Esercizi con spiegazione

28 dicembre 2014

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $p(X) = (X-2)^4$.

1. (1 pt.) Si verifichi che i due vettori

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di A.

2. (2 pt) Determinare la nullità di $(A-2)$ e quella di $(A-2)^2$.

3. (2 pt.) Determinare la forma canonica di Jordan J di A.

4. (3 pt) Determinare la matrice $P \in GL(4,\mathbb{R})$ tale che $AP = PJ$.

Risposta: Si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e già sappiamo che la nullità di $A-2$ vale almeno 2. D'altra parte non può essere maggiore, perché le prime 2 righe sono linearmente indipendenti. Calcoliamo

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0$$

Dunque la nullità di $(A-2)^2$ vale 4. Quindi la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia f l'endomorfismo $\underline{X} \mapsto A\underline{X}$ di $V = \mathbb{R}^4$. Già sappiamo che $f(u) = 2u$ e $f(v) = 2v$. Cerchiamo una base di V della forma (u, u_1, v, v_1), tale che

$$f(u, u_1, v, v_1) = (u, u_1, v, v_1)J = (u, u_1, v, v_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (2u, 2u_1 + u, 2v, 2v_1 + v) \; .$$

Sappiamo che trovare una tale base è possibile. Deve essere

$$(f - 2)(u_1) = u \;\text{ e }\; (f - 2)(v_1) = v \; .$$

Quindi si cerca un vettore u_1 soluzione di

$$(A - 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{cioè di} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Analogamente si cerca un vettore v_1 soluzione di

$$(A - 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè di} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si determinano quindi, a meno di addizione di un elemento del nucleo di $A - 2$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si costruisce quindi una matrice invertibile P giustapponendo le colonne u, u_1, v, v_1 e si ottiene

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi $AP = PJ$ e cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha anche $PJP^{-1} = A$, e cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $p(X) = (X-3)^4$.

1. (1 pt.) Si verifichi che i due vettori

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   sono autovettori di A.

2. (2 pt) Determinare la nullità di $(A-3)$ e quella di $(A-3)^2$.
3. (2 pt.) Determinare la forma canonica di Jordan J di A.
4. (3 pt) Determinare la matrice $P \in GL(4, \mathbb{R})$ tale che $AP = PJ$.

   Risposta: Il ragionamento è analogo a quello dell'esercizio precedente. Però qui la nullità di $(A-3)$ è 2 e quella di $(A-3)^2$ è 3. Quindi la forma canonica di Jordan di A è della forma

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Qui deve essere possibile determinare dei vettori v_1 e v_2 tali che $(A-3)(v_1) = v$ e $(A-3)(v_2) = v_1$, oppure dei vettori u_1 e u_2 tali che $(A-3)(u_1) = u$ e $(A-3)(u_2) = u_1$. Il primo caso, non si può realizzare:

$$(A-3)\underline{X} = v \ \text{ cioè } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non ha soluzioni. Invece

$$(A-3)\underline{X} = u \;\text{ cioè }\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ha la soluzione

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e poi

$$(A-3)\underline{X} = u_1 \;\text{ cioè }\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha la soluzione

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I 4 vettori formeranno una base (u, u_1, u_2, v) di $\mathbb{R}^4$. Le soluzioni

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non sono uniche. Giustapponendole si trova una matrice invertibile P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $AP = PJ$ e cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha anche $PJP^{-1} = A$ e cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^4$ con coordinate ortonormali (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. (4 pt.) Determinare la distanza $d(r, s)$.

   Risposta: Un vettore direttore di r è $u = (-4, 3, -1, 1)$; un vettore parallelo a s è $v = (2, 2, -2, 2)$. Un punto di r è $P(0, 1, 0, -1)$; un punto di s è $Q(0, -1, 2, -1)$. Quindi il vettore PQ è

   $$PQ = (0, -2, 2, 0) .$$

   Si ha allora

   $$d(r, s)^2 = \frac{\operatorname{vol}\Pi(u, v, PQ)^2}{\operatorname{area}\Pi(u, v)^2} = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot PQ \\ u \cdot v & v \cdot v & v \cdot PQ \\ u \cdot PQ & v \cdot PQ & PQ \cdot PQ \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} .$$

   Quindi

   $$d(r, s)^2 = \begin{vmatrix} 27 & 2 & -8 \\ 2 & 16 & -8 \\ -8 & -8 & 8 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 27 & 2 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = 928/428 = 232/107 .$$

2. (4 pt.) Determinare l'equazione parametrica della retta t incidente r e s e perpendicolare ad entrambe.

