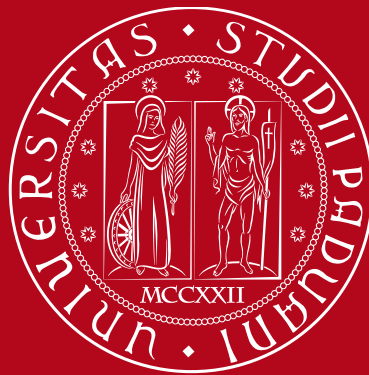
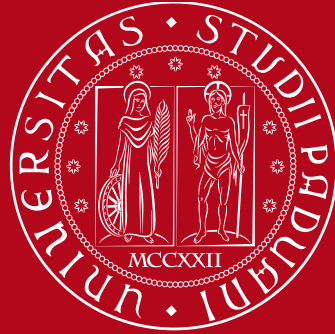


1222 • 2022
800
ANNI



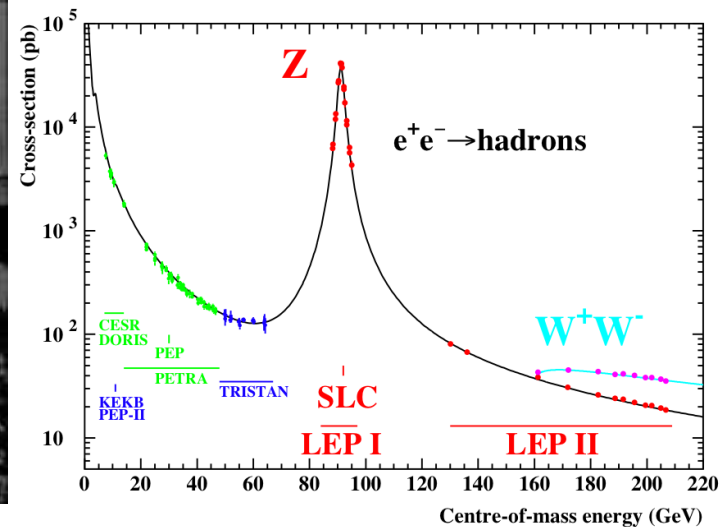
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

1222 • 2022
800
ANNI

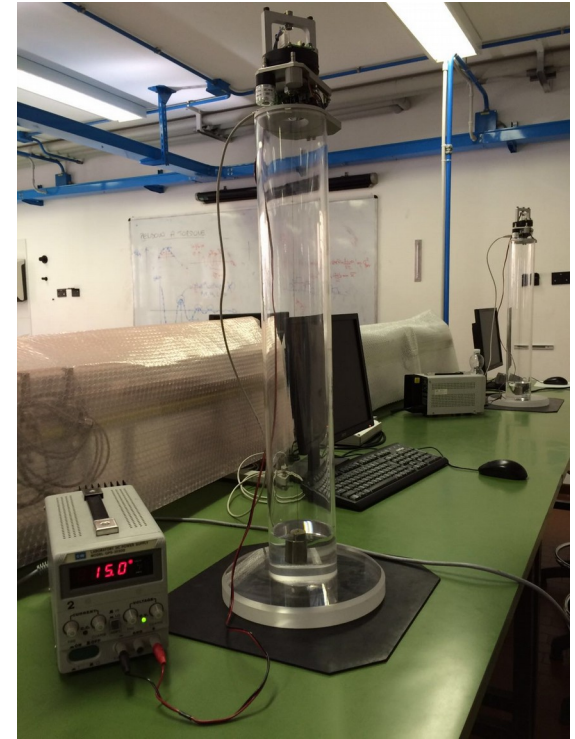
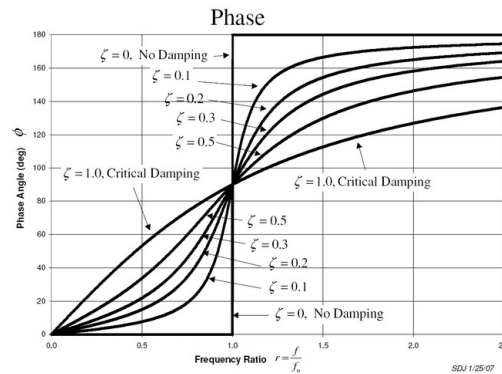
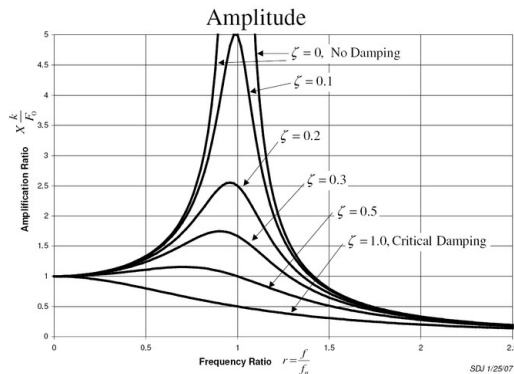


