) (3pt) Mostrare che π e σ sono piani e scriverli entrambi nella forma $Q + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, ove Q è un punto e $\vec{u}, \vec{v}$ sono vettori.

$(\pi = (1, 1, 1, 1) + \langle (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle$, $\sigma = (2, 2, 2, 2) + \langle (0, 1, -2, 1), (1, -2, 1, 0) \rangle$

b) (2pt) Qual'è la posizione reciproca di π e σ? Precisamente, sono incidenti? Sono sghembi? Nessuna delle due? Perchè?

Non sono incidenti. Non sono sghembi perchè gli spazi direttori hanno una intersezione non nulla, precisamente $\langle (2, -3, 0, 1) \rangle$.

c) (3pt) Esistono rette $r \subset \pi$ e $s \subset \sigma$ con r parallela a s?

Sí, per esempio $r = (1, 1, 1, 1) + \langle (2, -3, 0, 1) \rangle$, $s = (2, 2, 2, 2) + \langle (2, -3, 0, 1) \rangle$.

d) (3pt) Determinare un vettore perpendicolare sia a π che a σ e la distanza tra π e σ.

Il vettore $Q - P = (1, 1, 1, 1)$. La distanza è allora $||Q - P|| = 2$.

Esercizio 2. Nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con coordinate ortogonali (x, y), studiare la conica di equazione

$$\mathcal{Q} : 3xy - 4y^2 - 3x + 5y = 0 .$$

a) (2pt) Si determini la matrice A di $\mathcal{Q}$, si dica se è degenere o no e di che tipo di conica si tratta.

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 5/2 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det A = -9/4$: la conica è non-degenere. Gli autovalori di A' sono $-9/2$ e $1/2$. Quindi si tratta di una iperbole.

a) (2pt) Si determini la forma canonica di $\mathcal{Q}$ in opportune (non specificate) coordinate ortogonali (X, Y).

Senza calcoli possiamo prevedere che la forma canonica tramite una rigidità di matrice P, cioè

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & a & b \\ * & c & d \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R}) \ ,$$

e quindi tramite il cambiamento di coordinate

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

sarà del tipo

$$P^t A P = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Siccome però $-9/4 = \det A = \det P^t A P = -9/4 \times *$, si ha che $* = 1$ e quindi la forma canonica sarà

$$\frac{9}{2} X^2 - \frac{1}{2} Y^2 = 1 \ .$$

b) (3pt) Si determinino in funzione di (x, y) le coordinate ortogonali (X, Y) in cui $\mathcal{Q}$ assume forma canonica.

Qui bisogna trovare gli autovettori di

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & -4 \end{pmatrix} \ ,$$

che saranno usati come colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$$

tale che

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Si trova allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \ .$$

Quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 1 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \text{ dà } P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 1 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

perciò

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

c) (4pt) Determinare eventuali centro, asintoti e assi di $\mathcal{Q}$ nelle originarie coordinate (x, y).

Il centro è $(X, Y) = (0, 0)$ e dunque in coordinate (x, y) è $(1, 1)$. Gli asintoti sono $3X + Y = 0$ e $3X - Y = 0$. Dunque in coordinate (x, y) sono $3x - 4y + 1 = 0$ e $y = 1$. Gli assi sono $X = Y$ e $X = -Y$ cioè $x + 2y = 1$ e $2x - y = 3$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ l'affinità di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (3pt) Si determinino i punti uniti di f.

È utile calcolare gli autovalori di P. Il polinomio caratteristico è $\det(x - P) = (x - 1)^2(x - 2)$. Gli autovettori di P sono allora

$$\ker(P - 1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ e } \ker(P - 2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle ,$$

ma nessuno dei due rappresenta un punto di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ perché questi hanno prima coordinata 1. Dunque non ci sono punti uniti.

b) (4pt) Si determinino le rette r tali che $f^{-1}(r) = r$. (Suggerimento: forse conviene trovare l'equazione dell'immagine inversa $f^{-1}(r)$ di una generica retta di equazione $aX + bY + c = 0$.)

Sia $ax + by + c = 0$ una retta r. Allora $f^{-1}(r)$ ha equazione $-2bx + (a + 3b)y + a + b + c = 0$. Allora $f^{-1}(r) = r$ se e solo se le due colonne

$$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a + b + c \\ -2b \\ a + 3b \end{pmatrix}$$

sono proporzionali. Si noti che

$$\begin{pmatrix} a + b + c \\ -2b \\ a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} ,$$

e quindi si tratta sempre di un problema di autovalori. Gli autovalori di

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sono ancora 1 e 2. Qui si ha

$$\ker(Q - 1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ e } \ker(Q - 2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle ,$$

Il primo non corrisponde a una retta. Il secondo corrisponde a $x = y$ ch è dunque l'unica retta unita.

c) (4pt) Si determinino le rette r tali che $f^{-1}(r)$ sia parallela a r.

In questo caso, perché la retta r sia parallela alla $f^{-1}(r)$ basta che

$$\begin{pmatrix} -2b \\ a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

siano proporzionali. Gli autovalori di $R := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sono ancora 1 e 2. Si ha

$$\ker(R-1) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \ker(R-2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Dunque le rette che vengono trasformate in loro parallele sono le rette parallele a uno dei due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Il *Teorema dei coseni* dice che in un triangolo di lati a, b, c, di lunghezze ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c rispettivamente, se γ è l'angolo opposto al lato c, allora $\ell_c^2 = \ell_a^2 + \ell_b^2 - 2\ell_a\ell_b\cos\gamma$. Dimostrarlo utilizzando le proprietà del prodotto scalare.

Esercizio 5. (**Domanda per l'orale**) Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che il numero di righe linearmente indipendenti di A coincide con il numero di colonne linearmente indipendenti di A.