Primo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica. 28 gennaio 2020

Regole d'esame. Durata: **90 minuti**. È vietato l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mostrare i passaggi e cerchiare le risposte.

(1) Si consideri l'applicazione lineare $f_t : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}^4$ dipendente dal parametro $t \in \mathbf{R}$ definita da

$$f_t(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} ta_0 + a_2 - a_3 \\ ta_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 + ta_2 + 4a_3 \\ ta_0 + a_1 + (1+t)a_2 + 3a_3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini la matrice associata a f_t rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ t & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 4 \\ t & 1 & 1+t & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Si determini una base di $\ker(f_t)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$. Esistono dei valori di t per cui f_t è iniettiva?

Soluzione:

Con il procedimento di Gauss troviamo le seguente tre matrici:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ t & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 4 \\ t & 1 & 1+t & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 4 \\ 0 & 1 & t & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $t \neq 0$ troviamo che la matrice è in forma a scala e che il rango è 3. Quindi $\dim \ker(f_t) = 4 - 3 = 1$ e f_t non è iniettiva. Inoltre, sappiamo che $a_2 = -\frac{3}{t}a_3$, $a_1 = -a_3$, $a_0 = \frac{a_3 - a_2}{t} = \frac{t+3}{t^2}a_3$. Quindi

$$\begin{aligned} \ker(f_t) &= \left\{ \frac{t+3}{t^2}a_3 - a_3 x - \frac{3}{t}a_3 x^2 + a_3 x^3 \mid a_3 \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left(\frac{t+3}{t^2} - x - \frac{3}{t}x^2 + x^3 \right) = \operatorname{span}\left((t+3) - t^2 x - 3tx^2 + t^2 x^3 \right). \end{aligned}$$

Per $t = 0$ troviamo $3a_3 = 0; a_1 + a_3 = 0; a_2 - a_3 = 0$. Quindi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e $\ker(f_0) = \operatorname{span}(1)$. In particolare f_t non è iniettiva per nessun valore di t.

(c) Per ogni valore di t si determini la controimmagine del vettore $(1,0,0,t)^T \in \mathbf{R}^4$.

Soluzione:

Con il procedimento di Gauss troviamo le seguente tre matrici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t & 0 & 1 & -1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 4 & 0 \\ t & 1 & 1+t & 3 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} t & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & t-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} t & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione è $0 = t - 1$, quindi solo per $t = 1$ troviamo che la controimmagine potrebbe essere non vuota. In quel caso

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo $a_2 = 1 - 3a_3, a_1 = -1 - a_3, a_0 = 1 - a_2 + a_3 = 4a_3$

$$f^{-1}(1,0,0,t) = \{-x + x^2\} + \operatorname{span}(4 - x - 3x^2 + x^3).$$

(d) Si ponga $t = 0$. Esiste una funzione lineare suriettiva $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ tale che $g \circ f_0 = 0$?
Soluzione: Dal fatto che g è suriettiva segue che $\dim \operatorname{im}(g) = 2$. Dal teorema del rango segue che $\dim \ker(g) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \operatorname{im}(g) = 4 - 2 = 2$.
Dal punto (b) segue $\dim(\ker(f_0)) = 1$ quindi $\dim \operatorname{im}(f_0) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \ker(f_0) = 4-1 = 3$ e $\dim \operatorname{im}(f_0) > \dim \ker(g)$.
Se $g \circ f_0 = 0$, allora tutti gli elementi nell'immagine di f_0 devono essere mandati a 0 da g, in particolare
$$\dim \operatorname{im}(f_0) \leq \dim \ker(g).$$
Quindi abbiamo trovato una contraddizione e g non può esistere.

