Secondo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica. 16 febbraio 2021

Regole d'esame. Durata: **90 minuti**. È vietato l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mostrare i passaggi e cerchiare le risposte.

(1) Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) : \ a + d = 0 \right\}$$

e sia $h \in \mathbf{R}$ un parametro. Sia $f_h : V \to V$ l'endomorfismo tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 2 e tale che

$$f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & -h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-h & 5-2h \\ 6-h & h-4 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini una base B di V. Si determini la matrice di f_h rispetto alla base B.
Soluzione: Affinché f_h sia ben definita, basta verificare che i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di V. Data una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in V$ mostriamo che esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

La precedente equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha = b \\ \alpha - \beta + \gamma = c \end{cases} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \beta = \frac{1}{2}(a-c) \\ \gamma = \frac{1}{2}(a+c) - b. \end{cases}$$

L'esistenza di soluzioni è equivalente al fatto che le tre matrici indicate siano dei generatori per V, mentre il fatto che per ottenere la matrice nulla (corrispondente ai valori $a = b = c = 0$) l'unica soluzione del sistema sia la terna $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ equivale all'indipendenza lineare di queste tre matrici. Pertanto possiamo scegliere come base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osserviamo anche che abbiamo trovato l'espressione esplicita dell'isomorfismo $\varphi_B : V \longrightarrow \mathbf{R}^3$ subordinato alla scelta della base B:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_B : & V & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2}(a-c) \\ \frac{1}{2}(a+c) - b \end{pmatrix}. \end{array}$$

Grazie a questo isomorfismo è facile vedere che f_h è definita da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &\longmapsto 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & -h \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 4-h & 5-2h \\ 6-h & h-4 \end{pmatrix} = (5-2h) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e pertanto la matrice che rappresenta f_h rispetto alla base B è

$$M_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5-2h \\ 0 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}.$$

(b) Si determinino il nucleo e l'immagine di f_h al variare di $h \in \mathbf{R}$.
Soluzione: Calcoliamo il determinante della matrice M_h sviluppandolo secondo la regola di Laplace lungo la prima colonna:

$$\det(M_h) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5-2h \\ 0 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix} = 2(h^2-1).$$

Pertanto per $h \neq \pm 1$ la matrice ha determinante non nullo e rappresenta quindi un isomorfismo. Ciò significa che in corrispondenza di tali valori f_h è iniettiva (quindi $\ker(f_h) = \{0\}$) e suriettiva (quindi $\operatorname{im}(f_h) = V$).
Concentriamoci ora sul valore $h = 1$. Si ha che

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e che una sua forma a scala ottenuta applicando operazioni di Gauss è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo due pivot in corrispondenza delle prime due colonne e quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza il nucleo ha dimensione $3-2=1$ e si nota che il vettore $(-2,1,1)^T$ è annullato dalla matrice. Di conseguenza

$$\ker(f_h) = \operatorname{span}\left\{-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\};$$

$$\operatorname{im}(f_h) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Procediamo analogamente per $h = -1$. Si ha che

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e che una sua forma a scala ottenuta applicando operazioni di Gauss è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo due pivot in corrispondenza delle prime due colonne e quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza il nucleo ha dimensione $3-2=1$ e si nota che il vettore $(3,1,-1)^T$ è annullato dalla matrice. Di conseguenza

$$\ker(f_h) = \operatorname{span}\left\{3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\};$$

$$\operatorname{im}(f_h) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(c) Determinare $f_h^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soluzione: Dal momento che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 2 si ha che

$$f_h\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_h\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ è una controimmagine. Tutte le controimmagini si ottengono da una particolare aggiungendo elementi di $\ker(f_h)$, pertanto

$$f_h^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix} & (\lambda\in\mathbf{R}) \quad \text{per } h=1,\\ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} & (\lambda\in\mathbf{R}) \quad \text{per } h=-1,\\ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & \quad\quad\quad\quad \text{altrimenti.}\end{cases}$$

(2) Sia

$$A = \begin{pmatrix}7 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -5 & -1\\ 0 & -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

In questo esercizio si può assume che il polinomio caratteristico di A è $(t-3)^2(t+1)^2$. Si determini la forma di Jordan J di A e una base di autovettori generalizzati.

