Orale di Geometria prima sessione recupero AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
4 settembre 2015

Esercizio 1. (**Domanda per l'orale**) Si consideri lo spazio affine euclideo $\mathbb{R}^5$ e le sue sottovarietà π, σ di spazi direttori π°, σ°, rispettivamente, con $\dim \pi = 2$, $\dim \sigma = 3$.

a) Supponiamo, solo per questo punto, che sia $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$. Mostrare che π e σ sono incidenti in esattamente 1 punto.

Risposta: Infatti, in questo caso, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5 = \pi^\circ \oplus \sigma^\circ$. Allora, prendendo un punto $P \in \pi$ e un punto $Q \in \sigma$, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve essere somma di un vettore di π° e di uno di σ°, cioè $\overrightarrow{PQ} = u + w$, con $u \in \pi^\circ$ e $w \in \sigma^\circ$. Ma allora, $P + u = P' \in \pi$ e $Q - w = Q' \in \sigma$, e $Q' - P' = \overrightarrow{P'Q'} = (Q - P) - (u + w) = 0$, cioè $P' = Q' \in \pi \cap \sigma$. Dunque π e σ sono incidenti. Se ci fossero due punti distinti $R, S \in \pi \cap \sigma$, il vettore $S - R = \overrightarrow{RS}$ sarebbe in $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$ e dunque sarebbe 0, assurdo.

b) Torniamo alla situazione generale dell'esercizio. È possibile che π e σ siano sghembe? È possibile che π e σ abbiano una retta in comune?

Risposta: π e σ non possono essere sghembe. Difatti, se $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$, dal punto precedete si deduce che π e σ sono incidenti in esattamente 1 punto. Invece può benissimo succedere che π e σ abbiano una retta in comune. Per esempio quando $\pi \subset \sigma$!

c) Supponiamo che sia $\pi \cap \sigma = \emptyset$ e $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$, con $v \neq 0$. È vero che se $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ sono tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ, allora la distanza $d(P, Q)$ è la minima distanza tra un punto di π e un punto di σ? È vero che una tale coppia di punti $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ esiste?

Risposta: Sia $P' = P + u$, con $u \in \pi^\circ$, un altro punto di π e $Q' = Q + w$, con $w \in \sigma^\circ$, un altro punto di σ. Allora $Q' - P' = (Q - P) + (w - u)$. Ma $(Q - P) \perp (w - u)$ e il teorema di Pitagora dice che $||Q' - P'||^2 = ||Q - P||^2 + ||w - u||^2 \geq ||Q - P||^2$, cosicché $||Q' - P'|| \geq ||Q - P||$. Quanto all'esistenza di $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ, basta osservare che $\dim \pi^\circ + \sigma^\circ = 4$. Quindi $(\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp = \langle e \rangle$, con $e \neq 0$ e $\mathbb{R}^5 = (\pi^\circ + \sigma^\circ) \oplus \langle e \rangle$. Allora, per ogni $X \in \pi$ e $Y \in \sigma$, si può decomporre $Y - X = (u + w) + \lambda e$, con $u \in \pi^\circ$, $w \in \sigma^\circ$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si vede che $P = X + u$, $Q = Y - w$, soddisfa $Q - P = (Y - X) - (u + w) = \lambda e \in (\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp$.

d) Nella situazione di c), descrivere il luogo delle coppie (X, Y) formate dai punti $X \in \pi$ e $Y \in \sigma$ aventi minima distanza.

Risposta: Siano $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ. Voglio mostrare che il luogo degli X è $P + \langle v \rangle$ e il luogo degli Y è $Q + \langle v \rangle$. Si tratta di due rette parallele, una su π e una su σ. Infatti, torniamo alla risposta del punto precedente: se anche i punti $P' = P + u \in \pi$, con $u \in \pi^\circ$ e $Q' = Q + w \in \sigma$, con $w \in \sigma^\circ$, sono tali che la distanza $d(P', Q')$ sia minima, cioè uguale a $d(P, Q)$, si deve avere $||w - u||^2 = 0$, cioè $u = w$. Ma allora questo $u = w$ è un vettore di $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$. Quindi è un multiplo di v. E viceversa, se prendiamo $P' = P + \lambda v \in \pi$ e $Q' = Q + \lambda v \in \sigma$, si ha $d(P', Q') = d(P, Q)$.