Matrici ortogonali

• Se P è una matrice reale $n \times n$, allora $(P\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (P^t\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (colonne).
Dim. $(P\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (P\mathbf{x})^t\mathbf{y} = (\mathbf{x}^tP^t)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t(P^t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (P^t\mathbf{y})$, CVD

Ulteriori caratterizzazioni delle matrici ortogonali:

Teorema *Sia P una matrice $n \times n$. Le condizioni seguenti su P sono equivalenti:*
(i) P è matrice ortogonale,
(ii) $(P\mathbf{x}) \cdot (P\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ per ogni $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (P conserva il prodotto scalare),
(iii) $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (P conserva le norme).
Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sappiamo che P è ortogonale se e solo se P è invertibile e $P^{-1} = P^t$. Segue

$$(P\mathbf{x}) \cdot (P\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot P^t(P\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (P^tP)\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\|P\mathbf{x}\| = \sqrt{(P\mathbf{x}) \cdot (P\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Facciamo vedere che se $P = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n)$, ove $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ sono le colonne di P, allora $\{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. È $\mathbf{x}_i = P\mathbf{e}_i$, ove $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono i vettori della base standard di $\mathbb{R}^n$. Segue $\|\mathbf{x}_i\| = \|P\mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{e}_i\| = 1$. Se $i \neq j$

$$\|\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j\|^2 = \|P\mathbf{e}_i + P\mathbf{e}_j\|^2 = \|P(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)\|^2 = \|\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\|^2 = 2 = \|\mathbf{x}_i\|^2 + \|\mathbf{x}_j\|^2.$$

D'altra parte $\|\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j\|^2 = \|\mathbf{x}_i\|^2 + \|\mathbf{x}_j\|^2 + 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ da cui segue $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$. CVD

Ulteriori proprietà delle matrici ortogonali:

Teorema *Siano P, Q matrici ortogonali $n \times n$. Allora:*
(i) $\det P = \pm 1$,
(ii) PQ è una matrice ortogonale,
(iii) P^{-1} è una matrice ortogonale,
(iv) P^t è una matrice ortogonale.
Dim. solo di (i). Gli altri asserti sono facili e si lasciano come esercizi per il lettore. Da $P^tP = \mathbb{1}_n$ segue $\det(P^tP) = 1$. Utilizzando il Teorema di Binet e ricordando che $\det P = \det(P^t)$, si ricava $(\det P)^2 = 1$ e quindi $\det P = \pm 1$. CVD

L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n si denota usualmente con O_n. Dal teorema precedente O_n risulta essere un gruppo rispetto al prodotto di matrici (righe per colonne). È detto il *gruppo ortogonale* (di ordine n). L'insieme delle matrici ortogonali con $\det = 1$ si denota con SO_n ed è un sottogruppo di O_n. L'insieme delle matrici ortogonali con $\det = -1$ si denota con O_n^-. Chiaramente non è un sottogruppo di O_n, ma $\mathrm{O}_n^- = P\mathrm{SO}_n$, ove P è una qualunque matrice ortogonale con $\det P = -1$, ad esempio

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotazioni del piano

Sia $\theta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Denotiamo con $R_\theta(\mathbf{x})$ il vettore ottenuto ruotando in senso antiorario il vettore $\mathbf{x}$ attorno all'origine (disegno). L'applicazione $R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto R_\theta(\mathbf{x})$ si dice *rotazione antioraria* di angolo θ.

Teorema *L'applicazione R_θ è una applicazione lineare. La sua matrice standard (= la matrice rispetto alla base standard) è la matrice*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dim. Consideriamo due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (applicati all'origine). Sappiamo che il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è la diagonale del parallelogramma individuato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Applicando R_θ, tutto il parallelogramma viene ruotato e si ottiene il parallelogramma individuato dai vettori $R_\theta(\mathbf{x})$ e $R_\theta(\mathbf{y})$. La diagonale di quest'ultimo parallelogramma è dunque $R_\theta(\mathbf{x}) + R_\theta(\mathbf{y})$. D'altra parte la diagonale del parallelogramma ruotato si ottiene ruotando la diagonale del parallelogramma da cui siamo partiti che è dunque $R_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ (disegno). Segue che

$$R_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = R_\theta(\mathbf{x}) + R_\theta(\mathbf{y}).$$

Con un argomento simile (disegno) si dimostra anche che $R_\theta(a\mathbf{x}) = aR_\theta(\mathbf{x})$, $a \in \mathbb{R}$.
Si verifica poi facilmente (disegno e trigonometria elementare) che

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad R_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

CVD
In particolare (abuso di notazione: useremo la stessa notazione R_θ per denotare anche la sua matrice standard)

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2, \qquad R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_\pi = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}_2, \qquad R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che le colonne di R_θ sono ortonormali o anche che $R_\theta^t R_\theta = \mathbb{1}_2$. Pertanto la matrice R_θ è una matrice ortogonale. D'altra parte è geometricamente è evidente che R_θ conserva le norme. Inoltre è chiaro che

$$R_\theta \circ R_\phi = R_\phi \circ R_\theta = R_{\theta+\phi}.$$

Esplicitando

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

si ottengono le formule di addizione per seno e coseno.

