Volumi in spazi euclidei

12 dicembre 2014

1 Definizioni

In uno spazio euclideo reale V di dimensione n, siano dati $k \le n$ vettori linearmente indipendenti e sia $\Pi := \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ il parallelepipedo generato dai k vettori. Sia $W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ il sottospazio di V generato da $v_1, \ldots, v_k$; allora anche W è uno spazio euclideo e per il teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, ammette una base ortonormale $(e_1, \ldots, e_k)$. Definiamo il *volume* (k-dimensionale) di Π come

$$\operatorname{vol} \Pi = |\det Q| \,, \tag{1.0.1}$$

ove Q è la matrice di passaggio da $(v_1, \ldots, v_k)$ alla base ortonormale $(e_1, \ldots, e_k)$, cioè se

$$(v_1, \ldots, v_k) = (e_1, \ldots, e_k) Q \,.$$

È chiaro che questa definizione non dipende dalla scelta della base ortonormale $(e_1, \ldots, e_k)$ (due tali basi sono legate da una isometria, che ha determinante 1). Inoltre, se Π è prodotto cartesiano di due parallelepipedi ortogonali Π_1 e Π_2, uno da pensare come "base" e uno come "altezza", vale la formula

$$\operatorname{vol} \Pi = \operatorname{vol} \Pi_1 \times \operatorname{vol} \Pi_2 \,. \tag{1.0.2}$$

Diciamolo bene ! Se $(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (u_1, u_2, \ldots, u_b, w_1, w_2, \ldots, w_h)$, ove $u_i \cdot w_j = 0$, $\forall i = 1, \ldots, b$ e $\forall j = 1, \ldots, h$, possiamo dire che i due parallelepipedi $\Pi_1 := \Pi(u_1, u_2, \ldots, u_b)$ e $\Pi_2 := \Pi(w_1, w_2, \ldots, w_h)$ sono *ortogonali*. In modo naturale $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$. La formula (1.0.2) viene dal fatto che, se $(u_1, u_2, \ldots, u_b) = (e'_1, \ldots, e'_b)Q_1$, con $(e'_1, \ldots, e'_b)$ ortonormale e se $(w_1, w_2, \ldots, w_h) = (e''_1, \ldots, e''_h)Q_2$, con $(e''_1, \ldots, e''_h)$ ortonormale, è $(e_1, \ldots, e_k) = (e'_1, \ldots, e'_b, e''_1, \ldots, e''_h)$ ortonormale e la matrice Q tale che $(v_1, \ldots, v_k) = (e_1, \ldots, e_k)Q$, è fatta a blocchi diagonali:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \,,$$

cosicché $\det Q = \det Q_1 \ \det Q_2$.

Spesso, negli esercizi, il problema è piuttosto quello di "calcolare l'altezza del parallelepipedo $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ sulla sua *base* $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$". La lunghezza del vettore v_k non è necessariamente tale altezza, a meno che v_k non sia $\perp$ a $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. Nel caso generale, si dovrebbe decomporre v_k come $v_k = w + \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i$, ove $w \perp v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. L'altezza cercata è $h = |w|$. Per evitare di fare questa faticosa decomposizione, si può osservare che il volume di $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ coincide con quello di $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w)$, per le regole di calcolo del determinante. Per la formula (1.0.2) si ha

$$\operatorname{vol} \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k) = \operatorname{vol} \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w) = \operatorname{vol} \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \times |w| \,.$$

Dunque *l'altezza* h *di* $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ *su* $\Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ *vale*

$$h = \operatorname{vol} \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k) / \operatorname{vol} \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \,.$$

Questa formula è molto usata negli esercizi per calcolare distanze.

2 Richiami della teoria

Cominciamo con una osservazione sul capitolo 5 del libro di testo. Il modo più rapido per calcolare un area, un volume, o un k-volume, è descritto nella Proposizione 5.5.12. Infatti, possiamo leggere quella proposizione nel senso che, dati k vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_k$ di uno spazio vettoriale euclideo $(V, \cdot)$, di qualunque dimensione n, il quadrato del volume del parallelepipedo $\Pi := \Pi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ generato dai k vettori, è dato dal determinante della loro *matrice di Gram-Schmidt*

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_k \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \ldots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \ldots & v_2 \cdot v_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \ldots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} , \tag{2.0.3}$$

cioè

$$(\mathrm{vol}\,\Pi)^2 = \det \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) \; . \tag{2.0.4}$$

