II compitino di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
22 gennaio 2015

Compilare la prima tabella qui sotto ove AB è la parte finale del proprio numero di matricola. Si calcoli $a = \lceil \frac{A+B}{4} \rceil$ e $b = 5 - a$. (Ricordo che $\lceil x \rceil$ è il massimo intero $n \leq x$.) Sostituire il vostro valore di $(a; b)$ nelle domande del testo.

Cognome	Nome	Matricola	$(a; b)$	Voto 1^o Comp.

Es.1 (9 pt)	Es.2 (8 pt)	Es.3 (9 pt)	Es.4 (7 pt)	Tot. (33 pt)	Orale (± 3)	Voto Finale

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^4$ con coordinate ortonormali (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\pi : \begin{cases} bx_1 + ax_2 = b \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} bx_3 + ax_4 = a \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. (3 pt.) π e σ sono incidenti, sghembi o altro ?

   Risposta: né l'una né l'altra. Difatti la matrice "incompleta" del sistema dei due piani e cioè

$$A = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   ha rango 3, mentre la matrice "completa"

$$B = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ha rango 4. Precisamente, i minori di ordine 4 di B (presi con segno, giusto per abitudine), sono, nell'ordine

$$(-a^2 + ab = -a(a-b), ab - b^2 = b(a-b), -a(a-b), b(a-b), 0)$$

   e questi non possono essere tutti nulli, a meno che non sia $a = b$.

2. (3 pt.) Si considerino i punti $P(1,0,1,0) \in \pi$ e $Q(0,1,0,1) \in \sigma$. Determinare una retta $r \subset \pi$ per P e una retta $s \subset \sigma$ per Q tali che $r \parallel s$. Le r e s sono uniche ?

   Risposta: Si risolve il sistema omogeneo $A\underline{X} = \underline{0}$ trovando lo spazio delle soluzioni $\langle v \rangle$, con $v = (a,-b,a,-b)$ (trasposto, ovviamente). Quindi $\langle v \rangle$ è l'intersezione degli spazi direttori di π e σ. Allora le rette cercate sono uniche e sono $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle v \rangle$.

3. (3 pt.) Si consideri il punto $P(1,0,1,0) \in \pi$. Determinare il punto di σ avente minima distanza da P e tale distanza.

   Risposta: Prendiamo un punto qualunque di σ, per esempio $Q(0,1,0,1)$. Consideriamo una base dello spazio direttore W di σ, per esempio $W = \langle (1,0,0,0), (0,-b,a,-b) \rangle$. Consideriamo il punto

$$X = X(\lambda,\mu) = Q(0,1,0,1) + (\lambda, -b\mu, a\mu, -b\mu) \in \sigma$$

   e imponiamo la condizione che $PX \perp \sigma$. Questa dà (ricordiamo che $PQ = (-1,1,-1,1)$)

$$(\lambda - 1, 1 - b\mu, -1 + a\mu, 1 - b\mu) \cdot (1,0,0,0) = \lambda - 1 = 0 \ ,$$

   e

$$(\lambda - 1, 1 - b\mu, -1 + a\mu, 1 - b\mu) \cdot (0,-b,a,-b) = (2b^2 + a^2)\mu - (2b + a) = 0 \ .$$

   Quindi

$$\lambda = 1 \ \text{ e } \ \mu = \frac{2b + a}{2b^2 + a^2} \ ,$$

   e

$$X = (1, 1 - b\frac{2b+a}{2b^2+a^2}, a\frac{2b+a}{2b^2+a^2}, 1 - b\frac{2b+a}{2b^2+a^2}) \ ,$$

   è il punto di σ di minima distanza da P. La distanza vale

$$|(0, 1 - b\frac{2b+a}{2b^2+a^2}, a\frac{2b+a}{2b^2+a^2} - 1, 1 - b\frac{2b+a}{2b^2+a^2})| = \sqrt{2}\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+2b^2}} \ .$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b-a & 3a-3b-1 \\ 0 & a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} .$$

1. (2 pt.) Determinare gli autovettori di A.

   Risposta:

$$\ker(A - aI_4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\ker(A - bI_4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

2. (3 pt.) Determinare la nullità di $A - b$, di $A - a$ e di $(A - a)^2$.

3. (3 pt.) Determinare la forma canonica di Jordan J di A.

   Risposta:
$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Si consideri nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^2$ con coordinate ortonormali (x, y), la conica $\mathcal{C}$ di equazione
$$2x^2 - 2y^2 - 4\sqrt{3}xy - 4(\sqrt{3}a - b)x + 4(a + \sqrt{3}b))y - 1 = 0 \ .$$

1. (4 pt.) Determinare una rotazione di centro l'origine
$$\begin{cases} x &= c\ u - s\ v \\ y &= s\ u + c\ v \end{cases}$$
   in modo che i coefficienti dell'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u, v) non abbia il termine in uv.

2. (5 pt.) Si determinino gli assi e il centro di $\mathcal{C}$ in coordinate (x, y).