Riflessioni del piano

Sia L una retta del piano $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine, (L è un sottospazio vettoriale di dim. 1 di $\mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{x}$ è un vettore (applicato all'origine), denotiamo con $s_L(\mathbf{x})$ il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ per riflessione rispetto alla retta L (disegno; se la punta di $\mathbf{x}$ è il punto P, tracciare la retta r per P ortogonale ad L; sia Q il piede di r su L; la punta di $s_L(\mathbf{x})$ è il simmetrico di P rispetto a Q su r). Se $L = \langle \mathbf{u} \rangle$ e $L^\perp = \langle \mathbf{v} \rangle$ con $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, si verifica facilmente che $s_L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $s_L(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ e

$$s_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Si verifica facilmente dalla formula (ma si può ripetere pari pari l'argomento geometrico usato per la rotazione) che $s_L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è applicazione lineare. Chiaramente s_L conserva le norme (verificarlo per esercizio dalla formula). La matrice di s_L rispetto alla base (ortonormale) $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio Trovare le matrici standard delle riflessioni rispetto ai due assi coordinati. Trovare la matrice standard di s_L quando L è la retta (per l'origine) di pendenza m.

Trasformazioni ortogonali del piano

Rotazioni e riflessioni sono esempi di *trasformazioni ortogonali* del piano, ovvero trasformazioni *lineari* $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Chiaramente le matrici standard delle trasformazioni ortogonali sono matrici ortogonali e viceversa, se una trasformazione lineare ha matrice standard ortogonale, è una trasformazione ortogonale.

Teorema *Sia $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione ortogonale del piano con matrice standard P.*
(i) Se $\det P = 1$, allora T è una rotazione.
(ii) Se $\det P = -1$, allora T è una riflessione.

Dim. Supponiamo che $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Poiché P è matrice ortogonale, le sue colonne hanno norma 1: $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$. Esistono dunque angoli θ, ϕ tali che $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ e $c = \cos\phi$, $d = \sin\phi$. Poiché le due colonne sono ortogonali, possiamo scegliere θ, ϕ in modo che $\phi = \theta \pm \pi/2$

(disegno).
Primo caso: $\phi = \theta + \pi/2$. Segue

$$\cos\phi = \cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta, \qquad \sin\phi = \sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta, \qquad P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

che è la matrice standard della rotazione R_θ. Inoltre

$$\det P = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$$

Secondo caso: $\phi = \theta - \pi/2$. Segue

$$\cos\phi = \cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta, \qquad \sin\phi = \sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta, \qquad P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Segue che il polinomio caratteristico di P è

$$\det(P - t\mathbb{1}_2) = t^2 - (\operatorname{Tr} P)t + \det P = t^2 - 1 = (t+1)(t-1).$$

Segue che P e quindi T ha autovalori 1 e -1. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono i corrispondenti autovettori, allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Segue che T è la riflessione rispetto alla retta $L = \langle \mathbf{u} \rangle$. Inoltre

$$\det P = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -1.$$

CVD

Osservazione È immediato verificare che

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi nel caso $\det T = -1$, T è lariflessione rispetto all'asse delle ascisse seguita da una rotazione antioraria. Chiaramente (disegno) i vettori che formano angolo $\theta/2$ con $\mathbf{e}_1$ sono uniti. Segue che l'autovettore (normalizzato) relativo all'autovalore 1 è

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Trasformazioni ortogonali in dimensione superiore

Teorema *Gli autovalori di una trasformazione ortogonale sono* ± 1 *oppure coppie di numeri complessi coniugati di modulo* 1.

Dim. Sia P una matrice ortogonale e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore; sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ un autovettore corrispondente: $P\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Coniugando e trasponendo questa uguaglianza, si ottiene, tenuto conto che P è matrice reale, $\overline{\mathbf{v}}^t P^t = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}^t$. Segue

$$\overline{\mathbf{v}}^t \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^t P^t P \mathbf{v} = \overline{\lambda}\lambda \overline{\mathbf{v}}^t \mathbf{v}$$

e quindi $\overline{\lambda}\lambda = |\lambda|^2 = 1$. Segue che $\lambda = \pm 1$ se λ è reale, o $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, se λ non è reale. CVD

Corollario *Se* $n = 3$ *e* $T \in SO_3$, $T \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, *allora* T *è una rotazione attorno ad una retta passante per l'origine.*

