Esercizio Jordan

Questo esercizio è un più difficile di quello che vi capiterà nei compiti. Vorrei però che lo capiste e che imparaste la strategia per risolverlo. Come al solito è basato sul fatto che conosciamo l'enunciato generale del Teorema di Jordan, anche se non ne abbiamo esaminato la dimostrazione in generale! Come vedrete, ho scelto una matrice "difficile", perché ha 1 solo autovalore e cioè 2, con molteplicità 5 ma nullità solo 2. Quindi ci sono solo 2 autovettori indipendenti, mentre gli altri 3 sono "autovettori generalizzati".

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & 3/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(X) = (X-2)^5$. (Credeteci senza perdere tempo a calcolarlo!).

1. Determinare le dimensioni di $\ker(A-2I_5)^j$, per $j = 1, 2, 3$.

   Risposta

$$A - 2I_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Si nota che la somma delle prime 3 colonne vale 0. Dunque il rango di $A-2I_5$ coincide con il rango della sottomatrice ottenuta togliendo prima colonna e ultima riga e cioè di

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ o di } \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

   Questa ha rango 3 perché

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0 .$$

   Ora consideriamo

$$(A-2I_5)^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Il rango di $(A-2I_5)^2$ è 1 perchè le colonne non nulle sono proporzionali. Infine

$$(A-2I_5)^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Quindi $\dim\ker(A-2I_5) = 2$, $\dim\ker(A-2I_5)^2 = 4$, $\dim\ker(A-2I_5)^3 = 5$.

2. Determinare la forma canonica di Jordan J di A.

   Risposta. Sappiamo dall'enunciato generale che la forma canonica di Jordan è una matrice con la diagonale principale formata di tutti 2. Poi ci sono alcuni 1 sopra la diagonale principale, e tutti gli altri elementi sono 0. Perché si verifichi la condizione sulle dimensioni dei vari $\ker(A-2I_5)^i$, si ha necessariamente

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

3. Determinare una matrice $P \in GL(5,\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = J$.

   Risposta. Si deve avere $AP = PJ$. Quindi se le colonne di P sono viste come vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$ e se $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è l'endomorfismo associato ad A (cioè $\underline{X} \mapsto A\underline{X}$ su $\underline{X} \in \mathbb{R}^5$), si ha, utilizzando le nostre solite notazioni "compatte",

$$f(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (2v_1, 2v_2+v_1, 2v_3+v_2, 2v_4, 2v_5+v_4) \ ,$$

   quindi

$$f(v_1) = 2v_1 \ , \ f(v_2) = 2v_2 + v_1 \ , \ f(v_3) = 2v_3 + v_2 \quad , \quad f(v_4) = 2v_4 \ , \ f(v_5) = 2v_5 + v_4 \quad .$$

   Adesso si tratta di determinare dei v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 che formino una base e soddisfino a quelle condizioni. La teoria generale ci dice che esistono! Direi che conviene prendere un $v = v_3$ per primo, che *non* stia in $\ker(A-2I_5)^2$. Questo è possibile, perché $\ker(A-2I_5)^2$ ha dimensione 4. Guardando sopra la matrice $(A-2I_5)^2$ vediamo che possiamo prendere per esempio $v_3 = (0,1,0,0,0)$ (in colonna, naturalmente). Io invece prendo

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   che tanto va bene lo stesso (perchè ho preparato l'esercizio facendo i conti alla rovescia....). Questa sarà allora la terza colonna della matrice cercata P.

   Poi si prende $v_2 = (f-2)v_1$ e $v_1 = (f-2)v_2$. Cioè

$$v_2 = (A-2I_5)v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$v_1 = (A-2I_5)v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Siccome $\ker(f-2)^3 = \mathbb{R}^5$, sicuramente $v_2 \in \ker(f-2)^2$ e $v_1 \in \ker(f-2)$.

Adesso per completare la base ci mancano v_4 e v_5. Possiamo per esempio prendere come $v_4 \in \ker(f-2)$, un qualunque vettore di $\ker(f-2)$ non proporzionale a v_1. Poi scegliamo come v_5 un qualunque vettore soluzione di $(f-2)v - v_4$. Dunque prendiamo (sempre per come ho preparato l'esercizio!)

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che soddisfa a
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ma non è proporzionale a
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e risolviamo

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Troviamo per esempio

$$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, giustapponendo le 5 colonne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 si trova la matrice di passaggio P

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 3 & -1 & -2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Difatti,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dà

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1 & -1 & 2 \\ -3/2 & 3/2 & 2 & 3 & -3 \\ -3/2 & -1/2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$