(2) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$
Si determinino due matrici D,Q, con Q invertibile e D diagonale tale che $A = QDQ^{-1}$.
Soluzione:
$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 3 \\ 3 & -2-t & 3 \\ 6 & -2-t & 4-t \end{pmatrix} \\ &= (-2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{pmatrix} \\ &= (-2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (-2-t)((1-t)^2 - 9) \end{aligned}$$
Abbiamo che $(1-t)^2 - 9 = 0$ se e solo se $(1-t) = 3$ o $(1-t) = -3$. Quindi troviamo
$$(1-t)^2 - 9 = (t+2)(t-4) \text{ e } p_A(t) = -(t+2)^2(t-4).$$
Per l'autovalore -2 otteniamo che $m_a(-2) = 2$. La matrice $A - (-2)I_3$ è
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$
che ha ovviamente rango 1. Quinda $m_g(-2) = 3 - 1 = 2$. I vetttori $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ sono linearmente indipendenti e appartengano all'autospazio, quindi formano una base.
Per l'autovalore 4 otteniamo che $m_a(4) = 1$. Quindi $m_g(4) = 1$. La matrice $A - 4I_2$ è
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$
Il vettore $(1,1,2)$ è nell'autospazio. Otteniamo
$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Sia $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = 0\}$. Sia $W = \operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T\}$.
(a) Si determini una base ortogonale di V e una base ortogonale di $V + W$.
(b) Sia $p = (4,-4,5,2)^T$. Si determini la distanza tra p e V.
(c) Sia $\mathbb{A}_1 = (2,-1,0,0) + V$, sia $\mathbb{A}_2 = (0,3,1,0) + W$. Si determini la distanza tra $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$.

Soluzione: Sia $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in V$ allora $x_3=-x_2$ e $x_4=-2x_1-x_2$, quindi la dimensione di V è 2 e $\{(1,0,0,-2)^T,(0,1,-1,-1)^T\}$ è una base. Chiamiamo $v_1=(1,0,0,-2)^T, v_2=(0,1,-1,0)^T$. Se applichiamo Gram-Schmidt allora troviamo una base ortogonale $\{w_1,w_2\}$ con $w_1=v_1$ e $w_2=v_2-\frac{v_2\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1$.

Si calcolo facilmente che $v_2\cdot w_1=2, w_1\cdot w_1=5$, quindi

$$w_2=(0,1,-1,-1)^T-\frac{2}{5}(1,0,0,-2)^T=\frac{1}{5}(-2,5,-5,-1)^T$$

In una base ortogonale possiamo scambiare un vettore con un suo moltiplo non nullo e la base rimane ortogonale. Quindi $\{(1,0,0,-2),(-2,5,-5,-1)\}$ è una base ortogonale di V.

Per $V+\operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T\}$ applichiamo Gram-Schmidt all'insieme

$$\{(1,0,0,-2)^T,(-2,5,-5,-1)^T,(1,0,1,0)^T\}.$$

È chiaro che questa insieme genera $V+\operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T\}$, ma non abbiamo controllato se sono linearmente indipendenti. Però se fossero linearmente dipendenti allora Gram-Schmidt darà il vettore nullo. Se $w_1=(1,0,0,-2)^T, w_2=(-2,5,-5,-1)^T, v_3=(1,0,1,0)^T$, allora $w_1\cdot w_1=5, w_2\cdot w_2=55, w_1\cdot v_3=1, w_2\cdot v_3=-7$.

$$w_3=v_3-\frac{1}{5}w_2+\frac{7}{55}=\frac{1}{11}(6,7,4,3)^T$$

Quindi $\{(1,0,0,-2)^T,(-2,5,-5,1)^T,(6,7,4,3)^T\}$ è una base ortogonale di

$$V+\operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T\}.$$

La distranza tra p e V è la norma di $p_{V^\perp}(p)$, però $p=p_V(p)+p_{V^\perp}(p)$ e quindi la distanza è anche la norma di $p-p_V(p)$. Abbiamo giá la base *ortogonale* $\{w_1,w_2\}$ per V, quindi $p_V(p)=\frac{w_1\cdot p}{w_1\cdot w_1}w_1+\frac{w_2\cdot p}{w_2\cdot w_2}w_2$.

