

---

---

## Capitolo 3

# Misure di durata con il pendolo

---

---

Lo scopo di questa esperienza è quello di mettere a confronto tre metodi differenti per la misura del periodo di un pendolo: la misura diretta e due differenti tipi di misura indiretta.

### 3.1 Il pendolo semplice

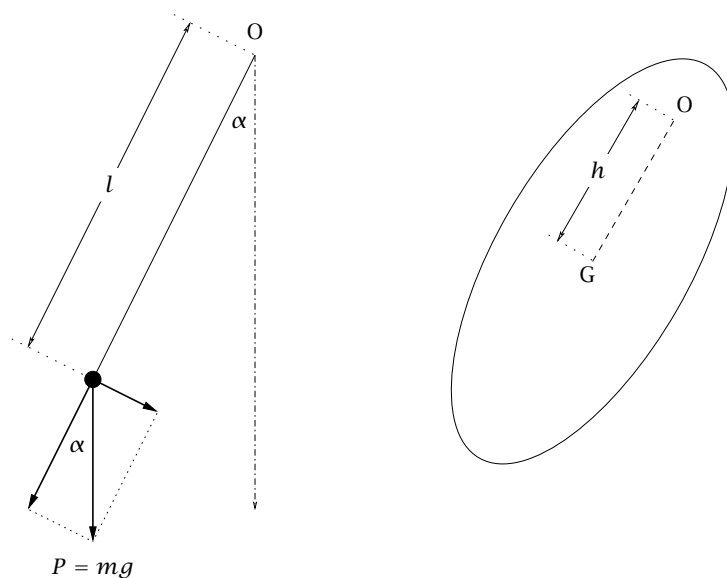


FIGURA 3a - Rappresentazione schematica del pendolo semplice e del pendolo composto.

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , sospeso ad un filo flessibile, inestensibile e senza peso, vincolato con l'altro estremo a ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso  $O$  (vedi la figura 3a). Se il pendolo semplice è inizialmente in quiete e scostato di un angolo  $\alpha > 0$  dalla posizione di equilibrio, si può facilmente ricavare l'equazione del moto: l'unica forza attiva in ogni istante è infatti la componente normale alla direzione del filo, di modulo  $mg \sin \theta$  (ove  $\theta$ , con  $|\theta| < |\alpha|$ , è il valore corrente dell'angolo del pendolo con la verticale).

Purtroppo questa equazione non ammette una soluzione analitica esatta; nel limite però delle *piccole oscillazioni*, qualora si possa ritenere che sia

$$\sin \alpha \simeq \alpha \qquad \text{e} \qquad \cos \alpha \simeq 1$$

(e quindi a maggior ragione  $\sin \theta \simeq \theta$  e  $\cos \theta \simeq 1$ ) una soluzione esatta esiste: il moto del pendolo è, in queste condizioni, un moto *periodico* ed *armonico*, con periodo

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

indipendente sia dalla massima ampiezza  $\alpha$  delle oscillazioni che dalla massa del pendolo  $m$  (*isocronismo* del pendolo).

Se l'ampiezza delle oscillazioni non si può (o non si vuole) considerare piccola, l'equazione del moto si può risolvere integrandola per serie: si sviluppa ossia  $\sin \alpha$  in serie di McLaurin,

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots$$

e si trascurano tutti i termini da un certo punto in avanti (si ottiene la soluzione delle piccole oscillazioni quando non si considerano i termini di ordine superiore al primo—od anche al secondo, volendo, visto che quello in  $\alpha^2$  è identicamente nullo).