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Esperienza pendolo a torsione
SFI – AA 2020/21



■ Verifica sperimentale moto oscillatore armonico smorzato e forzato



Pendolo a torsione in dotazione labo SFI

- Equazione del moto rispetto all'asse di rotazione:

$$M_{\vartheta} = I_z \ddot{\vartheta} \quad I_z \text{ momento d'inerzia attorno all'asse } z$$

- Coordinate angolari θ . Momento torcente:

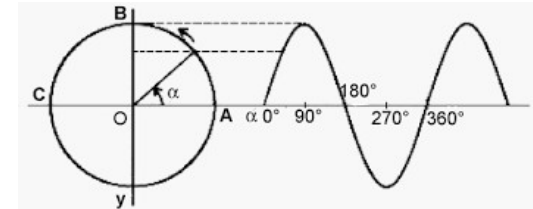
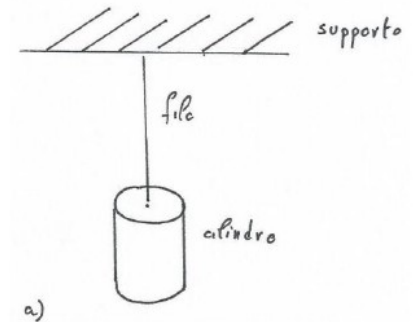
$$M_{\vartheta} = -k \vartheta \quad k \text{ dipende dalle proprietà (rigidità) del sistema e dalla sua geometria}$$

- Equazione del moto [diff secondo ordine, lineare ed omogenea]

$$\ddot{\vartheta} + \frac{k}{I_z} \vartheta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_z}} \quad \text{Pulsazione naturale del sistema}$$

- Soluzione, legge oraria:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \vartheta_0 \text{ ampiezza, } \omega_0 \text{ pulsazione, fase}$$



- Momento attrito viscoso:

$$M_a = -2 \gamma \dot{\vartheta} \quad \gamma \text{ coefficiente di smorzamento} \rightarrow \text{mezzo viscoso}$$

- Equazione del moto smorzato:

$$M_{\vartheta} + M_a = I_z \ddot{\vartheta}$$

$$-k \vartheta - 2 \gamma \dot{\vartheta} = I_z \ddot{\vartheta}$$

- Equazione del moto [diff secondo ordine, lineare ed omogenea]

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2\gamma}{I_z} \dot{\vartheta} + \frac{k}{I_z} \vartheta = 0$$

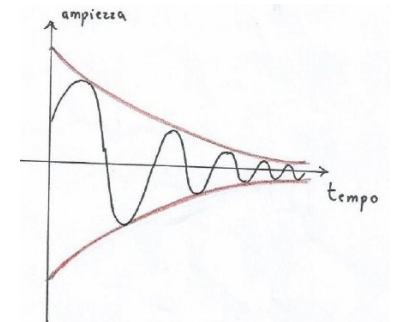
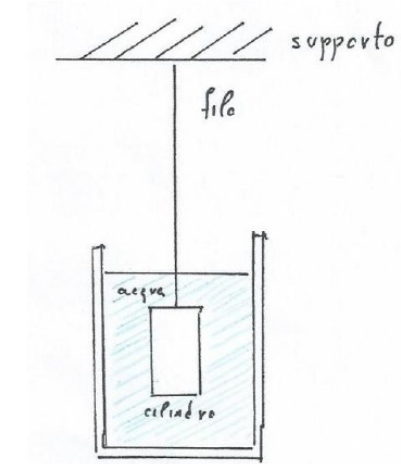
- Soluzione, legge oraria:

$$\vartheta_s(t) = \vartheta_{0,s} e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \varphi_s)$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$\vartheta_{0,s}$ ampiezza,

