# $1^o$ Appello di Geometria AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
30 gennaio 2015

Compilare la prima tabella qui sotto ove $AB$ è la parte finale del proprio numero di matricola. Si calcoli $a = \lfloor \frac{A+B}{5} \rfloor$ e $b = -2 - \lfloor \frac{B}{4} \rfloor$. (Uso la notazione "ufficiale" $\lfloor x \rfloor$ per il massimo intero $n \leq x$.) Sostituire il vostro valore di $(a; b)$ nelle domande del testo.

| Cognome | Nome | Matricola | $(a, b)$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Es. 1 (11 pt) | Es. 2 (11 pt) | Es. 3 (11 pt) | Totale (33 pt) | Orale | Finale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Esercizio 1.** Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^4$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, si considerino i due piani

$$\pi : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + ax_4 = 0 \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

a) (2pt) Determinare la posizione reciproca di $\pi$ e di $\sigma$ ed eventuali intersezioni.

La matrice incompleta del sistema lineare che determina $\pi \cap \sigma$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = a(1-b) - 1 \neq 0$. Dunque $\pi \cap \sigma$ consiste di un solo punto $P$. Si calcola

$$P = (0, -a(a(1-b)-1)^{-1}, a(a(1-b)-1)^{-1}, (a(1-b)-1)^{-1}).$$

b) (3pt) Scrivere delle equazioni parametriche per $\pi$ e $\sigma$.

Risposta. Si ha

$$\pi : \begin{cases} x_1 = 0 - \lambda - \mu a \\ x_2 = b^{-1} - \lambda(a+1)b^{-1} + (a^2+1)b^{-1}\mu \\ x_3 = 0 + \lambda \\ x_4 = 0 + \mu \end{cases}.$$

per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\pi = S(0, b^{-1}, 0, 0) + \langle v_1 := (-1, -(a+1)b^{-1}, 1, 0), v_2 = (-a, (a^2+1)b^{-1}, 0, 1) \rangle.$$

Analogamente

$$\sigma = O(0,0,0,0) + \langle u_1 := (0, 1, -1, 0), u_2 := (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

c) (3pt) Calcolare la distanza del punto $R(1,1,a,b)$ da $\sigma$.

Risposta. Il punto generico di $\sigma$ ha coordinate $(0,\lambda,-\lambda,\mu)$. Si tratta di imporre al vettore $(1,1,a,b)-(0,\lambda,-\lambda,\mu)$ di essere $\perp$ a $u_1$ e $u_2$. Dunque $\lambda = \frac{1-a}{2}$ e $\mu = b$. Il punto di $\sigma$ di minima distanza da $R$ è allora $S(0, \frac{1-a}{2}, -\frac{1-a}{2}, b))$. La distanza da $R$ da $\sigma$ vale

$$d(R,\sigma) = \frac{\sqrt{a^2+2a+3}}{\sqrt{2}} .$$

d) (3pt) Calcolare la distanza da $\sigma$ della retta $\ell = R(1,1,a,b) + \langle u := (1,0,0,0)\rangle$.

Risposta. Ci sono parecchi modi di procedere. Uno è quello di prendere un punto generico $R_\lambda = R + \lambda u$ su $\ell$ e uno $T_{\mu,\nu} = O + \mu u_1 + \nu u_2$ in $\sigma$ e di determinare $(\lambda,\mu,\nu)$ in modo che $R_\lambda T_{\mu,\nu}$ sia $\perp$ a $\ell$ e $\sigma$. Si misura poi la distanza fra i punti $R_\lambda$ e $T_{\mu,\nu}$ che soddisfano a questa condizione. Preferisco procedere in un altro modo, visto che ne abbiamo parlato a lezione..... Dunque

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = a+1 \neq 0 .$$

Per calcolare la loro distanza si osserva che il modulo del precedente determinante e cioè $a+1$ è il volume 4-dimensionale di $\Pi(OR, u, u_1, u_2)$. Ora il volume 3-dimensionale della base $\Pi(u, u_1, u_2)$ è il modulo del vettore $|u \times u_1 \times u_2|$. Si ha

$$u \times u_1 \times u_2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3 .$$

Quindi

$$\mathrm{Vol}(\Pi(u, v_1, v_2)) = \sqrt{2}$$

e si ricava $d(\ell,\sigma)$ come l'altezza di $\Pi(OR, u, u_1, u_2)$ sulla sua base $\Pi(u, u_1, u_2)$, e cioè

$$d(\ell,\sigma) = (a+1)/\sqrt{2} .$$

**Esercizio 2.** Nel piano euclideo standard $\mathbb{R}^2$ con coordinate ortogonali $(x,y)$, si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{Q} : (1-b^2)(x^2+y^2-2x) - (b^2+1)(1-2xy+2y) = 0 .$$

a) (3pt) Si determini una rotazione

$$P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con } P \in O^+(2,\mathbb{R}) ,$$

in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate $(u,v)$ non contenga il termine in $uv$. Si determini tale equazione.

