

Sperimentazioni di Fisica I

Lezione 4

Algebra Booleana

*Dipartimento di Fisica e Astronomia “G. Galilei”,
Università degli Studi di Padova*

Algebra Booleana

Lezione 4: Algebra Booleana

1. Teoria degli Insiemi

Definizione di Insieme

Un **insieme** è una **collezione di oggetti**, detti **elementi** o **membri dell'insieme**.

Un insieme è **definito** quando:

1. Si specificano **individualmente** gli elementi che ne **appartengono**, es. $A = \{1,5,6\}$
2. Si definiscono **una o più regole di selezione** che permettono di stabilire se un elemento appartiene all'insieme o meno, es. $B = \{2,4,6,8\}$, ovvero gli interi positivi pari maggiori di 0 e minori di 10.

Un insieme particolare è l'**insieme vuoto**: \emptyset , $\{\}$, ovvero un insieme privo di elementi.

Definizione di Sottoinsieme

Un insieme **S** è un **sottoinsieme** di **A**, se **tutti gli elementi di S** sono anche **elementi di A**.

$$S \subset A \iff \forall x : x \in S \Rightarrow x \in A$$

L'insieme vuoto, $\{\}$, è un **sottoinsieme** di tutti gli insiemi.

L'insieme **S** è un **sottoinsieme proprio di A**, se esiste almeno **un elemento di A** che **non appartiene ad S**.

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

L'insieme **Universo**, **U**, è l'insieme che contiene **tutti gli elementi che vogliamo considerare** (indipendentemente dalla loro appartenenza ad A).

Insiemi Particolari

N, l'insieme dei numeri **naturali**

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Z, l'insieme dei numeri **relativi**

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Q, l'insieme dei numeri **razionali**

$$Q = \{1/2, 4/3, -7/5, 10, \dots\}$$

R, l'insieme dei numeri **reali**

$$R = \{\log(2), \text{radq}(8), \pi, \dots\}$$

C, l'insieme dei numeri **complessi**

$$C = \{\log(-1), \text{radq}(-1), i, \dots\}$$

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Operazioni tra Insiemi (I)

1. Uguaglianza

Due insiemi A e B sono uguali, $A = B$, se e solo se **ogni elemento di A** è anche **elemento di B** e **ogni elemento di B** è anche **elemento di A** .

$$A = B \iff \forall x, x \in A \iff x \in B$$

2. Unione

L'**unione** di due insiemi A e B è un **insieme che contiene tutti gli elementi di A e B** .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup A = A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \subseteq (A \cup B)$ and $B \subseteq (A \cup B)$;

Operazioni tra Insiemi (II)

3. Intersezione

L'**intersezione** di due insiemi A e B è un insieme che contiene **gli elementi che appartengono simultaneamente ad A e B.**

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

- $A \cap B = B \cap A$;
 - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 - $A \cap B \subseteq A$ and $A \cap B \subseteq B$;
 - $A \cap A = A$;
 - $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

L'**unione** si distribuisce sulle **intersezioni**.
L'**intersezione** si distribuisce sulle **unioni**.

Operazioni tra Insiemi (III)

4. Complemento

Il **complemento di A relativo a B**, $B \setminus A$, è l'insieme di **tutti elementi di B che non appartengono ad A**.

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ and } x \notin A\}$$

Se il **complemento** è relativo all'**intero universo U**, $U \setminus A$, si chiama **complemento assoluto**, \bar{A}

$$U \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

- $A \cup \bar{A} = U$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $\bar{U} = \emptyset$ and $\bar{\emptyset} = U$
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Operazioni tra Insiemi (IV)

5. Prodotto Cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B, **$A \times B$** , è l'insieme di tutte le **coppie ordinate (a,b)** tali che **a sia un elemento di A** e **b sia un elemento di B**.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y \in B\}$$

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Un caso interessante è il **prodotto** di un **insieme per se stesso**:

$$A \times A \equiv A^2 = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y \in A\}$$

Operazioni tra Insiemi (V)