ω_s pulsazione smorzamento



Introduzione teorica - III

moto armonico smorzato forzato

- Momento forzante (torcente):

$$M_f = M_{0,f} \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

- Equazione del moto forzato:

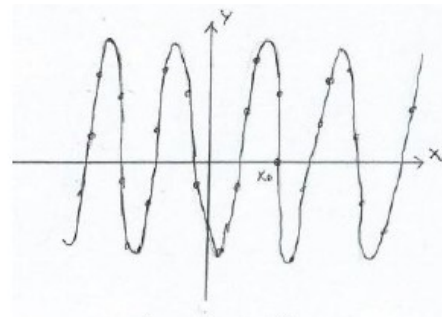
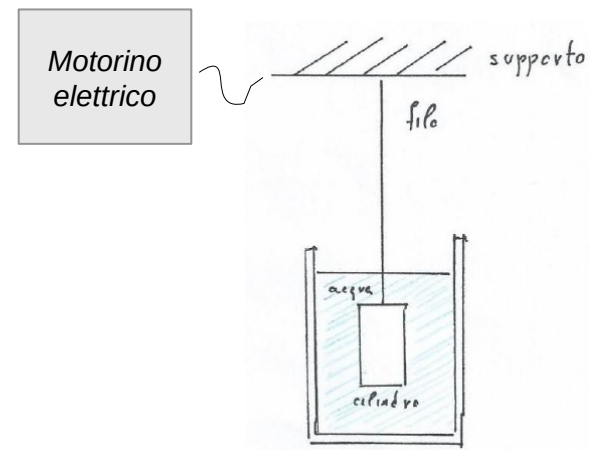
$$I_z \ddot{\vartheta} = -k \vartheta - 2 \gamma \dot{\vartheta} + M_{0,f} \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

- Equazione del moto [diff secondo ordine, lineare ed non omogenea]

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2\gamma}{I_z} \dot{\vartheta} + \frac{k}{I_z} \vartheta = \frac{M_{0,f}}{I_z} \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

- Soluzione, legge oraria: $\vartheta(t) = \vartheta_s(t) + \hat{\vartheta}$

$$\vartheta(t) = \vartheta_{0,s} e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \vartheta_{0,f} \cos(\omega_f t + \varphi_f).$$



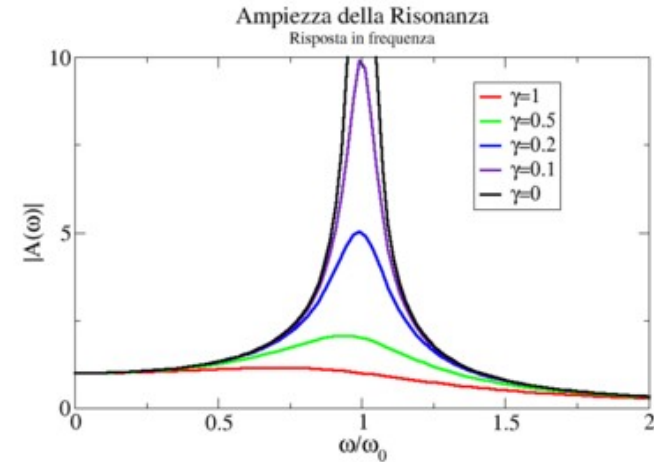
Ampiezza oscillatore - I

moto armonico smorzato forzato

- $t > 3/\gamma \rightarrow$ moto forzato, ampiezza:

$$\vartheta_{0,f} = \frac{M_{0,f}/I_z}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_f = 0 \quad \vartheta_{0,f} = \frac{M_{0,f}/I_z}{\omega_0^2} = \frac{M_{0,f}/I_z}{k/I_z} = \frac{M_{0,f}}{k} \\ \omega_f \longrightarrow +\infty \quad \vartheta_{0,f} \longrightarrow 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_f} \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} \right) = 0 \longrightarrow \vartheta_{0,f}^{(r)} \text{ Ampiezza di risonanza} \end{array} \right.$$