A qualunque livello di approssimazione, comunque, il moto del pendolo è effettivamente periodico (anche se non armonico); se vogliamo ricavare il valore del suo periodo  $T$ , si può applicare il teorema della conservazione dell'energia tra la posizione estrema  $\alpha$  e quella generica  $\theta$ :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = m g l (\cos \theta - \cos \alpha)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) = \frac{8\pi^2}{T_0^2} (\cos \theta - \cos \alpha) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

e, separando le variabili ed integrando,

$$\begin{aligned} dt &= \frac{T_0}{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \\ \int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \frac{T}{4} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \end{aligned}$$

per giungere finalmente alla

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{I}$$

dove con  $\mathcal{I}$  si è indicato l'integrale definito

$$\mathcal{I} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}$$

Per calcolare il valore di  $\mathcal{I}$  si può usare la tecnica dell'integrazione per serie (dopo aver espresso le variabili  $\theta$  ed  $\alpha$  in funzione di altre che assicurino una più rapida convergenza dello sviluppo): alla fine dei calcoli si trova che il risultato vale

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{9}{1024} \alpha^4 + \dots \right) \quad (3.1)$$

in cui il primo termine corrisponde alla soluzione delle piccole oscillazioni.

Il periodo del pendolo, quindi, *dipende dall'ampiezza* massima  $\alpha$  delle oscillazioni, secondo la legge 3.1; se ci fermiamo al secondo termine nello sviluppo in serie (quello in  $\alpha^2$ ), introduciamo un errore relativo (sistematico) sul periodo dato approssimativamente da

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{9}{1024} \alpha^4$$

che è dell'ordine di una parte su mille già per oscillazioni di  $33^\circ$  (0.58 radianti), e scende ad una parte su diecimila al di sotto di  $19^\circ$  (0.33 radianti): a tutti gli effetti, nelle normali situazioni di laboratorio ( $\theta \sim 10^\circ$  ed un errore relativo di  $8 \times 10^{-6}$ ) si può ritenere che il periodo del pendolo in funzione dell'ampiezza massima  $\alpha$  sia dato *esattamente* dalla

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \quad (3.2)$$

Questo vuol dire anche che, per ogni  $\alpha > 0$ , si compie, usando per il periodo la formula delle piccole oscillazioni, un *errore sistematico*  $\Delta T$  che vale

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 \frac{\alpha^2}{16} \quad \text{cioè} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\alpha^2}{16} \quad (3.3)$$

e che può risultare o meno trascurabile a seconda delle condizioni sperimentali e del valore di  $T_0$ .

## 3.2 Il pendolo composto

Il *pendolo composto* è costituito da un corpo rigido libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso, non verticale e non passante per il baricentro; la legge del moto del pendolo composto è, per le piccole oscillazioni,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (3.4)$$

in cui si è indicato con  $I$  il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione, e con  $h$  la distanza dell'asse stesso dal baricentro; per oscillazioni non piccole vale la stessa legge prima vista nella 3.1:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{9}{1024} \alpha^4 + \dots \right)$$

ed il pendolo composto si comporta quindi *esattamente* come un pendolo semplice avente lunghezza pari a

$$l = \frac{I}{mh} \quad (3.5)$$

(che prende il nome di *lunghezza ridotta* del pendolo composto).

### 3.3 L'esperienza

Il pendolo si muove con moto periodico; quindi le sue oscillazioni costituiscono un fenomeno fisico perfettamente ripetibile ad intervalli di tempo rigorosamente costanti. La durata delle oscillazioni (il periodo) in realtà varia con la loro ampiezza secondo la 3.2: ma essa si può ritenere in prima approssimazione costante nel relativamente breve intervallo di tempo necessario alla misura dei dati, anche se l'attrito sul coltello di sospensione in realtà la riduce progressivamente nel tempo.

Gli errori sono introdotti quindi dal solo sperimentatore, nell'atto di avviare e di arrestare manualmente il cronometro; e si possono pertanto ritenere di entità *costante*, in particolare indipendenti dal numero di oscillazioni di cui si misura la durata complessiva. Se questa assunzione è da ritenersi valida, quale è la tecnica migliore, ovrerosia quella che introduce gli errori più piccoli possibili, per misurare il periodo  $T$  del pendolo, fatta l'ipotesi ulteriore di avere a disposizione un intervallo di tempo prefissato?