Dim. Facciamo vedere che dall'ipotesi che $\det T = 1$ segue che 1 è autovalore di T. Osserviamo che T ha almeno un autovalore reale perché il polinomio caratteristico è un polinomio a coefficienti reali di grado tre che ha quindi una radice reale. Questa radice è 1 o -1. Se tutte le radici sono reali, almeno una deve essere uguale a 1 (perché il loro prodotto è $\det T = 1$ per ipotesi). Se due radici sono complesse coniugate, la terza radice reale non può essere -1: $(a+ib)(a-ib)(-1) = -(a^2+b^2)$ che non può essere uguale ad 1. Quindi 1 è autovalore di T. Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ è il corrispondente autovettore, allora $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Posto $L = \langle \mathbf{u} \rangle$, è $T(L^\perp) = L^\perp$: infatti, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, $0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot T(\mathbf{v})$. Segue che $T(L^\perp) \subset L^\perp$ e quindi, essendo T invertibile, $T(L^\perp) = L^\perp$. Segue che $T_{|L^\perp}$ è una trasformazione ortogonale del piano $L^\perp$. Poiché $\det T_{|L^\perp} = 1$, $T_{|L^\perp}$ è una rotazione. CVD

Esempio La matrice ortogonale

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$. L'autovettore corrispondente all'autovalore 1 è $(1,1,1)$. Quindi P è una rotazione attorno alla retta $L = \langle (1,1,1) \rangle$. La trasformazione ortogonale $P_{|L^\perp}$ del piano $L^\perp$ ha polinomio caratteristico t^2+t+1. Quindi $\det P_{|L^\perp} = 1$ e troviamo conferma che $P_{|L^\perp}$ è una rotazione. Qual è l'angolo di rotazione θ? Deve essere $2\cos\theta = \operatorname{tr} P_{|L^\perp} = -1$ e quindi $\theta = 2\pi/3$.

Isometrie euclidee

Una trasformazione $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice una *isometria*, se

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. A differenza delle trasformazioni ortogonali, qui non supponiamo che T sia un'applicazione lineare. Una isometria conserva le distanze tra punti (qui conviene pensare $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ come punti piuttosto che vettori, consideriamo $\mathbb{R}^n$ come spazio affine). Una trasformazione ortogonale è una isometria: se T è lineare

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Inoltre, ogni isometria che sia anche lineare è una trasformazione ortogonale

$$\|T(\mathbf{x})\| = \|T(\mathbf{x}) - \mathbf{0}\| = \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|$$

Una *traslazione* di vettore $\mathbf{v}$ è l'applicazione $T_{\mathbf{v}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora $T_{\mathbf{v}}$ non è lineare perché $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ($T_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ è lineare). Ma $T_{\mathbf{v}}$ è una isometria:

$$\|T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\| = \|(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - (\mathbf{y} + \mathbf{v})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

È facile verificare che la composizione di isometrie è una isometria (esercizio). Segue che, se T è una trasformazione ortogonale e $T_{\mathbf{v}}$ è una traslazione, allora la composizione $T_{\mathbf{v}} \circ T$ è una isometria. Facciamo ora vedere il fatto notevole che ogni isometria si può rappresentare come composizione di una trasformazione ortogonale seguita da una traslazione.

Teorema *Sia $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometria tale che $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*
(i) $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) $T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
(iii) T è lineare.
(iv) T è una trasformazione ortogonale.
Dim. (i) è facile (esercizio).
(ii) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. È

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|^2 = \|T(\mathbf{x})\|^2 - 2T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) + \|T(\mathbf{y})\|^2, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Il risultato segue subito da $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$.
(iii) Da (i) e (ii) segue

$$\|T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|^2 = \big(T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\big) \cdot \big(T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\big) =$$

$$\|T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 + \|T(\mathbf{x})\|^2 + \|T(\mathbf{y})\|^2 - 2T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot T(\mathbf{x}) - 2T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot T(\mathbf{y}) + 2T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) =$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

(verificare l'ultima uguaglianza). Segue che $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$. Similmente si dimostra che $T(a\mathbf{x}) = aT(\mathbf{x})$, $a \in \mathbb{R}$.
(iv) Segue subito da (iii) e (i). CVD

Sia F una isometria di $\mathbb{R}^n$. Sia $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0}).$$

Allora T è una isometria e $T(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) - F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Segue dal Teorema ora visto che T è una trasformazione ortogonale. Inoltre

$$F(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + F(\mathbf{0})$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Posto $\mathbf{v} = F(\mathbf{0})$, si ottiene

$$F(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{v}} \circ T)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

Poiché una traslazione (non identica) non è un'applicazione lineare, non è rappresentata da una matrice. Ma essendo il calcolo con le matrici molto efficiente, il seguente espediente è molto utile anche se a prima vista sembra una complicazione. L'idea è di rappresentare un punto $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ mediante una colonna $(n+1) \times 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le cui componenti sono dette le *coordinate omogenee* di $\mathbf{x}$. Se P è la matrice della trasformazione ortogonale T, la isometria $T_{\mathbf{v}} \circ T$ è rappresentata dalla matrice (qui scritta a blocchi)

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & P \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} + P\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Questo formalismo trova la sua naturale collocazione nel contesto della *geometria proiettiva*.