Area in $\mathbb{R}^2$ e volume in $\mathbb{R}^3$ euclidei standard

12 dicembre 2014

1 Aree sul piano

Siano $u = (3, 2)$ e $v = (2, -5)$ due vettori nel piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$ espressi in coordinate ortonormali. Quanto vale l'area A di $\Pi(u, v)$?
Abbiamo parecchi modi di calcolare A.

1. Poiché
$$(u, v) = (e_1, e_2)Q = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} ,$$
la definizione stessa da
$$A = |\det Q| = |\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}| = 19 .$$

2. $$A^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 29 \end{vmatrix} = 361 = 19^2 .$$

3. Sia θ l'angolo tra u e v. Abbiamo
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||\,||v||} = \frac{-4}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{-4}{\sqrt{377}} \ , \ \sin\theta = \sqrt{\frac{361}{377}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$
$$A = \text{base} \times \text{altezza} = ||u|| \times ||v|| \sin\theta = \sqrt{13} \times \sqrt{29} \times \frac{19}{\sqrt{377}} = 19 .$$

Di questi metodi, sia il secondo che il terzo si generalizzano a k-volumi in un n-spazio euclideo.

2 Volumi nello spazio euclideo usuale

Siano $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, 0, 4)$ e $w = (3, -2, 0)$, tre vettori nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ espressi in coordinate ortonormali. Quanto vale il volume V di $\Pi(u, v, w)$?
Abbiamo parecchi modi di calcolare V.

1. Poiché
$$(u, v, w) = (e_1, e_2, e_3)Q = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} ,$$
la definizione stessa dà
$$V = |\det Q| = |\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 24 = 36 .$$

2. $$V^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ u \cdot v & v \cdot v & v \cdot w \\ u \cdot w & v \cdot w & w \cdot w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 20 & 6 \\ -1 & 6 & 13 \end{vmatrix} =$$
$$= 6\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 20 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 224 - 40 - 8 = 1344 - 40 - 8 = 1296 = 36^2$$

3. Area di $\Pi(u,v)$ = area di base è data da

$$A^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ u\cdot v & v\cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 20 \end{vmatrix} = 116 \; ,$$

cosicché $A = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$. Oppure si può usare il prodotto vettore :

$$u \times v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\underline{i} - 6\underline{j} - 4\underline{k} \; .$$

$$A = ||u \times v|| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \; ,$$

Per calcolare l'altezza di $\Pi(u,v,w)$ sul piano $\langle u,v\rangle$ bisogna decomporre $w = w' + w''$, con w' parallelo al piano $\langle u,v\rangle$ e $w'' \perp u,v$. Si deve avere $w' = \lambda u + \mu v$, per $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ e $w'' = w - w'$. La condizione $w''\cdot u = w''\cdot v = 0$ determina λ,μ. Infatti

$$(w - \lambda u - \mu v)\cdot u = 0 \;\; , \;\; (w - \lambda u - \mu v)\cdot v = 0 \; ,$$

dà il sistema

$$\begin{cases} w\cdot u & - & \lambda & u\cdot u & - & \mu & u\cdot v & = & 0 \\ w\cdot v & - & \lambda & u\cdot v & - & \mu & v\cdot v & = & 0 \end{cases} ,$$

e cioè

$$\begin{cases} -1 & - & \lambda & 6 & + & \mu & 2 & = & 0 \\ 6 & + & \lambda & 2 & - & \mu & 20 & = & 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} 17 & - & & & 58 & \mu & = & 0 \\ 6 & + & 2 & \lambda & - & 20 & \mu & = & 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} & & \mu & = & 17/58 \\ 6 & + & 2\lambda & = & 170/29 \end{cases}$$

Quindi $\lambda = -2/29$ e $\mu = 17/58$. Poi

$$w'' = w + \frac{2}{29}u - \frac{17}{58}v = (3,-2,0) + (2/29, 4/29, -2/29) - (17/29, 0, 34/29) = (72/29, -54/29, -36/29) \; .$$

Pertanto l'altezza di $\Pi(u,v,w)$ sul piano $\langle u,v\rangle$ è $h = \frac{\sqrt{9396}}{29} = \frac{18}{\sqrt{29}}$. Quindi

$$V = 2\sqrt{29} \times \frac{18}{\sqrt{29}} = 36 \; .$$

Anche in questo caso, sia il secondo che il terzo metodo si generalizzano al calcolo di k-volumi in uno spazio euclideo di dimensione n.

3 caso $k = n$ e $k = n-1$.

Per $k = n$, cioè quando si hanno n vettori in uno spazio euclideo di dimensione n, per calcolare il volume si possono usare indifferentemente i metodi 1 o 2.

Nel caso $k = n-1$, cioè in cui c'è un vettore in meno della dimensione dello spazio ambiente, può convenire calcolare il "prodotto vettore $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$ degli $n-1$ vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Infatti si ha

$$\operatorname{vol}\Pi(v_1, \ldots, v_{n-1}) = ||v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}|| \; .$$

Il calcolo di $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$, espressi in coordinate rispetto alla base ortonormale standard $(e_1, \ldots, e_n)$: $v_i = a_{i,1}e_1 + \cdots + a_{i,n}e_n$, per $i = 1, \ldots, n-1$, generalizza la formula

$$u \times v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \; .$$

Si ha

$$v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1} := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

Si veda la dimostrazione nella lezione del 15 dicembre.

Non mi è chiaro quale delle formule sia la più rapida … È meglio conoscerle tutte !