Soluzione: La matrice A ha due autovalori, 3 e -1, entrambi di molteplicità algebrica 2. Consideriamo la matrice $A-3I_4$ e riduciamola in forma a scala mediante operazioni di Gauss:

$$A-3I_4 = \begin{pmatrix}4 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -8 & -1\\ 0 & -4 & 0 & -4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 0 & -8 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vediamo quindi che $x_4 = 2x_1 - 4x_3$ e $x_2 = -x_4 = -2x_1 + 4x_3$. Pertanto una base per l'autospazio relativo all'autovalore 3 è

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\\ -4\end{pmatrix}\right\}.$$

Consideriamo la matrice $A+I_4$ e riduciamola in forma a scala mediante operazioni di Gauss:

$$A+I_4 = \begin{pmatrix}8 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vediamo quindi che $x_4 = x_2 = 0$ e $x_1 = x_3$. Pertanto una base per l'autospazio relativo all'autovalore 3 è

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Da qui possiamo già dedurre la forma canonica di Jordan di A: il blocco relativo all'autovalore 3 è composto da due blocchi elementari di Jordan di dimensione 1, mentre il blocco relativo all'autovalore -1 è composto da un unico blocco elementare di Jordan di dimensione 2, così

$$J = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Per determinare una base di autovettori generalizzato dobbiamo proseguire: calcoliamo $(A+I_4)^2$ e riduciamola a scala.

$$(A+I_4)^2 = \begin{pmatrix}32 & 8 & -32 & 0\\ 0 & 16 & 0 & 0\\ 16 & 8 & -16 & 0\\ 0 & -16 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Quindi si ha $x_2 = 0$ e $x_3 = x_1$, e così una base per l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore -1 è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deduciamo quindi che una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovalori generalizzati per A è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Sia $g : \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \times \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbf{R}$ il prodotto scalare $(p, q) \mapsto p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
Soluzione: Si calcola facilmente che

$$\begin{aligned} &g(1,1) = 4 \\ &g(1,x) = 6 \\ &g(1,x^2) = 14 \\ &g(x,x) = 14 \\ &g(x,x^2) = 36 \\ &g(x^2,x^2) = 98, \end{aligned}$$

e quindi g è rappresentato nella base data dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}.$$

(b) Si determini una base ortogonale di $V = \operatorname{span}(1, x)$ rispetto a questo prodotto scalare.
Soluzione: Applichiamo il procedimento di Gram–Schmidt a $v_1 = 1$, $v_2 = x$. Si ha quindi $w_1 = v_1 = 1$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{g(v_2, w_1)}{w_1, w_1} w_1 = x - \frac{g(x,1)}{g(1,1)} \cdot 1 = x - \frac{6}{4} \cdot 1 = x - \frac{3}{2}.$$

(c) Si determini la proiezione ortogonale di x^2 su $V = \operatorname{span}(1, x)$.
Soluzione: Grazie alla base ortogonale trovata nel punto precedente si calcola che la proiezione di x^2 su $\operatorname{span}(1, x)$ è data da

$$\frac{g(1,x^2)}{g(1,1)} \cdot 1 + \frac{g\left(x - \frac{3}{2}, x^2\right)}{g\left(x - \frac{3}{2}, x - \frac{3}{2}\right)} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Calcoliamo a parte

$$g\left(x - \frac{3}{2}, x^2\right) = g\left(x, x^2\right) - \frac{3}{2} g\left(1, x^2\right) = 36 - \frac{3}{2} \cdot 14 = 15$$

e

$$g\left(x - \frac{3}{2}, x - \frac{3}{2}\right) = g\left(x, x\right) - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot g\left(x, 1\right) + \frac{9}{4} \cdot g\left(1, 1\right) = 14 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 + \frac{9}{4} \cdot 4 = 5.$$

Così la proiezione cercata è

$$\frac{14}{4} \cdot 1 + \frac{15}{5} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} + 3\left(x - \frac{3}{2}\right) = 3x - 1.$$

(4) (a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, $g : V \times V \to K$ una forma bilineare. Si dia la definizione di un vettore isotropo per g.
Soluzione: Un vettore $v \in V$ si dice isotropo per la forma g se $g(v, v) = 0$.

(b) Sia dia un esempio di uno spazio vettoriale V, una forma bilineare non-degenere $g : V \times V \to \mathbf{R}$ e uno sottospazio $W \subset V$ tale che $\dim W > 0$ e $W \subset W^{\perp}$.
Soluzione: Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^3$ con la forma g definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora il vettore $v = e_1$ è isotropo (per definizione $g(e_1, e_1)$ è l'elemento di posto $(1,1)$ nella matrice G). Calcoliamo ora il complemento ortogonale di $W = \operatorname{span}(e_1)$: esso è dato dai vettori $(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$(1,0,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Pertanto

$$W^{\perp} = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}$$

e si nota quindi che $W \subseteq W^{\perp}$.

Secondo Appello di Geometria

CS in Astronomia, CS in Fisica. 16 febbraio 2021

Regole d'esame. Durata: **90 minuti**. È vietato l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mostrare i passaggi e cerchiare le risposte.

(1) Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) : \ a = d \right\}$$

e sia $h \in \mathbf{R}$ un parametro. Sia $f_h : W \to W$ l'endomorfismo tale che $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 2 e tale che

$$f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-h & 5-2h \\ 6-h & 4-h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & h \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini una base B di W. Si determini la matrice di f_h rispetto alla base B.