Gli autovalori di $A'$ sono 2 e $-2b^2$ e i corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} .$$

Dunque

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ,$$

soddisfa

$$P^{-1}A'P = P^tA'P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2b^2 \end{pmatrix} .$$

b) (4pt) Utilizzare una traslazione $U = u - c$, $V = v - d$ in modo che l'equazione della conica nelle $(U, V)$ sia in forma canonica.

Risposta. Sostituendo

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2\ u - \sqrt{2}/2\ v \\ y = \sqrt{2}/2\ u + \sqrt{2}/2\ v \end{cases}$$

nell'equazione di $\mathcal{Q}$, si perviene alla

$$2u^2 - 2b^2v^2 - 2\sqrt{2}u - 2\sqrt{2}b^2v = b^2 + 1 .$$

cioè

$$u^2 - b^2v^2 - \sqrt{2}u - \sqrt{2}b^2v = \frac{b^2+1}{2} .$$

Completando i quadrati

$$u^2 - \sqrt{2}u = u^2 - \sqrt{2}u + 1/2 - 1/2 = (u - 1/\sqrt{2})^2 - 1/2 ,$$

e

$$-b^2(v^2 + \sqrt{2}v) = -b^2(v^2 + \sqrt{2}v + 1/2) + b^2/2 = -b^2(v + 1/\sqrt{2})^2 + b^2/2 ,$$

e ponendo $U = u - 1/\sqrt{2}$ e $V = v + 1/\sqrt{2}$, si ottiene

$$U^2 - b^2V^2 = 1 ,$$

che è in forma canonica.

c) (4pt) Calcolare centro e assi della conica nelle coordinate $(x, y)$.

Risposta Gli assi sono $u = 1/\sqrt{2}$ e $v = -1/\sqrt{2}$. Dunque, in coordinate $(x, y)$

$$\sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y = 1/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{2}/2x - \sqrt{2}/2y = -1/\sqrt{2}$$

e cioè gli assi sono

$$x + y = 1 \quad \text{e} \quad x - y = 1 .$$

In centro è allora $C(1, 0)$.

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b-a-1 & b-a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & b-a+1 & b & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(X) = (X-a)^3(X-b)$ (credeteci!).

a) (1pt) Determinare un autovettore $u \neq 0$ di $A$ di autovalore $b$.

b) (2pt) Determinare la nullità di $A - a$.

c) (2pt) Determinare la forma canonica di Jordan $J$ di $A$. (Segue senza calcoli da (b))

d) (3pt) Poniamo

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino $v_2 = (A - a)v_3$ e $v_1 = (A - a)v_2$. Cosa vale $(A - a)v_1$ ?

e) (3pt) Determinare una matrice invertibile $P$ tale che $AP = PJ$. (Segue senza calcoli da quanto precede.)

Risposta. Si vede subito che il rango di $A - a$ vale 3. Dunque la forma canonica di Jordan di $A$ deve essere

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Si vede subito che

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e che} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Si ha $(A - a)v_1 = 0$. Dunque $v_3, v_2, v_1$ sono autovettori generalizzati di $A$ associati all'autovalore $a$. Per trovare la matrice $P$ di passaggio alla forma canonica, basta formare una matrice avente come colonne nell'ordine $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $u$, cioè

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $AP = PJ$ :

$$\begin{pmatrix} a & b-a-1 & b-a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & b-a+1 & b & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** (**Domanda per l'orale**) Consideriamo uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ e una catena di suoi sottospazi :

$$(0) < V_1 < V_2 < V_3 < V .$$

Siano $v_1 \in V_1 \setminus (0)$, $v_2 \in V_2 \setminus V_1$, $v_3 \in V_3 \setminus V_2$, $v_4 \in V \setminus V_3$. Dimostrare che vettori $v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti.

Risposta. Se $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$, si ha $c_4v_4 = -(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \in V_3$ e dunque, dato che $v_4 \notin V_3$, $c_4 = 0$. Se poi $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, si ha $c_3v_3 = -(c_1v_1 + c_2v_2) \in V_2$ e dunque, dato che $v_3 \notin V_2$, $c_3 = 0$. Se poi $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, si ha $c_2v_2 = -c_1v_1 \in V_1$ e dunque, dato che $v_2 \notin V_1$, $c_2 = 0$. Infine se $c_1v_1 = 0$, dato che $v_1 \neq 0$, si ha anche $c_1 = 0$.