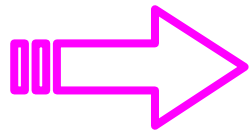


$$\frac{\partial}{\partial \omega_f} \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2} \right) = 0$$

$$\omega_f (-\omega_0^2 + \omega_f^2 + 2\gamma^2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_f = 0 \\ \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{array} \right.$$

pulsazione di risonanza



$$\vartheta_{0,f}^{(r)} = \frac{M_{0,f}/I_z}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Ampiezza di risonanza

NOTA: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\omega_s^2 - \gamma^2}$

Energia oscillatore

moto armonico smorzato forzato

Ampiezza di risonanza

$$\vartheta_{0,f}^{(r)} = \frac{M_{0,f}/I_z}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

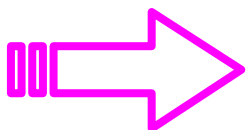
Per piccoli smorzamenti

$$\gamma \ll \omega_0$$

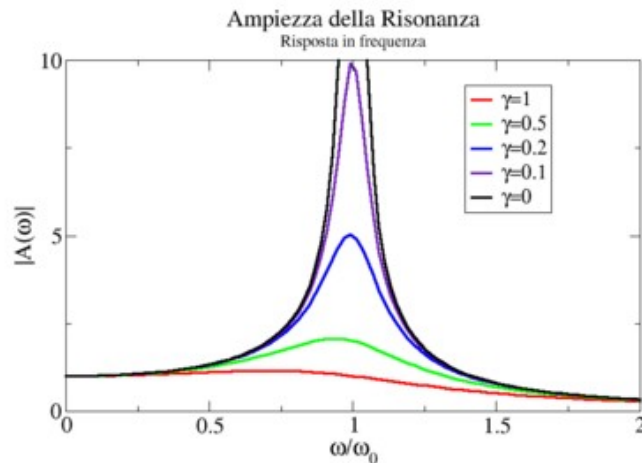
$$\vartheta_{0,f}^{(r)} \approx \frac{M_{0,f}/I_z}{2\gamma\omega_0}$$

Momento statico ($\omega_f = 0$)

$$\vartheta_{statico} = \frac{M_{0,f}/I_z}{\omega_0^2}$$



$$Q = \frac{\vartheta_{0,f}^{(r)}}{\vartheta_{statico}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$



Energia risonanza
 $\Delta\omega \sim \text{FWHM}$

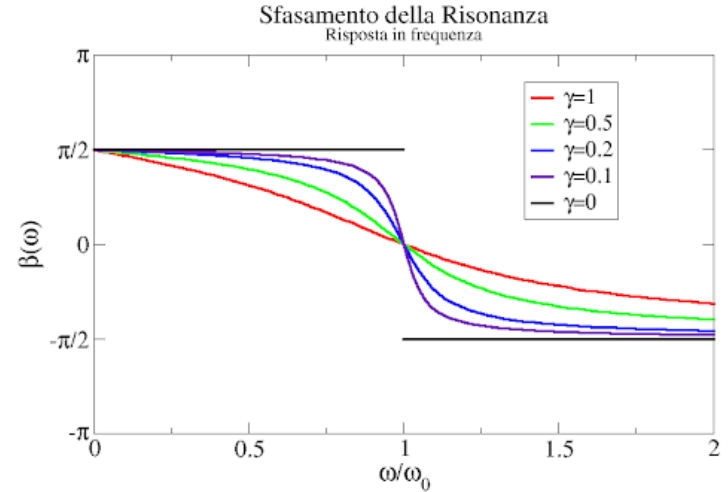
- $t > 3/\gamma \rightarrow$ moto forzato, fase:

$$\varphi_f = \operatorname{arctg} \frac{2 \gamma \omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

