Appello di Geometria - Prova

CS in Astronomia, CS in Fisica.

Regole d'esame. Durata: **90 minuti**. È vietato l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mostrare i passaggi e cerchiare le risposte.

(1) Sia $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Si determinino due matrice D,Q, con Q invertibile e D diagonale tale che $A = QDQ^{-1}$.

(2) Sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$p(x) \mapsto \left(\int_0^1 p(t)dt, \int_1^2 p(t)dt, p'(1) \right).$$

(a) Si dia la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ e di $\mathbf{R}^3$.

(b) Determinare, se esiste, l'immagine inversa di $(1, 2, 5)^T$.

(3) Sia $A \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2-t & -2 \\ 6 & 5 & 4+t & 6 \end{pmatrix}$$

Siano $b_1 = (1, 3, -1), b_2 = (2t, 4t + 2, -2)$.

(a) Si determini $\mathbf{A}_1 = \mathrm{Sol}(A, b_1)$ e $\mathbf{A}_2 = \mathrm{Sol}(A, b_2)$ a variare di t.

(b) Si determini la distanza tra $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ al variare di t.

(c) Si determini il piano π ortogonale ad $\mathbf{A}_1$ e passante per $(9, 7, 5 - t, -6)$.

(4) Sia $V = \mathbf{R}^4$. Mostrare che se tre sottospazi distinti $W_1, W_2, W_3 \subset V$ sono tali che $W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3 = V$, allora $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 2$.

Si dia quindi un esempio di tre sottospazi $W_1, W_2, W_3 \subset V$ tali che $W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3 = V$.