Soluzione: Affinché f_h sia ben definita, basta verificare che i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di W. Data una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in W$ mostriamo che esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

La precedente equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha = b \\ \alpha + \beta - \gamma = c \end{cases} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \beta = \frac{1}{2}(a+c) - b \\ \gamma = \frac{1}{2}(a-c). \end{cases}$$

L'esistenza di soluzioni è equivalente al fatto che le tre matrici indicate siano dei generatori per V, mentre il fatto che per ottenere la matrice nulla (corrispondente ai valori $a = b = c = 0$) l'unica soluzione del sistema sia la terna $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ equivale all'indipendenza lineare di queste tre matrici. Pertanto possiamo scegliere come base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osserviamo anche che abbiamo trovato l'espressione esplicita dell'isomorfismo $\varphi_B : V \longrightarrow \mathbf{R}^3$ subordinato alla scelta della base B:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_B : & W & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2}(a+c) - b \\ \frac{1}{2}(a-c) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Grazie a questo isomorfismo è facile vedere che f_h è definita da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 4-h & 5-2h \\ 6-h & 4-h \end{pmatrix} = (5-2h) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & h \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e pertanto la matrice che rappresenta f_h rispetto alla base B è

$$M_h = \begin{pmatrix} 2 & 5-2h & 1 \\ 0 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}.$$

(b) Si determinino il nucleo e l'immagine di f_h al variare di $h \in \mathbf{R}$.
Soluzione: Calcoliamo il determinante della matrice M_h sviluppandolo secondo la regola di Laplace lungo la prima colonna:

$$\det(M_h) = \det \begin{pmatrix} 2 & 5-2h & 1 \\ 0 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix} = 2(h^2-1).$$

Pertanto per $h \neq \pm 1$ la matrice ha determinante non nullo e rappresenta quindi un isomorfismo. Ciò significa che in corrispondenza di tali valori f_h è iniettiva (quindi $\ker(f_h) = \{0\}$) e suriettiva (quindi $\mathrm{im}(f_h) = W$).
Concentriamoci ora sul valore $h = 1$. Si ha che

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e che una sua forma a scala ottenuta applicando operazioni di Gauss è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo due pivot in corrispondenza delle prime due colonne e quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza il nucleo ha dimensione $3-2=1$ e si nota che il vettore $(-2,1,1)^T$ è annullato dalla matrice. Di conseguenza

$$\ker(f_1) = \mathrm{span}\left\{ -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathrm{im}(f_1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Procediamo analogamente per $h = -1$. Si ha che

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e che una sua forma a scala ottenuta applicando operazioni di Gauss è

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo due pivot in corrispondenza delle prime due colonne e quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza il nucleo ha dimensione $3-2=1$ e si nota che il vettore $(3,-1,1)^T$ è annullato dalla matrice. Di conseguenza

$$\ker(f_{-1}) = \mathrm{span}\left\{ 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathrm{im}(f_{-1}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Determinare $f_h^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione: Dal momento che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 2 si ha che

$$f_h \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_h\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ è una controimmagine. Tutte le controimmagini si ottengono da una particolare aggiungendo elementi di $\ker(f_h)$, pertanto

$$f_h^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix} & (\lambda\in\mathbf{R}) \quad \text{per } h=1,\\ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix} & (\lambda\in\mathbf{R}) \quad \text{per } h=-1,\\ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

(2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

In questo esercizio si può assume che il polinomio caratteristico di A è $(t-2)^2(t-1)^2$. Si determini la forma di Jordan J di A e una base di autovettori generalizzati.

Soluzione: La matrice A ha due autovalori, 2 e 1, entrambi di molteplicità algebrica 2. Consideriamo la matrice $A-2I_4$ e riduciamola in forma a scala mediante operazioni di Gauss:

$$A-2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -3 & -3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vediamo quindi che $x_2 = -3x_3 - x_4$ e $x_1 = 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3x_3$. Pertanto una base per l'autospazio relativo all'autovalore 2 è

$$\left\{\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Consideriamo la matrice $A-I_4$ e riduciamola in forma a scala mediante operazioni di Gauss:

$$A-I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & -3 & -2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vediamo quindi che $x_1 = x_3 = 0$ e $3x_2 = -2x_4$. Pertanto una base per l'autospazio relativo all'autovalore 3 è

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Da qui possiamo già dedurre la forma canonica di Jordan di A: il blocco relativo all'autovalore 2 è composto da due blocchi elementari di Jordan di dimensione 1, mentre il blocco relativo all'autovalore 1 è composto da un unico blocco elementare di Jordan di dimensione 2, così