Si noti che la matrice di Gram-Schmidt $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ è simmetrica. Inoltre, il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ci dice che esiste una matrice invertibile $k \times k$, $P \in Gl(k, \mathbb{R})$ tale che i k vettori $(w_1, w_2, \ldots, w_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)P$, siano ortonormali. (Il teorema veramente ci dice anche che si può scegliere P triangolare superiore, cioè con tutti i termini al di sotto della diagonale principale nulli.) Allora, se Q è l'inversa di P, si ha

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)^t \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_k) = ((w_1, w_2, \ldots, w_k)Q)^t \cdot ((w_1, w_2, \ldots, w_k)Q) =$$

$$(Q^t (w_1, w_2, \ldots, w_k)^t) \cdot ((w_1, w_2, \ldots, w_k)Q) = Q^t ((w_1, w_2, \ldots, w_k)^t \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_k))Q = Q^t Q \; ,$$

dato che $(w_1, w_2, \ldots, w_k)^t \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_k) = I_k$, perché $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ è ortonormale. Ne segue in particolare che il determinante di $\det \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (\det Q)^2 > 0$, il che rende la formula (2.0.4) plausibile. Mostriamo che questa formula coincide, nel caso $k = n$, cioè in cui il parallelepipedo ha dimensione massima, con la definizione di volume che abbiamo dato all'origine (1.0.1). Infatti si ha in tal caso

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = Q^t Q \; ,$$

e quindi

$$(\det Q)^2 = \det \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) \Rightarrow \text{la formula (2.0.4) è corretta} \; .$$

Quando scriviamo $\mathrm{vol}\,\Pi$ *intendiamo sempre un numero* ≥ 0.

3 Il caso $k = 2$, $n = 3$

Siano u e v due vettori di $\mathbb{R}^3$ vettoriale euclideo. In quanti modi sappiamo calcolare il 2-volume, cioè l'area, $A = \mathrm{vol}\,\Pi(u, v)$?

1. $A = ||u \times v||$,
2. A= base $\times$ altezza $= ||u||\,||v|| \sin\theta$, ove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra u e v,
3. $$A^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = u \cdot u \; v \cdot v - (u \cdot v)^2 \; .$$

Il fatto che 2 e 3 coincidano è chiaro perché

$$u \cdot u \; v \cdot v - (u \cdot v)^2 = ||u||^2 \, ||v||^2 (1 - \cos^2\theta) = ||u||^2 \, ||v||^2 \sin\theta \; .$$

Invece il fatto che 1 e 3 coincidano lo è meno. Per convincersene o si fa il calcolo in coordinate ortonormali ($u = (u_x, u_y, u_z)$, e cosí via), oppure si fa' il ragionamento che segue.
Per ogni vettore $w \in \mathbb{R}^3$, sappiamo che il volume

$$\mathrm{vol}\,\Pi(u, v, w) = \pm\, w \cdot (u \times v) = \pm \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \; .$$

Questo lo abbiamo visto per l'unicità della forma 3-lineare alternante che vale 1 su (e_1, e_2, e_3) o, se volete, perché era la nostra definizione originaria di "volume" (prendendo il valore assoluto del determinante). Ne segue che

$$\mathrm{vol}\,\Pi(u, v, w) = ||w||\,||u \times v|| \cos\eta \ ,$$

ove η è l'angolo tra w e $u \times v$. Dunque $\theta = \pi/2 - \eta$ è l'angolo tra w e il piano $\langle u, v\rangle$. Poiché $\cos\eta = \sin\theta$, ne concludiamo che nella formula precedente $||w|| \cos\eta = ||w|| \sin\theta$ è l'altezza del parallelepipedo $\Pi(w, u, v)$ sul piano $\langle u, v\rangle$ e dunque che $||u \times v||$ è l'area di base.

4 Esempi e esercizi

1. Siano $u = (1, -1, 2)$ e $v = (0, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$, vettoriale euclideo standard e sia A l'area del parallelogramma $\Pi(u, v)$. Si ha

$$u \times v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -6\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k} \ .$$

Allora

$$A^2 = || - 6\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}||^2 = 44 \ .$$

D'altra parte

$$\det\Gamma(u, v) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 44 \ .$$

2. Siano adesso $u = (0, 1, 2, -1)$ e $v = (1, 2, -1, 2)$ vettori in $\mathbb{R}^4$ vettoriale euclideo standard e sia A l'area del parallelogramma $\Pi(u, v)$. Si ha ancora

$$A^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 56 \ .$$

Sia $w = (0, 1, 1, 0)$ un altro vettore. Calcoliamo il volume di $\Pi(u, v, w)$.

