CONICHE

**Equazioni canoniche**

**Ellisse**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b\neq 0 \quad \text{sono detti } \textbf{semiassi}.$$

**Iperbole**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b\neq 0 \quad \text{sono detti } \textbf{semiassi}.$$

**Parabola**

$$x^2+py=0, \qquad p\neq 0.$$

Ellissi ed iperboli sono dette anche **coniche a centro**. Il **centro** è l'origine degli assi coordinati ed è centro di simmetria. Gli assi coordinati sono detti gli **assi** della conica e sono assi di simmetria. La parabola è simmetrica rispetto all'asse $y$ detto **asse**. Il **vertice** della parabola è l'origine degli assi coordinati, intersezione della parabola con l'asse.

**Coniche degeneri**

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$, la conica si riduce al punto $(0,0)$, unica soluzione dell'equazione;
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, l'equazione non ha soluzioni, la conica si riduce all'insieme vuoto;
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$, la conica è una coppia di rette incidenti, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ e $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$;
- $x^2=h^2$, $h\neq 0$, la conica è una coppia di rette parallele, $x=h$ e $x=-h$;
- $x^2=0$, la conica è la retta $x=0$ (contata due volte);
- $x^2=-h^2$, $h\neq 0$, anche in questo caso l'equazione non ha soluzioni, la conica si riduce all'insieme vuoto.

Traslando e ruotando gli assi, l'equazione di una conica ha la forma

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey=f, \qquad a,b,c \quad \text{non tutti nulli}$$

un'equazione polinomiale di secondo grado nelle variabili $x,y$. Il termine $ax^2+2bxy+cy^2$ si dice il **termine quadratico**, $dx+ey$ si dice il **termine lineare** ed $f$ si dice il **termine noto** dell'equazione.

**Riduzione dell'equazione di una conica a forma canonica.**

Partiamo da una conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$(1) \qquad ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2=f, \qquad a,b,c \quad \text{non tutti nulli}$$

Chiamiamo

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata al termine quadratico

$$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=\begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

**I passo**: calcolare gli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ (ricordo che sono due numeri reali) di $A$. Abbiamo tre possibilità

1. $\lambda_1\lambda_2=\det A>0$, gli autovalori hanno lo stesso segno,
2. $\lambda_1\lambda_2=\det A<0$, gli autovalori di $A$ hanno segno opposto,
3. $\lambda_1\neq 0$ e $\lambda_2=0$ (quindi $\det A=0$).

(Gli autovalori non possono essere entrambi nulli, perché in questo caso si dovrebbe avere $A = \mathbb{0}$ contro l'ipotesi che $a, b, c$ non siano tutti nulli.)
Se $\mathcal{C}$ non è degenere: nel primo caso è una ellisse, nel secondo caso è una iperbole, nel terzo caso è una parabola. Per stabilire se la conica è o non è degenere bisogna arrivare alla fine del percorso.

**II passo**: calcolare una base ortonormale di autovettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v_2}$ di $A$

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = 1, \qquad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

Scegliamo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v_2}$ in modo che la base ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2})$ abbia lo stesso orientamento della base standard $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. I versori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ danno le direzioni degli assi di $\mathcal{C}$.
Chiamiamo $P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ la matrice ortogonale che ha come colonne i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Segue che $\det P = 1$ (quindi $P$ è una rotazione degli assi) e

$$P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Il termine lineare diventa

$$dx_1 + ex_2 = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Dy_1 + Ey_2$$

ove

$$\begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P$$

Quindi l'equazione (1) diventa

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + Dy_1 + Ey_2 = f. \tag{2}$$

**III passo** Completamento dei quadrati.
Caso $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.
Completando i quadrati l'equazione (2) diventa

$$\lambda_1 (y_1 - C_1)^2 + \lambda_2 (y_2 - C_2)^2 = F \tag{3}$$

ove $C_1 = -D/2\lambda_1$, $C_2 = -E/2\lambda_2$, $F = f + \lambda_1 C_1^2 + \lambda_2 C_2^2$. Se la conica $\mathcal{C}$ è non degenere, allora è una conica a centro e $(C_1, C_2)$ sono le coordinate $y_1, y_2$ del centro di $\mathcal{C}$. Le coordinate $x_1, x_2$ del centro sono

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Gli assi di $\mathcal{C}$ sono le rette $C + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, $C + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$.
Caso $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.
Completando il quadrato l'equazione diventa

$$\lambda_1 (y_1 - C_1)^2 + Ey_2 = F$$

ove $C_1 = -D/2\lambda_1$. La conica è non degenere se e solo se $E \neq 0$ e in tal caso l'equazione diventa

$$\lambda_1 (y_1 - C_1)^2 + E(y_2 - C_2) = 0 \tag{4}$$

ove $C_2 = F/E$. Il punto $V = (C_1, C_2)$ è il vertice della parabola in coordinate $y_1, y_2$ e le coordinate $x_1, x_2$ si trovano come prima. L'asse della parabola è la retta $V + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$.