6. Leggi di De Morgan

Dati 3 insiemi, **A**, **B** e **C**, valgono le seguenti proprietà:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Se **A** è l'intero universo **U**, allora:

$$\overline{(B \cup C)} = \overline{B} \cap \overline{C}$$

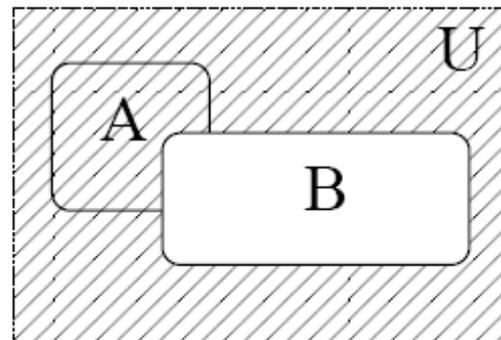
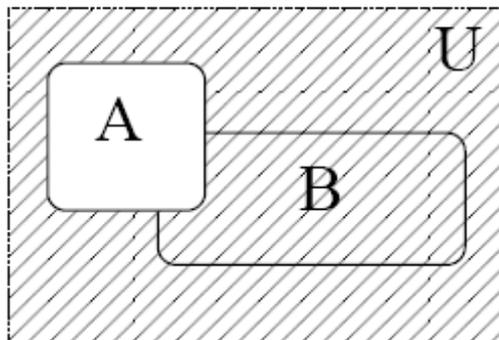
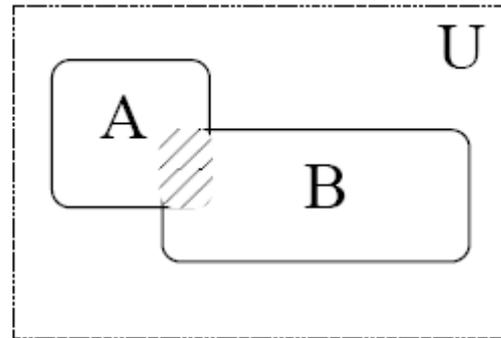
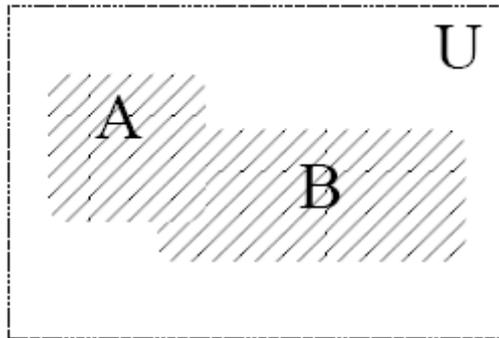
$$\overline{(B \cap C)} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

Il **complemento dell'unione** di due insiemi, B e C, è pari all'**intersezione dei complementi** dei due insiemi.

Il **complemento dell'intersezione** di due insiemi, B e C, è pari all'**unione dei complementi** dei due insiemi

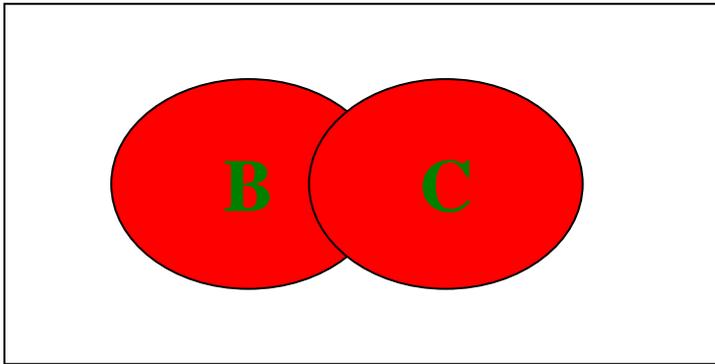
Diagrammi di Venn

Un modo molto semplice di rappresentare (e capire) le relazioni tra diversi insiemi è utilizzare i **diagrammi di Venn**.