Se indichiamo con  $\Delta t$  il tempo a disposizione dello sperimentatore, qualora egli si prefigga di misurare la durata totale di  $M$  oscillazioni potrà effettuare un massimo di

$$N = \frac{\Delta t}{M \cdot T}$$

determinazioni; e, attribuendo ad ognuna di esse un errore  $\sigma$  (per ipotesi indipendenti da  $M$ ), la loro media aritmetica (che rappresenta la miglior stima dell'osservatore per il valore di  $M \cdot T$ ) avrà errore

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sigma \sqrt{\frac{M \cdot T}{\Delta t}} = C \sqrt{M}$$

Il valore del periodo ricavato da tale media aritmetica (dividendola per  $M$ ) avrà a sua volta un errore

$$\frac{\bar{\sigma}}{M} = \frac{C}{\sqrt{M}}$$

inversamente proporzionale alla radice di  $M$ , e dunque tanto più piccolo quanto più  $M$  è grande: in conclusione la maniera migliore di ottenere il periodo del pendolo è quella di misurare la durata di quante più oscillazioni è possibile e poi di dividere per il loro numero (sempre però che siano verificate le due condizioni date, di errore indipendente dal numero di oscillazioni considerate e di tempo costante a disposizione).

In questa esperienza si confrontano valori del periodo ottenuti con tre differenti metodi: dapprima si misura per 100 volte la durata di una oscillazione; poi per 50 volte la durata di due oscillazioni; ed infine per 25 volte la durata di quattro oscillazioni del pendolo (così da mantenere costante il tempo necessario alla misura di ogni campione).

Il cronometro viene regolato su una sensibilità di un millesimo di secondo; infatti la prontezza dei riflessi dei misuratori varia in genere tra 5 e 10 centesimi di secondo: e la cifra dei centesimi è dunque significativa.

Indichiamo con  $U_i$  ( $i = 1, \dots, 100$ );  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 50$ ); e  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, 25$ ) i risultati di tali misure. Si calcolano per prima cosa, sui tre campioni separatamente, media aritmetica ed errore quadratico medio; si controlla se vi sono misure da scartare, ed eventualmente si ripete il calcolo; infine si ricava l'errore quadratico medio della media.