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Per determinare una base di autovettori generalizzati dobbiamo proseguire: calcoliamo $(A-I_4)^2$ e riduciamola a scala.

$$(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0\\ 1 & 3 & 9 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -3 & -12 & -2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Quindi si ha $x_3 = 0$ e $x_1 = -3x_2 - 2x_4$, e così una base per l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 1 è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deduciamo quindi che una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovalori generalizzati per A è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Sia $g : \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \times \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbf{R}$ il prodotto scalare $(p, q) \mapsto p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
Soluzione: Si calcola facilmente che

$$\begin{aligned} &g(1,1) = 3 \\ &g(1,x) = 0 \\ &g(1,x^2) = 2 \\ &g(x,x) = 2 \\ &g(x,x^2) = 0 \\ &g(x^2,x^2) = 2, \end{aligned}$$

e quindi g è rappresentato nella base data dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Si determini una base ortogonale di $V = \operatorname{span}(1, x^2)$ rispetto a questo prodotto scalare.
Soluzione: Applichiamo il procedimento di Gram–Schmidt a $v_1 = x^2$, $v_2 = 1$. Si ha quindi $w_1 = v_1 = x^2$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{g(v_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} w_1 = 1 - \frac{g(1, x^2)}{g(x^2, x^2)} \cdot x^2 = 1 - \frac{2}{2} \cdot x^2 = 1 - x^2.$$

(c) Si determini la proiezione ortogonale di $x^2 + 2x + 1$ su $W = \operatorname{span}(x^2)$.
Soluzione: Posto $p = x^2 + 2x + 1$, la proiezione cercata è

$$\frac{g(p, x^2)}{g(x^2, x^2)} \cdot x^2.$$

Calcoliamo separatamente

$$g(p, x^2) = g(x^2, x^2) + 2 \cdot g(x, x^2) + g(1, x^2) = 2 + 2 \cdot 0 + 2 = 4.$$

Quindi

$$\frac{g(p, x^2)}{g(x^2, x^2)} \cdot x^2 = \frac{4}{2} \cdot x^2 = 2x^2.$$

(4) (a) Sia $V = \mathbf{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard e siano U_1 e U_2 due suoi sottospazi. Si mostri con un esempio (scegliendo U_1 e U_2) che $U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$.
Soluzione: Scegliamo i seguenti sottospazi:

$$U_1 : x_2 = x_4 = 0, \qquad U_2 = x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0.$$

Allora $U_1 \cap U_2$ è dato da $x_1 - x_3 = x_2 = x_4 = 0$ e quindi

$$U_1 \cap U_2 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Completiamo questo vettore ad una base *ortogonale* per U_1 e ad una per U_2, ottenendo

$$U_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad U_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Si ha quindi che una base ortogonale per $U_1 + U_2$ è

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Completiamo infine questa terna di vettori ad una base *ortogonale* per tutto $\mathbf{R}^4$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

A questo punto è facile osservare che

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

D'altra parte

$$U_1^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}, \qquad U_2^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

e quindi

$$U_1^\perp + U_2^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = (U_1 \cap U_2)^\perp.$$

(b) Sia $V = \mathbf{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard. Si dimostri che se U_1 e U_2 sono due sottospazi di V, allora si ha che $U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$.
Soluzione: Proponiamo una dimostrazione che si ispira a quella della formula di Grassmann. Iniziamo considerando una base *ortogonale* per $U_1 \cap U_2$:

$$U_1 \cap U_2 = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_d\}.$$

Questo è possibile perché è sempre possibile scegliere una base, e renderla ortogonale utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt.
Completiamo tale base ad una base *ortogonale* per U_1 e ad una per U_2

$$U_1 = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_d, v_{d+1}, \dots, v_s\}, \qquad U_2 = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_d, z_{d+1}, \dots, z_t\},$$

ed infine ad una base *ortogonale* per tutto lo spazio:

$$\mathbf{R}^n = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_d, v_{d+1}, \dots, v_s, z_{d+1}, \dots, z_t, x_{s+t-d+1}, \dots, x_n\}.$$

Si ha quindi che

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \operatorname{span}\{v_{d+1}, \dots, v_s, z_{d+1}, \dots, z_t, x_{s+t-d+1}, \dots, x_n\}.$$

D'altra parte

$$U_1^\perp = \operatorname{span}\{z_{d+1}, \dots, z_t, x_{s+t-d+1}, \dots, x_n\}, \qquad U_2^\perp = \operatorname{span}\{v_{d+1}, \dots, v_s, x_{s+t-d+1}, \dots, x_n\}$$

e quindi

$$U_1^\perp + U_2^\perp = \operatorname{span}\{v_{d+1}, \dots, v_s, z_{d+1}, \dots, z_t, x_{s+t-d+1}, \dots, x_n\} = (U_1 \cap U_2)^\perp.$$