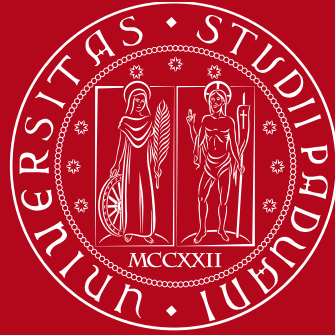
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_r < \omega_0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_r < \frac{\pi}{2}$$

fase di risonanza



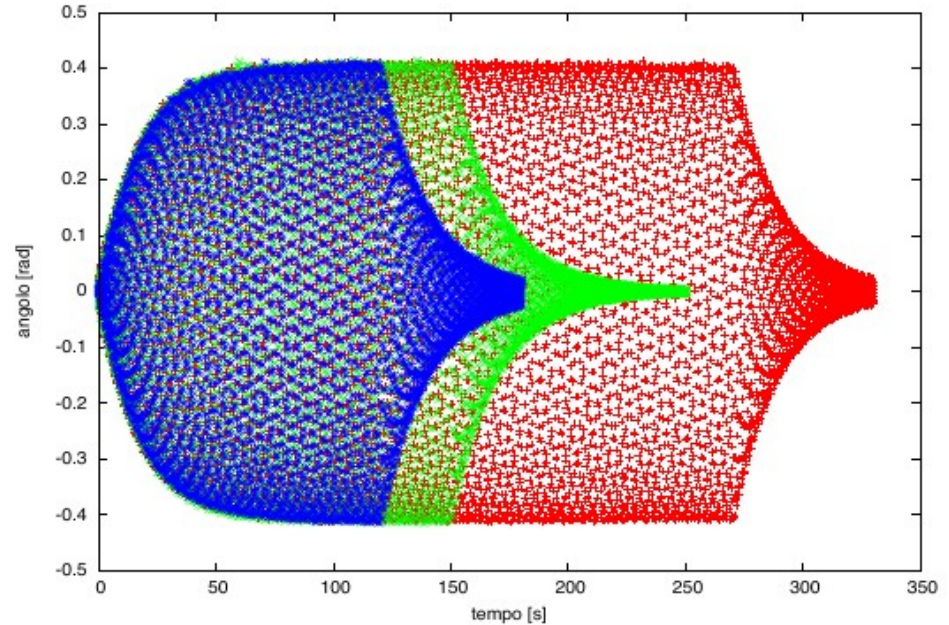
1222 • 2022
800
ANNI



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

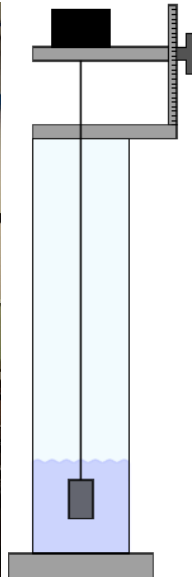
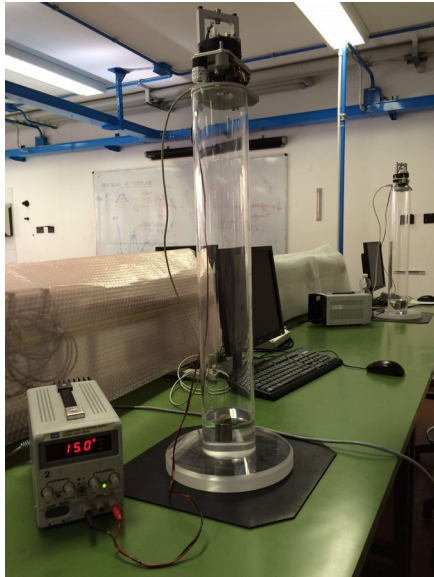
Esperienza pendolo a torsione