$$(\mathrm{vol}\,\Pi(u, v, w))^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ u \cdot v & v \cdot v & v \cdot w \\ u \cdot w & v \cdot w & w \cdot w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \ .$$

3. Adesso controlliamo i risultati con il metodo volume = base $\times$ altezza. Decomponiamo w in $w = w' + w''$, ove $w' \in \langle u, v\rangle$ e $w'' \perp \langle u, v\rangle$. Si deve avere $w' = \lambda u + \mu v$, per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $w'' = w - w'$. La condizione $w'' \cdot u = w'' \cdot v = 0$ determina λ, μ. Infatti

$$(w - \lambda u - \mu v) \cdot u = 0 \ \ , \ \ (w - \lambda u - \mu v) \cdot v = 0 \ ,$$

da il sistema

$$\begin{cases} w \cdot u & - & \lambda & u \cdot u & - & \mu & u \cdot v & = & 0 \\ w \cdot v & - & \lambda & u \cdot v & - & \mu & v \cdot v & = & 0 \end{cases} ,$$

e cioè

$$\begin{cases} 3 & - & 6 & \lambda & + & 2 & \mu & = & 0 \\ 1 & + & 2 & \lambda & - & 10 & \mu & = & 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} 6 & - & & & 28 & \mu & = & 0 \\ 1 & + & 2 & \lambda & - & 10 & \mu & = & 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} & & \mu & = & 3/14 \\ 1 & + & 2\lambda & = & 30/14 \end{cases}$$

Quindi $\lambda = 4/7$ e $\mu = 3/14$. Poi

$$w'' = w - \frac{4}{7}u - \frac{3}{14}v = (0, 1, 1, 0) - (0, 4/7, 8/7, -4/7) - (3/14, 3/7, -4/14, 3/7) = (-3/14, 0, 1/14, 1/7) \ .$$

Pertanto l'altezza h di $\Pi(u,v,w)$ sul piano $\langle u,v\rangle$ soddisfa

$$h^2 = ||w''||^2 = \frac{9+1+4}{198} = 1/14 \,.$$

Dunque se A indica l'area di base $\mathrm{vol}(u,v)$, calcolata sopra e cioè $A^2 = 56$, si ha

$$A^2 \times h^2 = (\mathrm{vol}\,\Pi(u,v,w))^2 \quad , \quad 56 \times 1/14 = 4 \,.$$

Insomma, dovremmo essere convinti che il volume di $\Pi(u,v,w)$ vale 2.

5 Il caso $k = n-1$

Il prodotto vettore che conosciamo in $\mathbb{R}^3$ euclideo esiste anche in $\mathbb{R}^n$ euclideo. Però non è una "operazione" come quelle che conosciamo tipo la somma, che a due vettori fanno corrispondere un vettore. È invece una operazione che a $n-1$ vettori $v_1,\ldots,v_{n-1}$ fa corrispondere un vettore $w = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$ in modo $(n-1)$-lineare. Precisamente, se si hanno gli $n-1$ vettori $v_1,\ldots,v_{n-1}$ e se $v_i = a_{i,1}e_1 + \cdots + a_{i,n}e_n$, rispetto a una base ortonormale $e_1,\ldots,e_n$, si scrive formalmente il determinante

$$v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \,,$$

che è l'analoga della

$$u \times v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \,.$$

Poi si nota che questo vettore $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$ è $n-1$-lineare alternante e ha la proprietà che, per ogni vettore $u = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$, il volume $\mathrm{vol}\,\Pi(u,v_1,\ldots,v_{n-1})$, a meno del segno, è $u\cdot(v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1})$, perché questo non è altro che il determinante

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \,,$$

che era proprio la nostra definizione originaria di volume per un parallelepipedo di dimensione n in un n-spazio euclideo. Si noti che il vettore $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$ è perpendicolare al sottospazio $\langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle$, come si vede perchè

$$v_i \cdot (v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \,,$$

perché è il determinante di una matrice con due righe uguali. Quanto vale la lunghezza di $w = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$? Nel caso $n = 3$ era l'area del parallelogramma generato da v_1 e v_2 (a meno del segno). Nel caso generale è ancora

$$||v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}|| = \mathrm{vol}\,\Pi(v_1,\ldots,v_{n-1}) \,.$$

Difatti, $||w|| = h$ è l'altezza del parallelepipedo $\Pi(w,v_1,\ldots,v_{n-1}))$ sull'iperpiano $\langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle$, e vale sempre la formula "base $\times$ altezza" e cioè

$$\mathrm{vol}\,\Pi(w,v_1,\ldots,v_{n-1}) = ||w|| \times \mathrm{vol}\,\Pi(v_1,\ldots,v_{n-1}) \,.$$

Ma se $(b_1, \dots, b_n)$ sono le componenti di w rispetto a $e_1, \dots, e_n$, è

$$(\mathrm{vol}\,\Pi(w, v_1, \dots, v_{n-1}))^2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = w\cdot w = ||w||\times||w|| = ||w||\times \mathrm{vol}\,\Pi(v_1, \dots, v_{n-1}) \ .$$

Dunque effettivamente

$$||w|| = ||v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1}|| = \mathrm{vol}\,\Pi(v_1, \dots, v_{n-1}) \ .$$

6 Ancora sull'esempio 3.3

Allora abbiamo un altro modo di calcolare $\mathrm{vol}\,\Pi(u, v, w)$ nell'esempio 3 della sezione 3. Si avevano $u = (0, 1, 2, -1)$, $v = (1, 2, -1, 2)$, e $w = (0, 1, 1, 0)$ vettori in $\mathbb{R}^4$. Possiamo calcolare

$$u \times v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} e_4 =$$

$$-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \ .$$

Ne deduciamo che il volume di $\Pi(u, v, w)$ vale $|| - e_1 + e_2 - e_3 + e_4|| = 2$. Attenzione però, quest'ultimo metodo si applica solo per determinare un $n - 1$-volume in uno spazio di dimensione n.

7 Esempio

1. Calcolare la distanza $d(r, \pi)$ di una retta r e un piano π sghembi nello spazio affine euclideo standard $\mathbb{R}^4$. Mostrare che esiste una unica retta congiungente un punto $P_0 \in r$ con un punto $Q_0 \in \pi$ e che $d(r, \pi) = ||Q_0 - P_0||$.

   Prendiamo $r = (0, 0, 1, 2) + \langle u = (1, 1, 1, 0)\rangle$ e $\pi = (1, 1, 1, 1) + \langle v = (0, 1, 0, 1), w = (-2, 2, 0, 0)\rangle$. Effettivamente, sono varietà sghembe perché

$$\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = 6 \ .$$

   Inoltre 8 è il volume $\mathrm{vol}\,\Pi(Q - P, u, v, w)$. Allora la distanza è l'altezza del parallelepipedo $\Pi(Q - P, u, v, w)$ sul 3-spazio $\langle u, v, w\rangle$. Dunque

$$d(r, \pi) = \frac{\mathrm{vol}\,\Pi(Q - P, u, v, w)}{\mathrm{vol}\,\Pi(u, v, w)} \ .$$

   Calcoliamo anche il volume di $\Pi(u, v, w)$. È un 3-volume in $\mathbb{R}^4$ e dunque possiamo usare il prodotto esterno $u \times v \times w$. Si ha

$$u \times v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} e_4 =$$

$$2e_1 + 2e_2 - 4e_3 - 2e_4 \ .$$

Dunque $\operatorname{vol}\Pi(u,v,w) = ||2e_1 + 2e_2 - 4e_3 - 2e_4|| = 2\sqrt{7}$. Finalmente

$$d(r,\pi) = \frac{6}{2\sqrt{7}} = 3/\sqrt{7}\ .$$

È consigliabile risolvere anche il resto dell'esercizio e di controllare che anche $||Q_0 - P_0|| = 2\sqrt{7}$. Naturalmente, si poteva invece utilizzare la formula (2.0.4) per risolvere l'esercizio. Oppure si poteva semplicemente svolgere solo la seconda parte, e trovare appunto la distanza come $||Q_0 - P_0||$. L'esercizio potrebbe risultare un po' poiù lungo se invece di dare le sottovarietà in forma parametrica se ne dessero le equazioni cartesiane.

2. Dello stesso tipo dell'esercizio precedente è il seguente. Calcolare la distanza $d(\pi,\sigma)$ tra due piani π e σ sghembi nello spazio affine euclideo standard $\mathbb{R}^5$. Mostrare che esiste una unica retta congiungente un punto $P_0 \in \pi$ con un punto $Q_0 \in \sigma$ e che $d(\pi,\sigma) = ||Q - P||$.

Provate voi stessi a scegliere dei valori espliciti da dare alle coordinate dei vettori e a risolvere l'esercizio. Conviene prendere numeri interi, piccoli, e spesso =0.