**IV passo** Equazioni canoniche.
Poniamo

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - C_1 \\ z_2 &= y_2 - C_2 \end{aligned}$$

Caso $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.
L'equazione (3) diventa

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = F.$$

Se $F = 0$, la conica è degenere. Altrimenti possiamo dividere per $F$ ottenendo

$$\frac{z_1^2}{F/\lambda_1} + \frac{z_2^2}{F/\lambda_2} = 1.$$

Se $F/\lambda_1$ e $F/\lambda_2$ sono entrambi $> 0$, abbiamo una ellisse di semiassi $\sqrt{F/\lambda_1}$ e $\sqrt{F/\lambda_2}$; se sono entrambi negativi la conica è degenere. Se $F/\lambda_1$ e $F/\lambda_2$ hanno segni opposti, abbiamo una iperbole di semiassi $\sqrt{|F/\lambda_1|}$ e $\sqrt{|F/\lambda_2|}$.

Caso $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.
L'equazione (4) diventa

$$\lambda_1 z_1^2 + E z_2 = 0, \qquad z_1^2 + p z_2 = 0, \quad p = \frac{E}{\lambda_1}.$$

**Esempi**

- Classificare e trovare l'equazione canonica della conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1 - 2x_2 = 2.$$

**Soluzione** La matrice associata al termine quadratico è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $\det A = -3$. Segue che $\mathcal{C}$ o è degenere o è un'iperbole e quindi a centro.
Gli autovalori di $A$ sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. I relativi autovettori normalizzati sono

$$\mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice che diagonalizza $A$ è

$$P = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \end{cases}.$$

Il termine lineare diventa

$$4x_1 - 2x_2 = \tfrac{4}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) - \tfrac{2}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) = \sqrt{2} y_1 - 3\sqrt{2} y_2.$$

L'equazione della conica diventa

$$3y_1^2 - y_2^2 + \sqrt{2} y_1 - 3\sqrt{2} y_2 = 2.$$

Completando i quadrati si ricava

$$3\big(y_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{6}\big)^2 - \tfrac{1}{6} - \big(y_2 + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\big)^2 + \tfrac{9}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3\big(y_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{6}\big)^2 - \big(y_2 + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\big)^2 = -\tfrac{7}{3}.$$

Segue che la conica $\mathcal{C}$ è non degenere e quindi una iperbole.
Le coordinate $y_1, y_2$ del centro sono $\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{3}{\sqrt{2}}\big)$ e quindi il centro ha coordinate

$$x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{6} + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\big) = \tfrac{4}{3}, \quad x_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{6} - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\big) = -\tfrac{5}{3}.$$

Posto
$$z_1 = y_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{6}, \quad z_2 = y_2 + \tfrac{3\sqrt{2}}{2},$$
l'equazione della conica diventa
$$3z_1^2 - z_2^2 = -\tfrac{7}{3}, \quad \Rightarrow \quad -\frac{z_1^2}{7/9} + \frac{z_2^2}{7/3} = 1$$
e quindi i semiassi dell'iperbole sono $\sqrt{7}/3$ e $\sqrt{7/3}$.

• Classificare e trovare l'equazione canonica della conica $\mathcal{C}$ di equazione
$$4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 + 4x_2 + \tfrac{2}{5} = 0.$$

**Soluzione** La matrice della parte quadratica dell'equazione di $\mathcal{C}$ è
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
che ha determinante nullo. Segue che $\mathcal{C}$ o è degenere o è una parabola.
Il polinomio caratteristico di $A$ è
$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 5).$$
Segue che gli autovalori di $A$ sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$. I relativi autovettori normalizzati sono
$$\mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
Segue che la matrice cercata è
$$P = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Notare che $\det P = 1$ come richiesto. (Fosse stato $\det P = -1$, avremmo dovuto cambiare il segno di uno dei due autovettori.)
Ponendo
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2). \end{cases}$$
e sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$ si ottiene
$$5y_1^2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \tfrac{4}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) + \tfrac{2}{5} = 5y_1^2 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \tfrac{9}{\sqrt{5}}y_2 + \tfrac{2}{5} = 0.$$
Completando i quadrati l'equazione diventa
$$5\Big(y_1 - \tfrac{1}{5\sqrt{5}}\Big)^2 + \tfrac{9}{\sqrt{5}}\Big(y_2 + \tfrac{1}{5\sqrt{5}}\Big) = 0.$$
Posto $z_1 = y_1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}, z_2 = y_2 + \frac{1}{5\sqrt{5}}$, l'equazione diventa $5z_1^2 + \frac{9}{\sqrt{5}}z_2 = 0$ e quindi $\mathcal{C}$ è una parabola non degenere.
L'asse della parabola è la retta di equazione $z_1 = 0$, $y_1 = \frac{1}{5\sqrt{5}}$. Da
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
si ricava $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - x_2)$. Segue che l'asse ha equazione $2x_1 - x_2 = \frac{1}{5}$.
Le $(y_1, y_2)-$coordinate del vertice sono $\frac{1}{5\sqrt{5}}(1, -1)$ e quindi $(x_1, x_2)-$coordinate
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$