Adesso $w_1\cdot p=0$, $w_2\cdot p=-8-20-25-2=-55$. Dal fatto che $w_2\cdot w_2=55$, questo semplifica a $p_V(p)=-w_2$. Quindi la disctanze è

$$\|p-p_V(p)\|=\|p+w_2\|=\|(2,1,0,1)\|=\sqrt{4+1+0+1}=\sqrt{6}$$

Per (c), si nota che lo spazio $V^\perp$ è generato da $(2,1,0,1)$ e $(0,1,1,0)$, per trovare $(V+\{(1,0,1,0)^T\})^\perp$ dobbiamo stabilire quali combinazioni lineari di $(2,1,0,1)$ e $(0,1,1,0)$ sono ortogonali a $(0,1,1,0)$. Adesso

$$(a(2,1,0,1)+b(0,1,1,0)).(1,0,1,0)=2a+b$$

Quindi $b=-2a$ e $(2,-1,-2,1)=: u$ è un vettore tale che $\{u\}$ è una base dello spazio ortogonale di $V+\operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T\}$. Quindi

$$\begin{aligned} d(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2) &= \|p_{(V+(1,0,1,0)^T)^\perp}((2,-1,0,0)-(0,3,1,0))\| \\ &= \|p_{(V+(1,0,1,0)^T)^\perp}((2,-4,-1,0))\| = \frac{\mid (2,-4,-1,0).u \mid}{\|u\|^2}\|u\| \end{aligned}$$

Adesso $\|u\|=\sqrt{10}$, $(2,-4,-1,0).u=10$ e

$$d(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$$

(4) (a) Sia A una matrice $n\times n$, tale che $A^3=0$. Si dimostra che (I_n-A) è invertibile e $(I_n-A)^{-1}=(I_n+A+A^2)$.

(b) Sia A una matrice $n\times n$, tale che $A^k=0$ per un $k\in\mathbf{Z}_{>0}$. Si dimostra che (I_n-A) è invertibile.

Soluzione: Sia B una matrice $n\times n$, allora B è invertibile se esiste una matrice C tale che $BC=I_n$. Quindi per la prima parte è suficiente di controllare se $(I_n-A)(I_n+A+A^2)=I_n$:

$$(I_n-A)(I_n+A+A^2)=I_n(I_n+A+A^2)-A(I_n+A+A^2)=I_n+A+A^2-A-A^2-A^3=I_n-A^3=I_n$$

Per la seconda parte otteniamo similmente

$$(I_n-A)\left(\sum_{j=0}^{k-1}A^j\right)=\sum_{j=0}^{k-1}A^j-A^{j+1}=I_n-A^k=I_n$$

(Usando la formula per le serie telescopie (vedi Analisi 1).)

Primo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica. 28 gennaio 2020

Regole d'esame. Durata: **90 minuti**. È vietato l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mostrare i passaggi e cerchiare le risposte.

(1) Si consideri l'applicazione lineare $f_t : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}^4$ dipendente dal parametro $t \in \mathbf{R}$ definita da

$$f_t(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) = \begin{pmatrix} -b_1 - tb_2 + b_3 \\ b_0 + 4b_1 + tb_3 \\ b_0 - tb_2 + b_3 \\ b_0 + 3b_1 - tb_2 + (1+t)b_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice associata a f_t rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione: La matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -t & 1 \\ 1 & 4 & 0 & t \\ 1 & 0 & -t & 1 \\ 1 & 3 & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

(b) Si determini una base di $\ker(f_t)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$. Esistono dei valori di t per cui f_t è iniettiva?

Soluzione: Con il procedimento di Gauss troviamo le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -t & 1 \\ 1 & 4 & 0 & t \\ 1 & 0 & -t & 1 \\ 1 & 3 & -t & 1+t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 1 \\ 1 & 4 & 0 & t \\ 0 & -1 & -t & 1 \\ 1 & 3 & -t & 1+t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 4 & t & t-1 \\ 0 & -1 & -t & 1 \\ 0 & 3 & 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & t & -1 \\ 0 & 4 & t & t-1 \\ 0 & 3 & 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & -3t & t+3 \\ 0 & 0 & -3t & t+3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & -3t & t+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si nota quindi che per $t \neq 0$ la matrice ha rango 3 e pertanto $\dim(\ker(f_t)) = 4 - 3 = 1$. In particolare, si ha che $b_2 = \frac{t+3}{3t} b_3$, $b_1 = -tb_2 + b_3 = -\frac{t}{3} b_3$, $b_0 = tb_2 - b_3 = \frac{t}{3} b_3$. Ciò significa che

$$\begin{aligned} \ker(f_t) &= \left\{ \tfrac{t}{3} b_3 - \tfrac{t}{3} b_3 x + \tfrac{t+3}{3t} b_3 x^2 + b_3 x^3 \,\middle|\, b_3 \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \tfrac{t}{3} - \tfrac{t}{3} x + \tfrac{t+3}{3t} x^2 + x^3 \right\} = \operatorname{span}\{t^2 - t^2 x + (t+3)x^2 + 3tx^3\}, \end{aligned}$$

e quindi f_t non è iniettiva.