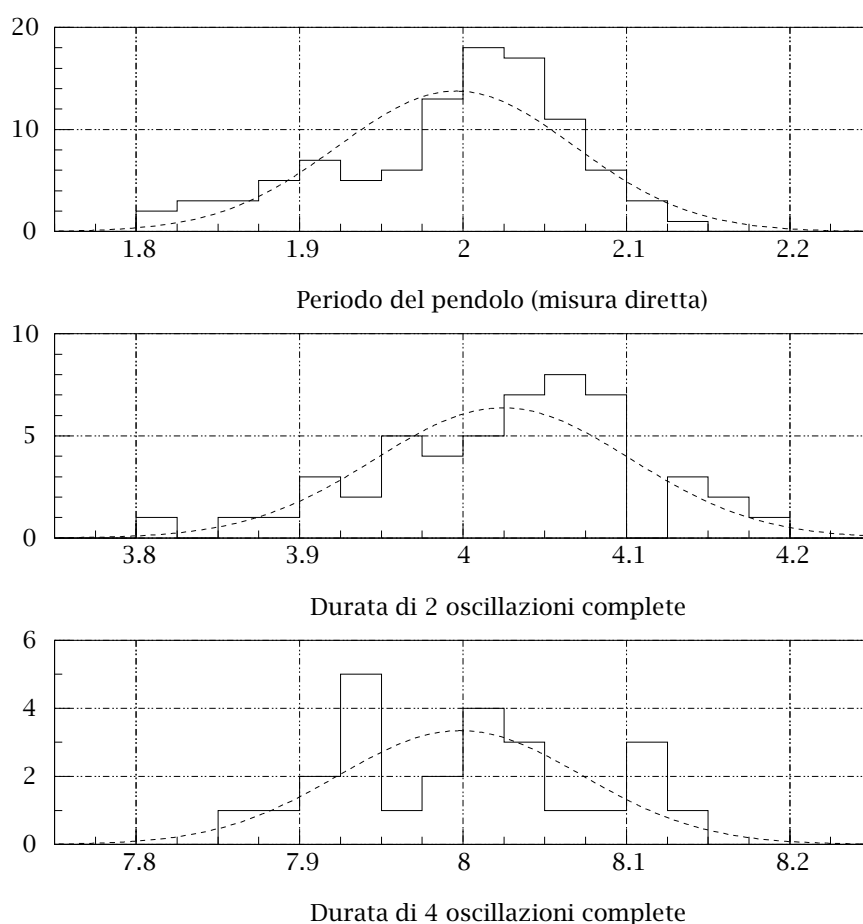


FIGURA 3b - Misure di durata con il pendolo: i dati.

Per brevità non diamo una tabella completa dei risultati delle singole misure: ri-

Campione	$\bar{x}$	$\sigma$	$\sigma_{\bar{x}}$	Risultato
U	1.9958	0.072518	0.007252	$1.9958 \pm 0.0072$
D	4.0244	0.078250	0.011066	$4.024 \pm 0.011$
Q	7.9983	0.074581	0.014916	$7.998 \pm 0.015$

TABELLA 3.1 - Misure di durata con il pendolo: i risultati.

portiamo solo gli istogrammi dei dati (figura 3b) e le grandezze statistiche (tabella 3.1).

Dagli istogrammi, in cui sono disegnate anche le Gaussiane di riferimento, si vede sia che l'andamento dei dati è grossolanamente normale (anche se vi sono grosse fluttuazioni da attribuirsi allo scarso numero di misure), e che le ampiezze delle Gaussiane sono effettivamente circa uguali. Non ha molto senso, visto lo scarso numero di misure, fare il test del  $\chi^2$  per l'accordo tra dati e distribuzione normale — meno forse per il primo campione, per il quale tale accordo è assai cattivo ( $X \approx 15.72$  da confrontare con la distribuzione del  $\chi^2$  a 7 gradi di libertà).

Gli errori quadratici medi sono, a parte questo accordo stimato ad occhio, *realmente* compatibili entro gli errori? Calcolando anche questi ultimi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_U = 0.072518 \pm \frac{0.072518}{\sqrt{2 \cdot 99}} = 0.0725 \pm 0.0052 \\ \sigma_D = 0.078250 \pm \frac{0.078250}{\sqrt{2 \cdot 49}} = 0.0782 \pm 0.0079 \\ \sigma_Q = 0.074581 \pm \frac{0.074581}{\sqrt{2 \cdot 24}} = 0.0746 \pm 0.0108 \end{array} \right.$$

ed i livelli di compatibilità sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|0.0725 - 0.0746|}{\sqrt{0.0052^2 + 0.0108^2}} = 0.18 \\ \frac{|0.0746 - 0.0782|}{\sqrt{0.0108^2 + 0.0079^2}} = 0.27 \end{array} \right.$$

ossia ottimi. I valori stimati del periodo valgono

$$\left\{ \begin{array}{l} T_U = \quad \quad \quad = 1.9958 \pm 0.0072 \\ T_D = \frac{4.0244}{2} \pm \frac{0.011}{2} = 2.0122 \pm 0.0055 \\ T_Q = \frac{7.9983}{4} \pm \frac{0.015}{4} = 1.9996 \pm 0.0037 \end{array} \right.$$

e sono anch'essi sufficientemente compatibili tra loro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|1.9958 - 1.9996|}{\sqrt{0.0072^2 + 0.0037^2}} = 0.47 \\ \frac{|1.9996 - 2.0122|}{\sqrt{0.0037^2 + 0.0055^2}} = 1.9 \end{array} \right.$$

Effettivamente il valore del periodo con l'errore più piccolo è stato ottenuto dal campione in cui è stata misurata la durata del maggior numero di oscillazioni (4); anche se esso ha le dimensioni più ridotte.