   Risposta: Si tratta della congiungente i punti $R = P + \lambda u \in r$ e $S = Q + \mu v \in s$, ove λ e μ sono scelti in modo che RS sia perpendicolare a u e v. Questo da $\lambda = -\frac{28}{107}$ e $\mu = \frac{50}{107}$. Dunque $R = P(0, 1, 0, -1) - \frac{28}{107}(-4, 3, -1, 1) \in r$ e $S = Q(0, -1, 2, -1) + \frac{50}{107}(2, 2, -2, 2) \in s$. Si controlli che $d(R, S)^2 = 232/107$, cioè che $d(r, s) = d(R, S)$.

Esercizio 4. Si consideri nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^2$ con coordinate ortonormali (x, y), la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 + 2x + y + \frac{1}{25} = 0 .$$

1. (4 pt.) Determinare una rotazione di centro l'origine

   $$\begin{cases} x = c\,u - s\,v \\ y = s\,u + c\,v \end{cases}$$

   in modo che i coefficienti dell'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u, v) non abbia il termine in uv.

2. (4 pt.) Si determinino gli assi, i semiassi e il centro di $\mathcal{C}$.

Risposta: Si considerano solo i termini di grado massimo $41x^2 - 24xy + 34y^2$ dell'equazione di $\mathcal{C}$, e si scrivono nella forma

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Si tratta di diagonalizzare la matrice reale simmetrica $A = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}$ tramite una rotazione, il che si può fare per il teorema spettrale. Si ha

$$p_A(X) = \det(XI_2 - A) = X^2 - 75X + 1250 = (X - 25)(X - 50) .$$

SI trovano gli autovettori di A:

$$\ker(A - 25I_2) = \ker \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle ,$$

e

$$\ker(A - 50I_2) = \ker \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle .$$

Gli autovetture trovato sono naturalmente ortogonali. Bisogna però normalizzarli. Dunque la matrice della rotazione cercata è

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} .$$

L'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u, v) ha come termini di grado massimo (si ricordi che per una matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \quad)$$

$$(u, v) \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u, v) \begin{pmatrix} 25 & -0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 25u^2 + 50v^2 .$$

L'equazione completa di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u, v) è

$$25u^2 + 50v^2 + 2u - v + \frac{1}{25} = 0 .$$

Si "completano i quadrati" cosí :

$$25u^2 + 2u = 25u^2 + 2u + \frac{1}{25} - \frac{1}{25} = (5u + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25} ,$$

e

$$50v^2 - v = 2((5v)^2 - \frac{1}{2}v) = 2((5v)^2 - \frac{1}{2}v + \frac{1}{400} - \frac{1}{400}) = 2(5v - \frac{1}{20})^2 - \frac{1}{200} .$$

Allora

$$25u^2 + 50v^2 + 2u - v + 1 = (5u + \frac{1}{5})^2 + 2(5v - \frac{1}{20})^2 - \frac{1}{25} - \frac{1}{200} + \frac{1}{25} .$$

Dunque l'equazione diventa

$$(5u + \frac{1}{5})^2 + 2(5v - \frac{1}{20})^2 - \frac{1}{200} = 0 .$$

Usando le coordinate ortonormali $U = u + \frac{1}{25}$ e $V = v - \frac{1}{100}$, l'equazione di $\mathcal{C}$ è allora

$$5000\, U^2 + 10000\, V^2 = 1 .$$

Si tratta di un'ellisse di centro il punto $(u, v) = (-\frac{1}{25}, \frac{1}{100})$ cioè $(x, y) = (-\frac{16}{500}, -\frac{13}{500})$, assi le rette

$$u = -\frac{1}{25} \quad , \quad v = \frac{1}{100}$$

e cioè

$$3x + 4y = -\frac{1}{5} \quad , \quad -4x + 3y = \frac{1}{20} \; .$$

Se l'unità di misura è il metro, i semiassi di $\mathcal{C}$ misurano $1,41$ cm. (circa) e 1 cm..