Infine, per $t = 0$ abbiamo che $3b_3 = 0$, $b_1 = -b_3 = 0$, $b_0 = -b_3 = 0$ e quindi

$$\ker(f_0) = \operatorname{span}\{x^2\},$$

così nemmeno f_0 è iniettiva.

(c) Per ogni valore di t si determini la controimmagine del vettore $(1, 0, 0, t)^T \in \mathbf{R}^4$.

Soluzione: Eseguiamo le medesime operazioni di Gauss del punto precedente, dopo acer orlato la matrice del sistema con la colonna $(1, 0, 0, t)^T$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & -t & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -t & 1+t & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -t & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -t & 1+t & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3t & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right).$$

Si nota quindi che la controimmagine può essere non vuota solo se $t = 1$. Poniamoci in questo caso, ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e pertanto $b_2 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}b_3$, $b_1 = -1 - b_2 + b_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b_3$, $b_0 = b_2 - b_3 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}b_3$. Così

$$f_1^{-1}((1,0,0,1)^T) = -1 + x^3 + \operatorname{span}\{1 - x + 4x^2 + 3x^3\}.$$

(d) Si ponga $t = 0$. Esiste una funzione lineare suriettiva $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ tale che $g \circ f_0 = 0$?
Soluzione: Dal fatto che g è suriettiva segue che $\dim \operatorname{im}(g) = 2$. Dal teorema del rango segue che $\dim \ker(g) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \operatorname{im}(g) = 4 - 2 = 2$.
Dal punto (b) segue che $\dim(\ker(f_0)) = 1$, quindi $\dim(\operatorname{im}(f_0)) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim(\ker(f_0)) = 4 - 1 = 3$ e $\dim(\operatorname{im}(f_0)) > \dim(\ker(g))$.
Se $g \circ f_0 = 0$, allora tutti gli elementi nell'immagine di f_0 devono essere mandati a 0 da g (infatti $g \circ f_0 = 0$ è equivalente a $\operatorname{im}(f_0) \subseteq \ker(g)$), in particolare

$$\dim(\operatorname{im}(f_0)) \leq \dim(\ker(g)).$$

Quindi abbiamo trovato una contraddizione e g non può esistere.

(2) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 22 & -5 & -30 \\ -20 & 7 & 30 \\ 20 & -5 & -28 \end{pmatrix}.$$

Si determinino due matrici Δ,P, con P invertibile e Δ diagonale tale che $B = P\Delta P^{-1}$.

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico di B, operando opportune operazioni elementari sulle righe.

$$\begin{aligned}
p_B(t) = \det(B - tI_3) &= \det \begin{pmatrix} 22-t & -5 & -30 \\ -20 & 7-t & 30 \\ 20 & -5 & -28-t \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-t & 2-t & 0 \\ -20 & 7-t & 30 \\ 0 & 2-t & 2-t \end{pmatrix} \\
&= (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -20 & 7-t & 30 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -(2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -20 & 7-t & 30 \end{pmatrix} \\
&= -(2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 27-t & 30 \end{pmatrix} \\
&= -(2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3+t \end{pmatrix} \\
&= -(2-t)^2(3+t).
\end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono 2 e -3 di molteplicità algebrica 2 e 1 rispettivamente.

Per l'autovalore 2 la matrice $B - 2I_3$ è

$$\begin{pmatrix} 20 & -5 & -30 \\ -20 & 5 & 30 \\ 20 & -5 & -30 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1, ed una base per il relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per l'autovalore -3 la matrice $B - (-3)I_3$ è

$$\begin{pmatrix} 25 & -5 & -30 \\ -20 & 10 & 30 \\ 20 & -5 & -25 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, ed una base per il relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pertanto

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Sia $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = x_1 + x_4 = 0\}$. Sia $\pi = (1, 0, 0, 1)^T + V$.