Verifica sperimentale
moto oscillatore
armonico smorzato e
forzato

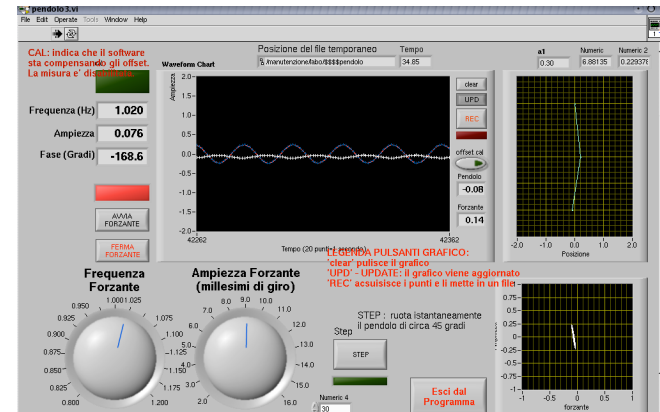


punti sperimentali esemplificativi dei vari regimi: transiente, forzato, smorzato

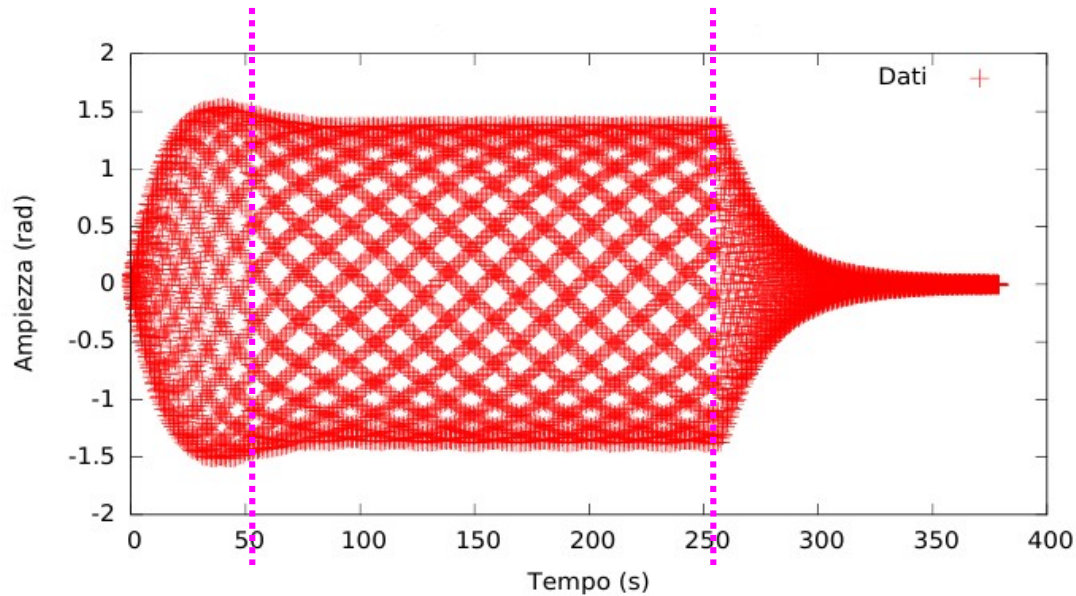
- Pendolo a torsione :
 - Massa acciaio
 - M: (115.5+0.1)g, D:(22.7+- 0.1)mm, L: (34.0+0.1)mm
 - Filo acciaio armonico: L~ 75 cm, d ~ 0.4 mm
 - motorino (generatore di potenza)
 - liquido smorzante



- Sensore oscillazione θ
- Scheda acquisizione (0.02 s)
- Computer: file di testo per ogni ν (Hz):
 - $t_0 \quad F_0 A_0$
 - $t_1 \quad F_1 A_1$
 - ...
 - $t_N \quad F_N A_N$
- $\nu \in [0.20 - 2.60]$ Hz
- F, A in millesimi di giro