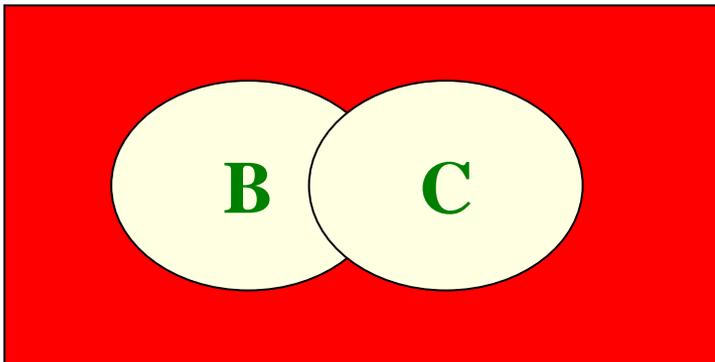


Leggi di De Morgan

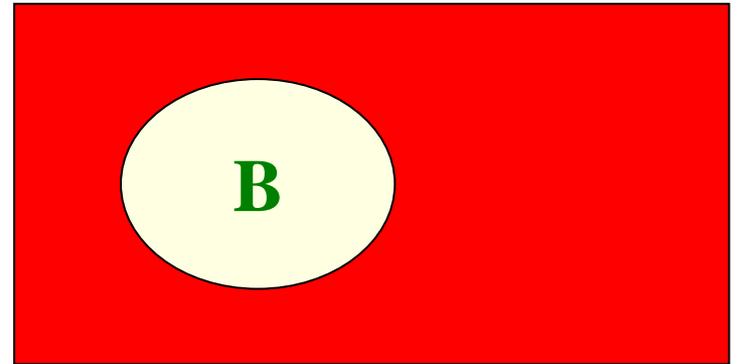
$$(B \cup C)$$



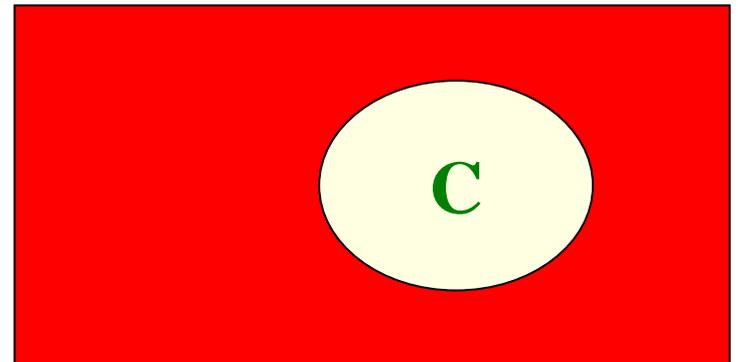
$$\overline{(B \cup C)}$$



$$\overline{B}$$



$$\overline{C}$$



$$\overline{B} \cap \overline{C}$$



Algebra Booleana

Lezione 4: Algebra Booleana

2. Definizione e Proprietà

Definizione

Dato un **insieme**, A , su cui operare, un'**algebra booleana**, $b(A)$, richiede l'**esistenza** di:

1. **due operazioni binarie** tra gli elementi dell'insieme
 - **Unione (OR logico)**, indicata con \cup , \vee , $+$
 - **Intersezione (AND logico)**, indicata con \cap , \wedge , $*$
2. **un'operazione unaria** tra gli elementi dell'insieme
 - **Complemento (NOT logico)**, indicato un una barra al di sopra dell'elemento considerato dell'insieme.

Proprietà di AND e OR

■ **Idempotenza** $a \cdot a = a + a = a$

■ **Commutativa** $a \cdot b = b \cdot a$
 $a + b = b + a$

■ **Associativa** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 $a + (b + c) = (a + b) + c$

■ **Distributiva (mutua)** $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
 $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

■ **Assorbimento** $a \cdot (a + b) = a + (a \cdot b) = a$

Elemento Neutro e Complemento

La struttura algebrica richiede l'esistenza di un **elemento neutro** per ogni operazione **binaria**:

■ **0** per l'**OR** logico $0 \cdot a = 0$

$$0 + a = a$$

■ **1** per l'**AND** logico $1 \cdot a = a$

$$1 + a = 1$$

Ogni **elemento a** di **b(A)** ed il suo **complemento \bar{a}** di **b(A)** soddisfano le seguenti espressioni:

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + \bar{a} = 1$$

Principio di Dualità

Data un'espressione tra gli elementi di un'algebra booleana è sempre possibile dedurre una **relazione duale**, ottenuta **scambiando tra loro**

- gli **operatori logici AND ed OR** (**AND** \leftrightarrow **OR**)
- gli **elementi neutri 0 ed 1** (**0** \leftrightarrow **1**)

Relazione Ordinaria

$$a + \bar{a} = 1$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

Relazione Duale

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + (a \cdot b) = a$$

Idempotenza

Relazione Ordinaria

Idempotenza: $a + a = a$

$$\begin{aligned}a + a &= (a + a) * \mathbf{1} \\ &= (a + a) * (\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) \\ &= a + (\mathbf{a} * \bar{\mathbf{a}}) \\ &= a + \mathbf{0} \\ &= a\end{aligned}$$