   Risposta: Si considerano solo i termini di grado massimo dell'equazione di $\mathcal{C}$, e si scrivono nella forma
$$2x^2 - 2y^2 - 4\sqrt{3}xy = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$
   Si tratta di diagonalizzare la matrice reale simmetrica $A = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ tramite una rotazione, il che si può fare per il teorema spettrale. Si ha
$$p_A(X) = \det(XI_2 - A) = X^2 - 16 = (X - 4)(X + 4) \ .$$
   Si trovano gli autovettori di A:
$$\ker(A - 4I_2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -6 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \ ,$$
   e
$$\ker(A + 4I_2) = \ker \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle \ ,$$
   Gli autovettori trovati sono naturalmente ortogonali. Bisogna però normalizzarli. Dunque la matrice della rotazione cercata è
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \ .$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$
   Quindi $x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + v/2$, $y = -u/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v$. L'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u, v) ha come termini di grado massimo
$$(u, v) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$(u,v)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4u^2 - 4v^2 \ .$$

L'equazione completa di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u,v) è

$$4u^2 - 4v^2 - 4(\sqrt{3}a - b)(\frac{\sqrt{3}}{2}u + v/2) + 4(a + \sqrt{3}b))(-u/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v) - 1 = 0 \ .$$

Questa è

$$4u^2 - 4v^2 - 8au + 8bv - 1 = 0 \ .$$

Completiamo i quadrati

$$4u^2 - 8au = 4(u^2 - 2au + a^2) - 4a^2 = 4(u-a)^2 - 4a^2$$

e

$$-4v^2 + 8bv = -4(v^2 - 2bv + b^2) + 4b^2 = -4(v-b)^2 + 4b^2.$$

Quindi le coordinate canoniche sono $U = u - a$ e $V = v - b$ e l'equazione canonica è

$$\frac{U^2}{\frac{1+4a^2-4b^2}{4}} - \frac{V^2}{\frac{1+4a^2-4b^2}{4}} = 1$$

Dunque si tratta di un'iperbole equilatera di semiassi reali $\frac{\sqrt{|1+4a^2-4b^2|}}{2}$. Il centro è (a,b) in coordinate (u,v) e quindi in coordinate (x,y) è (siccome $x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + v/2$, $y = -u/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v$)

$$C = (\frac{\sqrt{3}}{2}a + b/2, -a/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b) \ .$$

Siccome

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \ ,$$

è $u = \frac{\sqrt{3}}{2}x - y/2$, $v = x/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ e quindi le equazioni degli assi $u = a$ e $v = b$ sono

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x & - & y/2 & = a \\ x/2 & + & \frac{\sqrt{3}}{2}y & = b \end{cases} \ .$$

Esercizio 4. Questo esercizio è un approfondimento dell'esercizio 1: le notazioni sono le stesse. Per svolgerlo bisogna avere già svolto almeno i punti 1 e 2 dell'esercizio 1.

1. (3 pt.) Si consideri la retta $\ell = P + \langle u := (0,0,0,1)\rangle \subset \pi$. Mostrare che $\pi = \ell + \langle v\rangle$ (nel senso che ogni punto $X \in \pi$ si scrive unicamente nella forma $X = L + tv$, con $L \in \ell$ e $t \in \mathbb{R}$), ove $\langle v\rangle$ è l'intersezione degli spazi direttori di π e di σ.

   Risposta: Si ha $\pi = P + \langle u, v\rangle$.

2. (4 pt.) Osservare che ℓ e σ sono sghembe e calcolare la distanza $d(\ell, \sigma)$.

   Risposta: Ricordiamo che $P(1,0,1,0) \in \pi$ e $Q(0,1,0,1) \in \sigma$ cosicché $PQ = (-1,1,-1,1)$ e che $W = \langle w_1 := (1,0,0,0), w_2 := (0,-b,a,-b)\rangle$ è lo spazio direttore di σ. Basta considerare il volume 4-dimensionale di $\Pi(PQ, w_1, w_2, u)$ che vale

$$(\mathrm{vol}\,\Pi(PQ,w_1,w_2,u))^2 = \begin{vmatrix} PQ\cdot PQ & PQ\cdot w_1 & PQ\cdot w_2 & PQ\cdot u \\ PQ\cdot w_1 & w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 & w_1\cdot u \\ PQ\cdot w_2 & w_1\cdot w_2 & w_2\cdot w_2 & w_2\cdot u \\ PQ\cdot u & w_1\cdot u & w_2\cdot u & u\cdot u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -a-2b & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -a-2b & 0 & a^2+2b^2 & -b \\ 1 & 0 & -b & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \ .$$

Dunque $\operatorname{vol}\Pi(PQ, w_1, w_2, u) = |a-b|$. Invece il volume 3-dimensionale della base $\Pi(w_1, w_2, u)$ di $\Pi(PQ, w_1, w_2, u)$ vale

$$(\operatorname{vol}\Pi(w_1, w_2, u))^2 == \begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 & w_1 \cdot u \\ w_1 \cdot w_2 & w_2 \cdot w_2 & w_2 \cdot u \\ w_1 \cdot u & w_2 \cdot u & u \cdot u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2b^2 & -b \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \ .$$

Finalmente

$$d(\ell, \sigma) = \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \ .$$

Esercizio 5. (Domanda per l'orale, facoltativa) Sia dato uno spazio affine (A, V) su $\mathbb{R}$. Siano $P_1, \ldots, P_k \in A$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

1. In che condizioni ha senso parlare del punto $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$?

2. Nella definizione data, occorre fare riferimento a un punto origine $O \in A$? Il risultato dipende dalla scelta di O?

3. Supponiamo i $\lambda_i > 0$. Come si definisce il *baricentro dei k punti $P_1, \ldots, P_k \in A$ affetti delle masse* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$?

4. Dimostrare che se B_j, per $j = 1, \ldots, \ell$, è il baricentro dei punti $P_{j,1}, \ldots, P_{j,k_j} \in A$ affetti delle masse $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,k_j}$ e se $\lambda_j := \lambda_{j,1} + \cdots + \lambda_{j,k_j}$, allora il baricentro dei punti $B_1, \ldots, B_\ell \in A$ affetti delle masse $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ è anche baricentro di tutti i punti $P_{j,i}$ affetti dalle masse $\lambda_{j,i}$.