Teorema Spettrale Reale o degli Assi Principali

Sia A una matrice simmetrica reale.

1. Tutti gli autovalori di A sono reali.

Dim. Caso 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{pmatrix} = (a-t)(c-t) - b^2 = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2) = 0$$

il discriminante dell'equazione caratteristica è $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ e quindi gli autovalori di A sono reali.

Caso generale. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A ed $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un corrispondente autovettore (colonna). Allora $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Trasponendo e coniugando si ottiene $\overline{\mathbf{x}}^t A = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^t$ da cui segue, moltiplicando a destra per $\mathbf{x}$,

$$\overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^t\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^t A\mathbf{x} = \lambda\overline{\mathbf{x}}^t\mathbf{x}.$$

Poiché $\overline{\mathbf{x}}^t\mathbf{x} \neq 0$ si ottiene $\overline{\lambda} = \lambda$ e λ è un numero reale. (Più dettagli a lezione).

2. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, è $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$.

Dim. Da $A^t = A$ segue

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t\mathbf{y} = (\mathbf{x}^t A^t)\mathbf{y} = (\mathbf{x}^t A)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t(A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

3. Autovalori reali corrispondenti ad autovalori *distinti* sono *ortogonali*.

Dim. Se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ con $\lambda \neq \mu$, risulta

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mu\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

da cui segue $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Teorema *Se P è una matrice $n \times n$, gli asserti seguenti sono equivalenti*
(i) P è invertibile e $P^{-1} = P^t$,
(ii) le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$,
(iii) le righe di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Dim. $P^{-1} = P^t$ equivale a $P^tP = \mathbb{1}_n$. Posto $P = (\mathbf{x_1} \cdots \mathbf{x}_n)$ ove $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ sono le colonne di P, la i-ma riga di P^t è $\mathbf{x}_i^t$, l'elemento di posto i, j in P^tP è $\mathbf{x}_i^t\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \mathbf{x}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che P è ortogonale se e solo se $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{i,j}$ è $= 0$ quando $i \neq j$ e $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$ per ogni i e dunque se e solo se le colonne formano una base ortonormale. Analoga la dim. per le righe. CVD

Una matrice quadrata si dice *matrice ortogonale* se soddisfa una (e quindi tutte) delle condizioni del Teorema. Diremo che una matrice A è *ortogonalmente diagonalizzabile* se esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = P^tAP =$ una matrice diagonale.

Teorema *Sia A una matrice quadrata reale di ordine n. Gli asserti seguenti sono equivalenti*
(i) A è ortogonalmente diagonalizzabile,
(ii) esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A,
(iii) A è una matrice simmetrica.

Dim. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Sia $P = (\mathbf{x_1} \cdots \mathbf{x}_n)$ una matrice invertibile con colonne $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x}_n$. La matrice P è ortogonale se e solo se $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ è una base ortonormale e $P^{-1}AP$ è diagonale se e solo se $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ è una base di autovettori di A.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia $P^tAP = D$ con D matrice diagonale. Segue che $A = PDP^t$ e $A^t = (PDP^t)^t = P^{tt}D^tP^t = PDP^t = A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Induzione su n. Per $n = 1$ il risultato è vero. Supponiamo $n > 1$. Poiché A è simmetrica, A ha un autovalore reale λ_1. Sia $\mathbf{x}_1$ un corrispondente autovettore, $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, che supponiamo normalizzato. Utilizzando Gram-Schmidt, completiamo $\{\mathbf{x}_1\}$ ad una base ortonormale $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ di $\mathbf{R}^n$. La matrice $P_1 : = (\mathbf{x_1} \cdots \mathbf{x}_n)$ è ortogonale e

$$P_1^tAP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ \mathbb{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

ove $\mathbb{0} = \mathbb{0}_{(n-1)\times 1}$, B è un blocco di taglia $1 \times (n-1)$ ed A_1 è un blocco di taglia $(n-1) \times (n-1)$. Poiché A è simmetrica, $P_1^t A P_1$ è simmetrica e quindi $B = \mathbb{0} = \mathbb{0}_{1\times(n-1)}$ e A_1 è simmetrica. Per induzione, segue che esiste una matrice ortogonale Q di taglia $(n-1) \times (n-1)$ con $Q^t A_1 Q = D_1$ diagonale. Segue che la matrice

$$P_2 \colon = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Q \end{pmatrix}$$

è ortogonale e che

$$(P_1P_2)^t A (P_1P_2) = P_2^t P_1^t A P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Q^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Q^t A_1 Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D_1 \end{pmatrix}$$

è diagonale. Inoltre si verifica facilmente che P_1P_2 è ortogonale. CVD

Algoritmo per diagonalizzare ortogonalmente una data matrice simmetrica A:
1. calcolare il polinomio caratteristico $P_A(t)$ di A,
2. calcolare gli autovalori di A, sono le radici di $P_A(t)$,
3. per ogni autovalore λ trovato in 2 calcolare una base ortogonale del relativo autospazio V_λ,
4. normalizzare tutti gli autovettori trovati in 3, essi formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$,
5. sia P la matrice le cui colonne sono i vettori normalizzati trovati in 4, allora $P^t A P$ è matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori di A.

Esempi (da anteporre alla dimostrazione)

- verificare che la seguente matrice è ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- diagonalizzare ortogonalmente le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

(per le matrici di ordine 3, ricerca di un autovalore intero tra i fattori del det).

- trovare una trasformazione ortogonale che diagonalizza la forma quadratica

$$Q(x, y) = x^2 + 6xy - y^2, \qquad Q(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$$

- Trovare una matrice ortogonale A tale che

$$A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Poniamo $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t$. Da $A\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$ e $A^t A = \mathbb{1}_3$ segue che $\mathbf{v} = A^t \mathbf{e}_2$. Segue che $\mathbf{v}$ è la seconda colonna di A. Quindi basta scegliere A in modo che A^t sia una matrice ortogonale con seconda colonna uguale a $\mathbf{v}$. Poiché le colonne di una matrice ortogonale 3x3 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, basta costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathbf{v}$. A tal fine determiniamo una base ortonormale del sottospazio $\langle \mathbf{v} \rangle$. I vettori di $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ soddisfano l'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - z = 0.$$

Segue che una base di $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ è data dai vettori $(1, 0, 1)^t$ e $(0, 1, 0)^t$. Osserviamo che i due vettori sono ortogonali e quindi per trovare una base ortonormale di $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ basta normalizzare i due vettori (altrimenti avremmo dovuto usare il metodo di Gram-Schmidt). Dunque una base ortonormale di $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ è $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^t, (0, 1, 0)^t\}$. Segue che una scelta possibile per A^t è la matrice

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$