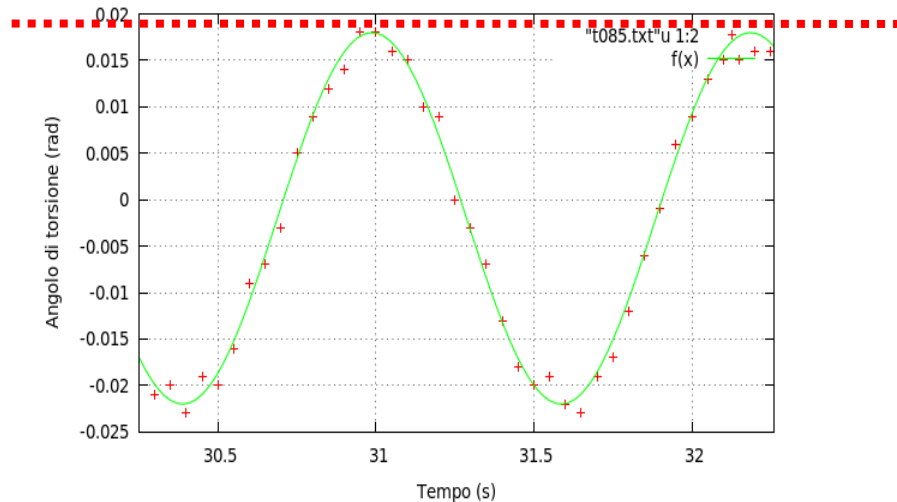


- Stima sperimentale frequenza di risonanza dal regime stazionario forzato

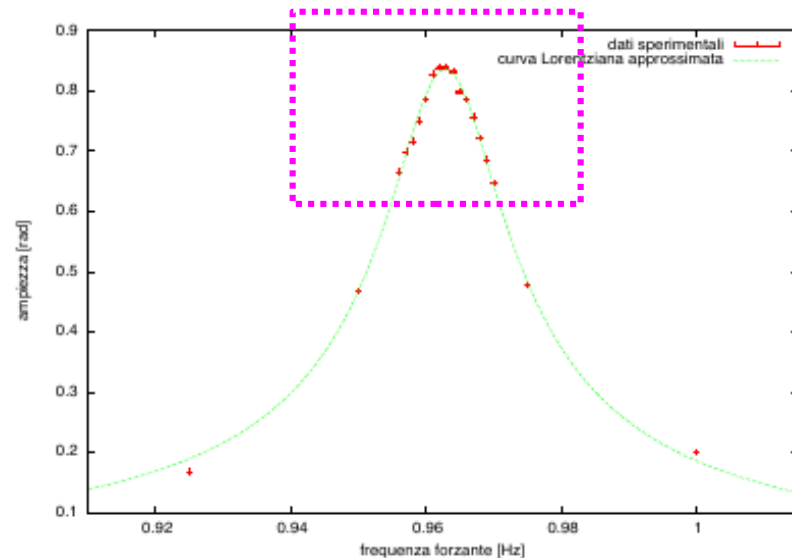


Inviluppo di punti sperimentali durante I vari regimi: transiente, forzato, smorzato

- Stimare ampiezza massima per ogni frequenza impostata e costruire la curva di risonanza tramite massimi, medie, etc (fit facoltativo)
- Caratterizzare la curva e stimarne la frequenza di risonanza tramite fit quadratico

