# Appello di Geometria prima sessione di recupero AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
3 settembre 2015

Non consegnare brutte copie. Consegnare solo questi fogli. Risposte brevi, ma ben giustificate.

| Cognome | Nome | Matricola |
|---|---|---|
| | | |

| Es. 1 (11 pt) | Es. 2 (11 pt) | Es. 3 (11 pt) | Totale (33 pt) | Orale | Finale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Esercizio 1.** Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^4$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, si considerino la retta $r$ e il piano $\pi$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}, \quad \pi : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Sia $r^\circ$ lo spazio direttore di $r$ e $\pi^\circ$ quello di $\pi$.

a) (3pt) Dimostrare che effettivamente $r$ è una retta e $\pi$ è un piano calcolando la dimensione e una base di $r^\circ$ e di $\pi^\circ$.

$r^\circ = \langle(1, -1, 1, -1)\rangle$, $\pi^\circ = \langle(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\rangle$

b) (2pt) Determinare la posizione reciproca di $r$ e di $\pi$.

Sono sghembe.

c) (3pt) Determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente sia a $r$ che a $\pi$.

È la congiungente il punto $P_0 = (2, -\frac{5}{2}, 4, -\frac{5}{2}) \in \pi$ e $Q_0 = (2, -3, 4, -2) \in r$.

d) (3pt) Calcolare la distanza di $r$ da $\pi$.

Il vettore $\overrightarrow{Q_0P_0}$ è $(0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ e dunque la distanza vale $1/\sqrt{2}$.

**Esercizio 2.** Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

a) (2pt) Calcolare il polinomio caratteristico di $A$.

È $x^3 - 9x^2 - 81x + 729$

b) (3pt) Calcolare gli autovalori di $A$ con le relative molteplicità. (Suggerimento: Si osservi che $9^3 = 729$.)

Il polinomio caratteristico è $(x - 9)^2(x + 9)$.

c) (3pt) Trovare una base di ciascun autospazio di $A$.

$$\ker(A-9) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \ \ker(A+9) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d) (3pt) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza $A$.

Si ortogonalizza la base di $\ker(A-9) = \langle \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \rangle$, $\ker(A+9) = \langle \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Poi si pone

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & -\sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$AP = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Siccome $P$ è ortogonale $P^{-1} = P^t$ e

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.** Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (2pt) Calcolare il rango e la nullità di $f$

b) (2pt) Trovare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e di $\ker(f)$.

c) (3pt) Determinare una matrice $F$ tale che $FA$ sia della forma

$$F \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Quante tali $F$ esistono?

Ne esiste una sola ed è l'inversa di

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e cioè } F = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) (4pt) Determinare matrici $F_1$ e $F_2$ tali che

$$F_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risposta. Possiamo prendere come $F_2$ la $F$ del punto precedente e come $F_1$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** (**Domanda per l'orale**) Si consideri lo spazio affine euclideo $\mathbb{R}^5$ e le sue sottovarietà $\pi$, $\sigma$ di spazi direttori $\pi^\circ$, $\sigma^\circ$, rispettivamente, con $\dim \pi = 2$, $\dim \sigma = 3$.

a) Supponiamo che sia $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$. Mostrare che $\pi$ e $\sigma$ sono incidenti in esattamente 1 punto.

Risposta: Infatti, in questo caso, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5 = \pi^\circ \oplus \sigma^\circ$. Allora, prendendo un punto $P \in \pi$ e un punto $Q \in \sigma$, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve essere somma di un vettore di $\pi^\circ$ e di uno di $\sigma^\circ$, cioè $\overrightarrow{PQ} = u + w$, con $u \in \pi^\circ$ e $w \in \sigma^\circ$. Ma allora, $P + u = P' \in \pi$ e $Q - w = Q' \in \sigma$, e $Q' - P' = \overrightarrow{P'Q'} = (Q - P) - (u + w) = 0$, cioè $P' = Q' \in \pi \cap \sigma$. Dunque $\pi$ e $\sigma$ sono incidenti. Se ci fossero due punti distinti $R, S \in \pi \cap \sigma$, il vettore $S - R = \overrightarrow{RS}$ sarebbe in $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$ e dunque sarebbe 0, assurdo.

b) È possibile che $\pi$ e $\sigma$ siano sghembe? È possibile che $\pi$ e $\sigma$ abbiano una retta in comune?

Risposta: $\pi$ e $\sigma$ non possono essere sghembe. Difatti, se $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$, dal punto precedete si deduce che $\pi$ e $\sigma$ sono incidenti in esattamente 1 punto. Invece può benissimo succedere che $\pi$ e $\sigma$ abbiano una retta in comune. Per esempio quando $\pi \subset \sigma$ !

c) Supponiamo che sia $\pi \cap \sigma = \emptyset$ e $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$, con $v \neq 0$. È vero che se $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ sono tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a $\pi$ che a $\sigma$, allora la distanza $d(P, Q)$ è la minima distanza tra un punto di $\pi$ e un punto di $\sigma$? È vero che una tale coppia di punti $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ esiste?

Risposta: Sia $P' = P + u$, con $u \in \pi^\circ$, un altro punto di $\pi$ e $Q' = Q + w$, con $w \in \sigma^\circ$, un altro punto di $\sigma$. Allora $Q' - P' = (Q - P) + (w - u)$. Ma $(Q - P) \perp (w - u)$ e il teorema di Pitagora dice che $||Q' - P'||^2 = ||Q - P||^2 + ||w - u||^2 \geq ||Q - P||^2$, cosicché $||Q' - P'|| \geq ||Q - P||$. Quanto all'esistenza di $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a $\pi$ che a $\sigma$, basta osservare che $\dim \pi^\circ + \sigma^\circ = 4$. Quindi $(\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp = \langle e \rangle$, con $e \neq 0$ e $\mathbb{R}^5 = (\pi^\circ + \sigma^\circ) \oplus \langle e \rangle$. Allora, per ogni $X \in \pi$ e $Y \in \sigma$, si può decomporre $Y - X = (u + w) + \lambda e$, con $u \in \pi^\circ$, $w \in \sigma^\circ$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si vede che $P = X + u$, $Q = Y - w$, soddisfa $Q - P = (Y - X) - (u + w) = \lambda e \in (\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp$.

d) Nella situazione di c), descrivere l'insieme dei punti $X \in \pi$ che hanno minima distanza da $\sigma$ e l'insieme dei punti $Y \in \sigma$ che hanno minima distanza da $\pi$.

Risposta: Siano $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a $\pi$ che a $\sigma$. Voglio mostrare che il luogo degli $X$ è $P + \langle v \rangle$ e il luogo degli $Y$ è $Q + \langle v \rangle$. Si tratta di due rette parallele, una su $\pi$ e una su $\sigma$. Infatti, torniamo alla risposta del punto precedente: se anche i punti $P' = P + u \in \pi$, con $u \in \pi^\circ$ e $Q' = Q + w \in \sigma$, con $w \in \sigma^\circ$, sono tali che la distanza $d(P', Q')$ sia minima, cioè uguale a $d(P, Q)$, si deve avere $||w - u||^2 = 0$, cioè $u = w$. Ma allora questo $u = w$ è un vettore di $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$. Quindi è un multiplo di $v$. E viceversa, se prendiamo $P' = P + \lambda v \in \pi$ e $Q' = Q + \lambda v \in \sigma$, si ha $d(P', Q') = d(P, Q)$.