(a) Si determini una base ortogonale di V e una base ortogonale di $V + \operatorname{span}\{(1, 0, 0, 1)^T\}$.
Soluzione: Dalle equazioni che definiscono V si deduce che una sua base è $\{v_1, v_2\}$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $v_1 \cdot v_2 = 14$ utilizziamo il processo di Gram–Schmidt per rendere il secondo vetore ortogonale al primo. Poniamo quindi $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = w_2 - \frac{14}{7} w_1 = w_2 - 2w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\{w_1, w_2\}$ è una base ortogonale di V.
Poniamo $v_3 = (1, 0, 0, 1)^T$, si osserva quindi che

$$w_1 \cdot v_3 = 0, \qquad w_2 \cdot v_3 = 0$$

e pertanto $\{w_1, w_2, v_3\}$ è una base ortogonale per $V + \operatorname{span}\{(1, 0, 0, 1)^T\}$.

(b) Sia H l'iperpiano di $\mathbf{R}^4$ parallelo a π e passante per l'origine. Determinare un'equazione cartesiana per H.
Soluzione: Poiché H è un iperpiano di $\mathbf{R}^4$, si ha $\dim(H) = 4-1 = 3$. Dal momento che H deve passare per l'origine possiamo descriverlo anche come sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$, in particolare H coinciderà con la sua giacitura. Affinché π sia parallelo ad H bisogna che la giacitura di π (cioè V) sia contenuta in H. Possiamo quindi considerare

$$H = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{span}\{w_1, w_2, v_3\}.$$

Per determinare un'equazione cartesiana di H calcoliamo il suo complemento ortogonale: questo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore

$$v_4 = w_1 \times w_2 \times v_3 = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & -3 & 1 \\ e_2 & 1 & 6 & 0 \\ e_3 & 2 & 0 & 0 \\ e_4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Così

$$H : 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0.$$

(c) Sia $p = (-2, 3, 2, -2)^T$. Verificare che $p \in H$ e calcolare la distanza di p da π.
Soluzione: Sostituendo le coordinate di p nell'equazione di H del punto precedente si ha

$$2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = -4 + 6 - 6 + 4 = 0$$

e pertanto $p \in H$.

Per calcolare la distanza di p da π calcoliamo per prima cosa il vettore congiungente p con un punto di π, ad esempio con il punto base $(1,0,0,1)^T$:

$$\omega = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi calcolare la proiezione ortogonale di ω su $V^\perp$. Grazie a quanto osservato nei punti precedenti si ha che

$$V^\perp = \operatorname{span}\{v_3, v_4\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-3\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

e quindi

$$p_{V^\perp}(\omega) = \frac{\omega \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 + \frac{\omega \cdot v_4}{v_4 \cdot v_4} v_4 = \frac{6}{2} v_3 + 0\, v_4 = 3v_3.$$

Si calcola infine

$$d(p,\pi) = \|v_{V^\perp}(\omega)\| = 3\|v_3\| = 3\sqrt{1+0+0+1} = 3\sqrt{2}.$$

(4) (a) Sia A una matrice $m \times n$ e siano B e C due matrici invertibili di taglia $m \times m$ e $n \times n$ rispettivamente. Mostrare che le matrici A, AB, AC e BAC hanno lo stesso rango.

Soluzione: Sappiamo che date due matrici X e Y per le quali sia definito il prodotto XY si ha che

$$\operatorname{rg}(XY) \leq \operatorname{rg}(X) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{rg}(XY) \leq \operatorname{rg}(Y).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}(I_m A I_n) \\ &= \operatorname{rg}(B^{-1}BACC^{-1}) \\ &= \operatorname{rg}(B^{-1}(BACC^{-1})) \\ &\leq \operatorname{rg}(BACC^{-1}) \\ &= \operatorname{rg}((BAC)C^{-1}) \\ &\leq \operatorname{rg}(BAC). \end{aligned}$$

D'altra parte $\operatorname{rg}(BAC) \leq \operatorname{rg}(BA) \leq \operatorname{rg}(A)$, e quindi

$$\operatorname{rg}(BAC) = \operatorname{rg}(A).$$

Effettuando in particolare le scelte $B = I_m$ e $C = I_n$ si ha infine che

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(I_m AC) = \operatorname{rg}(AC) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(BAI_m) = \operatorname{rg}(BA).$$