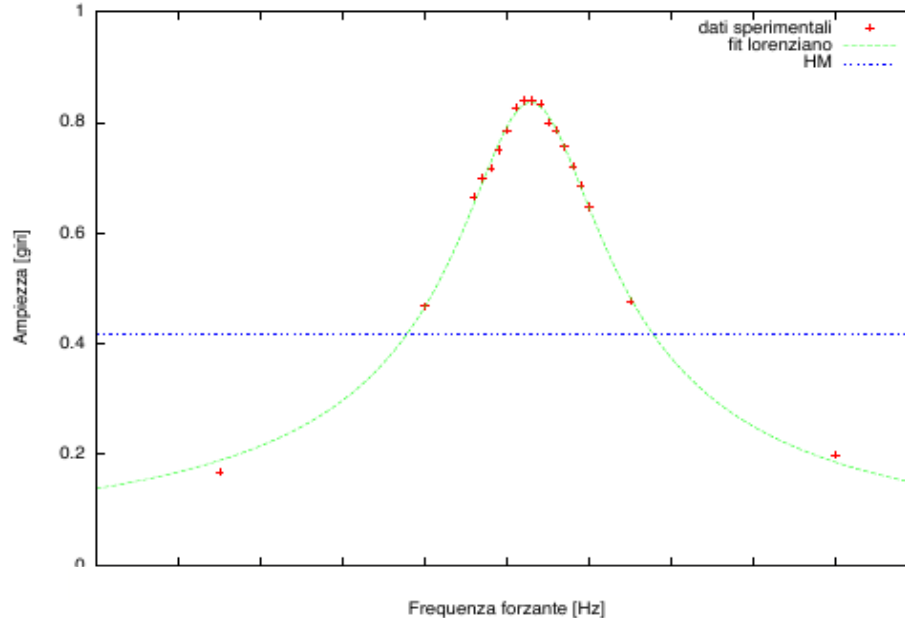


punti sperimentali in regime stazionario (forzato) per una frequenza fissata



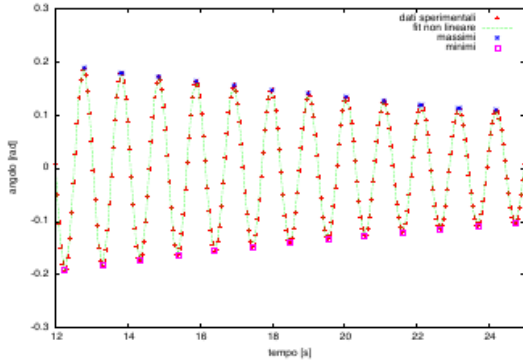
Curva di risonanza interpolata su punti sperimentali (ampiezze massime regime stazionario per tutte le frequenze impostate)

- Stima sperimentale energia oscillatore tramite larghezza a meta altezza: massimo e minimo della distribuzione necessari; fit Breit-Wigner / Cauchy / Lorentz facoltativo



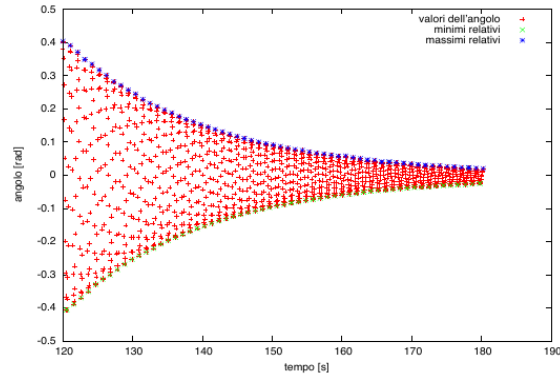
- Stima frequenza di risonanza dal moto smorzato (indipendente dalla v impostata):

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\omega_s^2 - \gamma^2}$$



punti sperimentali in regime smorzato:
stima sperimentale del periodo τ_s

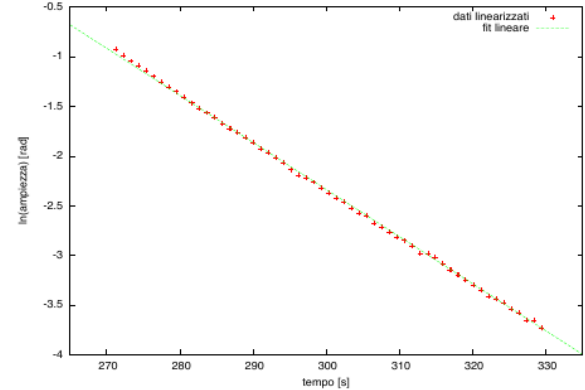
$$\tau_s \rightarrow \omega_s$$



Individuazione dei massimi:

$$\cos(\omega_s t + \varphi_s) = 1$$

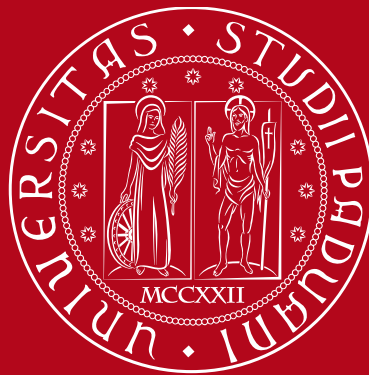
$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{0_s} e^{-\gamma t}$$



Linearizzazione dei massimi
e stima di γ

$$\ln \theta = \ln \theta_{0_s} - \gamma t$$

1222 • 2022
800
ANNI



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA