Esercizio Distanze

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^4$, consideriamo i due piani

$$\pi : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} , \quad \sigma : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} .$$

1. Scrivere π e σ in forma parametrica

$$\pi = P + U \quad , \quad \sigma = Q + W$$

Risposta: Si può prendere $P(1,1,-1,2) \in \pi$, $U = \langle (1,1,0,0),(0,1,-1,2) \rangle$ e $Q(1,1,2,-1) \in \sigma$, $W = \langle (1,1,0,0),(1,0,0,1) \rangle$.

2. Determinare la posizione reciproca di π e σ.

Risposta. Non sono né incidenti, né paralleli, né sghembi. Gli spazi direttori si intersecano in $\langle (1,1,0,0) \rangle = U \cap W$.

Calcolare la distanza $d(\pi, \sigma)$, utilizzando la formula volume = base $\times$ altezza.

Risposta. Si calcola il volume di

$$\Pi := \Pi((1,1,0,0),(0,1,-1,2),(1,0,0,1),PQ) ,$$

ove

$$\Pi_1 := \Pi((1,1,0,0),(0,1,-1,2),(1,0,0,1)) ,$$

è un parallelepipedo 3-dimensionale che sta nello spazio euclideo $U + W$. *Prendiamo* Π_1 *come base di* Π. Allora l'altezza è la distanza $d(\pi, \sigma)$. Quindi

$$d(\pi, \sigma) = \mathrm{vol}\,\Pi / \mathrm{Vol}\,\Pi_1 .$$

Ora $PQ = (0,0,3,-3)$. Il volume di Π si calcola semplicemente come un determinante, perchè è di dimensione massima:

$$\mathrm{vol}\,\Pi = | \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} | = 6 .$$

Invece il volume di Π_1 si può calcolare come il modulo del prodotto esterno di $n-1$ vettori in $\mathbb{R}^n$ (qui di 3 vettori in $\mathbb{R}^4$). Si fa cosí

$$(1,1,0,0) \times (0,1,-1,2) \times (1,0,0,1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,1,3,-1) .$$

Quindi $\mathrm{Vol}\,\Pi_1 = \sqrt{12}$. E finalmente $d(\pi, \sigma) = \sqrt{3}$.

3. Trovare punti $P_0 \in \pi$ e $Q_0 \in \sigma$ tali che $P_0Q_0 \perp \pi$ e $\perp \sigma$. Verificare che allora $d(P_0, Q_0) = 2\sqrt{3}$.

Risposta. Si trova per esempio $P_0 = (2,1/2,1/2,-1)$ e $Q_0 = (3/2,1,2,-1/2)$. Quindi $P_0Q_0 = (-1/2,1/2,3/2,1/2)$ e $|P_0Q_0| = \sqrt{3}$.

La coppia di punti (P_0, Q_0) è ben determinata?
Risposta. No. La si può sostituire con (P_λ, Q_λ), per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. ove $P_\lambda := P_0 + \lambda(1,1,0,0)$ e $Q_\lambda := Q_0 + \lambda(1,1,0,0)$.