II compitino di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
24 gennaio 2014

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (2pt) Determinare il polinomio caratteristico di A.

b) (2pt) Determinare gli autovalori, le loro molteplicità e le loro nullità.

c) (2pt) Determinare una forma canonica di Jordan J di A.

d) (4pt) Determinare una matrice $P \in GL(4, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = J$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

a) $\det(x - A_1) = (x-9)(x-3)$, $\det(x - A_2) = (x-6)^2$. Dunque $\det x - A = (x-9)(x-3)(x-6)^2$.

b) Basta determinare $null(6)$. Si ha $\ker(A_2 - 6) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e dunque $null(6) = 1$.

c) Si ha

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

d) Basta determinare $\ker(A_1 - 9) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\ker(A_1 - 3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Allora

$$\ker(A - 9) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ , \ \ker(A - 3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

inoltre

$$\ker(A - 6) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \ ,$$

e si deve risolvere ancora

$$(A - 6) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\ \in \ker(A-6) \ ! \ ) \ ,$$

per esempio

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Dunque si può prendere

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si ha $AP = PJ$ e cioè

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ con coordinate ortogonali (x, y, z, w), si considerino la retta $r : P(1, -1, 0, 1) + \langle v \rangle$, ove $v = (2, 1, 0, 2)$, e il piano π di equazioni

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

a) (3pt) Qual è la posizione reciproca di r e π?

b) (4pt) Sia U lo spazio direttore di π. Quanto vale $\dim(U + \langle v \rangle)^\perp$? Determinare un versore ortogonale a U e a v.

c) (3pt) Si consideri il punto $R(1, 1, 1, 0) \in \pi$. Quanto misura la componente del vettore $R - P$ ortogonale a $U + \langle v \rangle$ (cioè la distanza di r da π)?

d) **Domanda per l'orale** Cosa significa che due sottovarietà lineari L e M di uno spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ sono *sghembe*? Se due varietà non sono parallele e non si intersecano, sono necessariamente sghembe?

Soluzione. (a) È evidente che $r \cap \pi = \emptyset$ (La retta r sta sul piano $z = 0$. Quindi un punto di $r \cap \pi$ avrebbe $w = -1$ e sarebbe pertanto il punto $(-1, -2, 0, -1)$, che però non sta su π.) Inoltre v non è parallelo a π. Quindi r e π sono sghembi, e quindi complementari in $\mathbb{R}^4$.
(b) $\dim(U + \langle v \rangle) = 3$ e quindi $\dim(U + \langle v \rangle)^\perp = 1$. Per trovare un vettore ortogonale scriviamo l'equazione di $U + \langle v \rangle$ nella forma

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

e cioè $-4x - 2y - 5z + 5w = 0$. Si noti che un versore normale è allora $n := \pm(4, 2, 5, -5)/\sqrt{70}$.
(c) Si ha $R - P = (0, 2, 1, -1)$ e quindi $|n \cdot (R - P)| = 14/\sqrt{70}$.
(d) La distanza vale appunto $14/\sqrt{70}$.

Esercizio 3. Nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x + 4y + 7 = 0\ .$$

a) (3pt) Scrivere la matrice di $\mathcal{C}$ e controllare che la conica è non-degenere.

b) (3pt) Di quale tipo di conica si tratta?

c) (4pt) Determinare la forma canonica di $\mathcal{C}$ ed il riferimento in cui prende tale forma.

Svolgimento. (a) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\ .$$

Dunque $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $\det A' = -6$ dice che $\mathcal{C}$ è un'iperbole. Quindi

$$\det(x - A') = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ --2 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x+3)\ .$$

Abbimo allora

$$\ker(A' - 2I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\ ,$$

$$\ker(A' + 3I_2) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle\ .$$

Quindi abbiamo

$$R = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})\ ,$$

e

$$R^t A' R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = R^{-1} A' R\ .$$

Dunque ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x' + y')/\sqrt{5} \\ (x' - 2y')/\sqrt{5} \end{pmatrix}\ ,$$

(che coincide con la trasformazione inversa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x + y)/\sqrt{5} \\ (x - 2y)/\sqrt{5} \end{pmatrix}\ ,$$

perchè in questo caso $R = R^t = R^{-1}$) l'equazione di $\mathcal{C}$ diviene

$$2(x')^2 - 3(y')^2 + 2(2x' + y')/\sqrt{5} + 4(x' - 2y')/\sqrt{5} + 7 = 0\ ,$$

cioè

$$2(x')^2 - 3(y')^2 + 8x'/\sqrt{5} - 6y'/\sqrt{5} + 7 = 0\ .$$

Completando i quadrati si trova:

$$2(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 6 = 0\ ,$$

e dunque

$$\frac{(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2}{2} - \frac{(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2}{3} = 1\ ,$$

L'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è allora

$$\frac{V^2}{2} - \frac{U^2}{3} = 1\ ,$$

ove

$$U = (2x + y + 2)/\sqrt{5}\ \ ,\ \ V = (x - 2y + 1)/\sqrt{5}\ .$$

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Si consideri lo spazio normato $(V, \circ) = (\mathbb{R}^n, A)$, ove A è matrice reale $n \times n$ simmetrica non-degenere. Quale teorema permette di capire di che tipo di spazio si tratta? Per esempio, si discuta $(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix})$.

Questo è un piano iperbolico.

Cognome	Nome	Matricola	Voto 1^o comp.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Tot. Scritto 2^o comp.

Es. 2 (d)	Es. 4	Tot. Orale	Voto Finale