Relazione Duale

Idempotenza: $a * a = a$

$$\begin{aligned}a * a &= (a * a) + \mathbf{0} \\ &= (a * a) + (\mathbf{a} * \bar{\mathbf{a}}) \\ &= a * (\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) \\ &= a * \mathbf{1} \\ &= a\end{aligned}$$

Proprietà degli Elementi Neutri

Relazione Ordinaria

El. Neutro: $a + 0 = a$

$$\begin{aligned} a + 0 &= a + (a * \bar{a}) \\ &= (a + a) * (a + \bar{a}) \\ &= a * 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Relazione Duale

El. Neutro: $a * 1 = a$

$$\begin{aligned} a * 1 &= a * (a + \bar{a}) \\ &= (a * a) + (a * \bar{a}) \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

Unicità del Complemento

Per ogni elemento di **a** appartenente all'**algebra booleana $b(A)$** , esiste **uno ed un solo complemento \bar{a}** .

Dimostrazione per Assurdo.

Supponiamo che per ogni a , **esistano due elementi distinti \bar{a} ed \bar{e}** tali per cui:

$$\mathbf{a + \bar{a} = 1}$$

$$\mathbf{a + \bar{e} = 1}$$

$$\mathbf{a * \bar{a} = 0}$$

$$\mathbf{a * \bar{e} = 0}$$

$$\begin{aligned} \bar{e} &= 1 * \bar{e} &= (a + \bar{a}) * \bar{e} \\ &= a * \bar{e} + \bar{a} * \bar{e} &= 0 + \bar{a} * \bar{e} \\ &= a * \bar{a} + \bar{a} * \bar{e} &= \bar{a} * (a + \bar{e}) \\ &= \bar{a} * 1 &= \bar{a} \end{aligned}$$

Pertanto, **$\bar{a} = \bar{e}$**

Doppio Complemento

Per ogni elemento di **a** appartenente all'**algebra booleana b(A)**, il **doppio complemento di a è l'elemento originale**.

Dimostrazione, sfruttando la **definizione di complemento**.

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} + \overline{\bar{a}} = 1 & & \bar{a} + a = 1 \\ \bar{a} * \overline{\bar{a}} = 0 & \text{e} & \bar{a} * a = 0 \end{array}$$

a ed $\bar{\bar{a}}$ sono **entrambi complementi di \bar{a}** . Ma abbiamo appena dimostrato l'unicità del complemento.

Pertanto, **$a = \bar{\bar{a}}$**

Legge di Assorbimento (I)

Relazione Ordinaria

$$\mathbf{a + (a * b) = a}$$

$$\begin{aligned} a + (a * b) &= (a * 1) + (a * b) \\ &= a * (1 + b) \\ &= a * 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Relazione Duale

$$\mathbf{a * (a + b) = a}$$

$$\begin{aligned} a * (a + b) &= (a + 0) * (a + b) \\ &= a + (0 * b) \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

Legge di Assorbimento (II)

Relazione Ordinaria

$$\mathbf{a + (\bar{a} * b) = a + b}$$

$$\begin{aligned} a + (\bar{a} * b) &= (a + \bar{a}) * (a + b) \\ &= 1 * (a + b) \\ &= a + b \end{aligned}$$

Relazione Duale

$$\mathbf{a * (\bar{a} + b) = a * b}$$

$$\begin{aligned} a * (\bar{a} + b) &= (a * \bar{a}) + (a * b) \\ &= 0 + (a * b) \\ &= a * b \end{aligned}$$

Teorema di De Morgan (I)

Dati due elementi **a ed e** dell'**algebra booleana b(A)**, valgono le seguenti relazioni:

$$\overline{a + e} = \bar{a} * \bar{e}$$

$$\overline{a * e} = \bar{a} + \bar{e}$$

La dimostrazione si basa sulla **definizione di complemento**.

