Appello estivo di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

29 agosto 2014

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Tot. scritto	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x, y, z, w) rispetto alla base canonica, si considerino i due sottospazi

$$U : \begin{cases} x + y + w = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad V : \langle (0,1,0,-1), (2,2,1,0), (0,1,-1,0) \rangle \; .$$

a) (2pt) Determinare la dimensione di U e di V.

Si ha $\dim U = 2$ poichè le due equazioni non sono proporzionali. Si ha $\dim V = 3$ poichè i 3 vettori generatori sono l.i. come si vede subito procedendo tramite operazioni elementari sulle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) (2pt) Determinare una base di $U \cap V$.

Conviene esprimere il generico vettore di V nella forma $(2b, a + 2b + c, b - c, -a)$, per $a, b, c \in \mathbb{R}$. Allora la condizione che questo vettore appartenga a U dà $b = c = 0$ (e a qualunque). Dunque

$$U \cap V = \langle (0,1,0,-1) \rangle \; .$$

c) (2pt) Determinare delle decomposizioni

$$\mathbb{R}^4 = (U + V) \oplus W \quad , \quad U = S \oplus (U \cap V) \quad , \quad V = T \oplus (U \cap V) \; ,$$

esplicitando una base di W, di S e di T.

Si ha $W = (0)$, Per completare $\{(0,1,0,-1)\}$ in una base di V, si risolve il sistema

$$U : \begin{cases} x + y + w = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} .$$

che certamente dà un vettore di U non proporzionale a $(0,1,0,-1)$, precisamente $(1,-1,0,0)$. Dunque $S = \langle (1,-1,0,0) \rangle$. Poi si vede subito che $T = \langle (2,2,1,0), (0,1,-1,0) \rangle$.

d) (2pt) Determinare i valori di t per cui esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $U \subseteq \ker f$ e che

$$f(0,1,0,-1) = (t+1, 0) \quad , \quad f(2,2,1,0) = (t, 0) \quad , \quad f(0,1,-1,0) = (0, 1-t) \; .$$

L'unica condizione a cui deve soddisfare t è che $f(0,1,0,-1) = (0,0)$, cioè deve essere $t = -1$.

e) (3pt) Dare la rappresentazione matriciale, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^2$, delle applicazioni lineari f determinate nel punto precedente.

La f è rappresentata dalla matrice $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} ,$$

tale che

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Con un po' di fatica (si tratta di risolvere un sistema lineare di 8 equazioni nelle 8 incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, che sono gli 8 coefficienti di A. In realtà però si tratta di 2 sistemi di 4 equazioni in 4 incognite (uno nelle α e uno nelle β) da risolvere separatamente. Si usa il metodo di eliminazione di Gauss, per esempio.) si trova che

$$A = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -8/5 & 2/5 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con coordinate ortogonali (x, y, z), si considerino le due rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 5 \end{cases} .$$

a) (3pt) Determinare l'equazione del piano σ per s parallelo a r.

Un vettore non nullo parallelo alla retta r è $\vec{u} = (1, 0, -1)$. Il piano generico per s ha equazione

$$\lambda(x - 2) + \mu(y + z - 5) = 0 ,$$

e cioè

$$\lambda x + \mu y + \mu z = 2\lambda + 5\mu ,$$

al variare di λ e μ in $\mathbb{R}$. L'unico (a meno di proporzionalità) vettore perpendicolare a tale piano è il vettore (λ, μ, μ). Perchè questo piano sia parallelo a r deve essere $(\lambda, \mu, \mu) \perp (1, 0, -1)$, e cioè $(\lambda, \mu) = (1, 1)$. Il piano σ è allora

$$\sigma : \; x + y + z = 7 .$$

b) (3pt) Determinare la distanza di r da s.

Un vettore non nullo parallelo alla retta s è $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Allora scriviamo sia r che s in equazioni parametriche

$$r = \{ P_a := (1, 2, 1) + a\,(1, 0, -1) \; , \; a \in \mathbb{R} \} \; , \; s = \{ Q_b := (2, 3, 2) + b\,(0, 1, -1) \; , \; b \in \mathbb{R} \}$$

La formula per il calcolo della distanza tra r e s è

$$\frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (Q_0 - P_0)|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} .$$

c) (3pt) Determinare l'equazione della retta ℓ incidente sia r che s e perpendicolare ad entrambe.

Dobbiamo scegliere $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che il vettore

$$Q_b - P_a = (1-a, 1+b, 1-b+a) ,$$

sia ortogonale sia a $(1,0,-1)$ che a $(0,1,-1)$. Dunque deve essere

$$\begin{cases} 1-a & + & & - & (1-b+a) & = & 0 \\ & & 1+b & - & (1-b+a) & = & 0 \end{cases} ,$$

cioè $(a,b) = (0,0)$. Quindi la retta ℓ è la congiungente P_0 e Q_0. Questo conferma che la distanza di r da s coincide con la distanza di P_0 da Q_0, che è appunto $\sqrt{3}$.

Esercizio 3. Nel piano euclideo standard $\mathbb{R}^2$ con coordinate ortogonali (x,y), si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{Q} : 5x^2 - y^2 - 6\sqrt{3}xy - (4+8\sqrt{3})x + (8-4\sqrt{3})y + 8 = 0 .$$

a) (1pt) Si scriva la matrice A della conica nelle coordinate (x,y).

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2-4\sqrt{3} & 4-2\sqrt{3} \\ -2-4\sqrt{3} & 5 & -3\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

b) (3pt) Di che tipo di conica si tratta? Si determini una rotazione

$$P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P \in O^+(2,\mathbb{R}) ,$$

in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate (X,Y) non contenga il termine in XY.

Gli autovalori di A' sono 8 e -4 e i corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} .$$

Dunque

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} ,$$

soddisfa

$$P^t A' P = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

c) (2pt) Si scriva la matrice B di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate (X,Y).

La matrice è

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -4 \\ -8 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

d) (2pt) Traslare le coordinate $(u,v) = (X-a, Y-b)$ in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate ortogonali (u,v) sia in forma canonica.

Si prende $(a,b) = (1,-1)$ cosicché l'equazione della conica diviene

$$-2u^2 + v^2 = 1 .$$

e) (3pt) Determinare eventuali centro, asintoti e assi di $\mathcal{Q}$ nelle originarie coordinate (x, y).

Il centro è $(u, v) = (0, 0)$, cioè $(X, Y) = (1, -1)$. Quindi, in coordinate (x, y) il centro è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

Gli asintoti sono $v = \pm\sqrt{2}\, u$ e dunque $Y + 1 = \pm\sqrt{2}\,(X - 1)$, e cioè

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = \pm\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1) .$$

Gli assi sono $X = 1$ e $Y = -1$ e cioè

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \ \text{ e } \ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -1 .$$

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Cos'è un *campo* $C = (C, +, \cdot)$? Cos'è uno *spazio vettoriale* $V = (V, +, \cdot)$ sul campo C? Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale su C, $0_C \cdot v = 0_V$, per ogni $v \in V$. Dimostrare che $(-1_C) \cdot v = -v$, per ogni $v \in V$.

Esercizio 5. (**Domanda per l'orale**) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e siano U e W suoi sottospazi. Quand'è che una applicazione lineare $f : V \to V$ è la *proiezione di V su W lungo U*? Che forma ha la matrice di una tale proiezione rispetto a una base di V formata giustapponendo una base di W a una base di U?

Mostrare che una applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f^2 = f$ è certamente la proiezione di V su un suo sottospazio U lungo un altro sottospazio W. Come stanno in relazione U e W con f?