Mostriamo dapprima che **per entrambi**, $\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$, l'**OR logico con (a + e)** è 1.

$$\begin{aligned} 1 &= (a + e) + \overline{(a + e)} &&= (a + e) + \bar{a} * \bar{e} \\ &&&= e + (a + \bar{a} * \bar{e}) \\ &&&= e + ((a + \bar{a}) * (a + \bar{e})) \\ &&&= e + (1 * (a + \bar{e})) \\ &&&= a + (e + \bar{e}) \\ &&&= a + 1 \\ &&&= 1 \end{aligned}$$

Teorema di De Morgan (II)

Mostriamo ora che **per ambo i membri, $\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$, l'AND logico con $(a + e)$ è 0.**

$$\begin{aligned} 0 &= (a + e) * \overline{(a + e)} &= (a + e) * (\bar{a} * \bar{e}) \\ & &= a * (\bar{a} * \bar{e}) + e * (\bar{a} * \bar{e}) \\ & &= (a * \bar{a}) * \bar{e} + \bar{a} * (e * \bar{e}) \\ & &= 0 * \bar{e} + \bar{a} * 0 \\ & &= 0 + 0 \\ & &= 0 \end{aligned}$$

Pertanto, $\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$, risultano entrambi **complementi di $(a + e)$** . Per **l'unicità del complemento**, abbiamo verificato:

$$\overline{a + e} = \bar{a} * \bar{e}$$

La **seconda relazione è duale** a quella appena dimostrata.

Applicazione

Complementiamo entrambe le relazioni del teorema di De Morgan

$$a + e = \overline{\bar{a} * \bar{e}}$$

$$a * e = \overline{\bar{a} + \bar{e}}$$

E' evidente come l'**operatore logico OR** si possa scrivere come una **combinazione degli operatori logici NOT ed AND**.

In modo del tutto simile, l'**operatore logico AND** si può scrivere come una **combinazione degli operatori logici NOT ed OR**.

Algebra Booleana

Lezione 4: Algebra Booleana

3. Algebra Booleana a 2 Elementi

Algebra $A = \{0,1\}$

Consideriamo l'**insieme $A = \{0,1\}$** di due elementi.

Date due variabili booleane $x, y \in A$, si definiscono **due operazioni binarie “+”, “*”** e l'**operazione unaria di complementazione “-”**:

OR

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

x	\bar{x}
0	1
1	0

Verifica delle Proprietà (I)

■ Idempotenza:

$$\mathbf{x + x = x ?}$$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 + 1 = 1 \quad \text{ok}$$

■ Idempotenza:

$$\mathbf{x * x = x ?}$$

$$0 * 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 * 1 = 1 \quad \text{ok}$$

■ Elemento Neutro:

$$\mathbf{x + 0 = x ?}$$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 + 0 = 1 \quad \text{ok}$$

■ Elemento Neutro:

$$\mathbf{x * 1 = x ?}$$

$$0 * 1 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 * 1 = 1 \quad \text{ok}$$

Verifica delle Proprietà (II)

■ Complemento:

$$\mathbf{a + \bar{a} = 1 ?}$$

$$0 + 1 = 1 \quad \text{ok}$$

$$1 + 0 = 1 \quad \text{ok}$$

■ Complemento:

$$\mathbf{a * \bar{a} = 0 ?}$$

$$0 * 1 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 * 0 = 0 \quad \text{ok}$$

■ Assorbimento:

$$\mathbf{x + (x * y) = x ?}$$

$$0 + (0 * 1) = 0 + 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$0 + (0 * 0) = 0 + 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 + (1 * 1) = 1 + 1 = 1 \quad \text{ok}$$

$$1 + (1 * 0) = 1 + 0 = 1 \quad \text{ok}$$

■ Assorbimento:

$$\mathbf{x * (x + y) = x ?}$$

$$0 * (0 + 1) = 0 * 1 = 0 \quad \text{ok}$$

$$0 * (0 + 0) = 0 * 0 = 0 \quad \text{ok}$$

$$1 * (1 + 1) = 1 * 1 = 1 \quad \text{ok}$$

$$1 * (1 + 0) = 1 * 1 = 1 \quad \text{ok}$$

Verifica delle Proprietà (III)

■ Doppio Complemento:

$$a = \overline{\overline{a}} ?$$

$$0 = \overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0 \quad \text{ok}$$

■ Doppio Complemento:

$$a = \overline{\overline{a}} ?$$

$$1 = \overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1 \quad \text{ok}$$

■ Legge di De Morgan:

$$\overline{a + e} = \overline{a} * \overline{e} ?$$

$$\overline{1 + 0} = \overline{0} * \overline{1}$$

$$\overline{1} = 1 * 0$$

$$0 = 0 \quad \text{ok}$$

■ Legge di De Morgan:

$$\overline{a * e} = \overline{a} + \overline{e} ?$$

$$\overline{0 * 1} = \overline{0} + \overline{1}$$

$$\overline{0} = 1 + 0$$

$$1 = 1 \quad \text{ok}$$

Gli Operatori NAND e NOR

E' possibile costruire gli **operatori logici NAND e NOR**, applicando l'**operatore NOT agli operatori AND ed OR**, rispettivamente.

NOR = NOT OR

x	y	$\overline{x + y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\overline{(x + y)} = \overline{x} * \overline{y}$$

NAND = NOT AND

x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{(x * y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

Esercizio 9

Semplificare la seguente espressione, utilizzando le regole dell'algebra booleana:

$$\overline{abcd + abcd + \bar{a}bc + \underline{bc(a+d)} + \bar{a}bcd + \underline{\bar{b}(c+d)} + ab\bar{d} + \bar{a}b\bar{d} + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\underline{abcd} + \underline{abcd} + \bar{a}bc + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + \underline{\bar{b}c\bar{d}} + \underline{ab\bar{d}} + \underline{\bar{a}b\bar{d}} + \underline{\bar{b}c\bar{d}} + \bar{a}cd$$

$$\underline{abc(d+\bar{d})} + \bar{a}bc + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + \underline{\bar{b}(\bar{c}+c)\bar{d}} + \underline{(a+\bar{a})b\bar{d}} + \bar{a}cd$$

$$\underline{abc} + \underline{\bar{a}bc} + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + \underline{\bar{b}(\bar{d})} + \underline{b\bar{d}} + \bar{a}cd$$

$$\underline{ac(b+\bar{b})} + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + \underline{\bar{d}(\bar{b}+b)} + \bar{a}cd$$

$$\underline{ac} + \underline{\bar{a}bcd} + \underline{\bar{a}bcd} + \underline{\bar{d}} + \underline{\bar{a}cd}$$

$$\underline{c(a+\bar{a}d)} + \underline{\bar{d}(\bar{a}bc + \bar{a}bc + 1)}$$

$$\overline{c(a+d) + \bar{d}} = \overline{ca + cd + \bar{d}}$$

$$\overline{(\bar{d} + cd) + ca} = \overline{\bar{d} + c + ca}$$

$$\overline{c(1+a) + \bar{d}} = \overline{c + \bar{d}}$$

$$\bar{c}d$$

Esercizio 10

Semplificare la seguente espressione, utilizzando le regole dell'algebra booleana:

$$\overline{abcd + bc\bar{d} + abcd + \bar{a}bc\bar{d} + (\underline{a+c})bd + \bar{a}bcd + (\underline{a+b})\bar{d} + \bar{a}cd + \bar{a}d\bar{c} + \bar{a}b\bar{d} + \bar{c}ab}$$

$$\overline{\underline{abcd} + bc\bar{d} + \underline{abcd} + \bar{a}bc\bar{d} + \underline{\bar{a}bc\bar{d}} + \bar{a}bcd + \underline{\bar{a}(b)\bar{d}} + \bar{a}cd + \bar{a}(\bar{c})d + \bar{a}b\bar{d} + ab\bar{c}}$$

$$\overline{\underline{abcd} + bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \underline{\bar{a}bcd} + \bar{a}(\bar{b})\bar{d} + \bar{a}cd + \bar{a}(\bar{c})d + \bar{a}b\bar{d} + ab\bar{c}}$$

$$\overline{(\underline{a+\bar{a}})bcd + bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \underline{\bar{a}\bar{d}(\bar{b}+b)} + \bar{a}d(\underline{c+\bar{c}}) + ab\bar{c}}$$

$$\overline{\underline{bcd} + \underline{bcd} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \underline{\bar{a}\bar{d}} + \underline{\bar{a}d} + ab\bar{c}}$$

$$\overline{\underline{bc(d+\bar{d})} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \underline{\bar{a}(\bar{d}+d)} + ab\bar{c}}$$

$$\overline{\underline{bc} + \underline{\bar{a}bc\bar{d}} + \underline{\bar{a}bc\bar{d}} + \underline{\bar{a}} + \underline{ab\bar{c}}}$$

$$\overline{\underline{b(c+a\bar{c})} + \underline{\bar{a}(bc\bar{d} + b\bar{c}d + 1)}}$$

$$\overline{b(c+a) + \bar{a}} = \overline{bc + ab + \bar{a}} = \overline{bc + b + \bar{a}}$$

$$\overline{b(c+1) + \bar{a}} = \overline{\bar{a} + b}$$

$$a\bar{b}$$