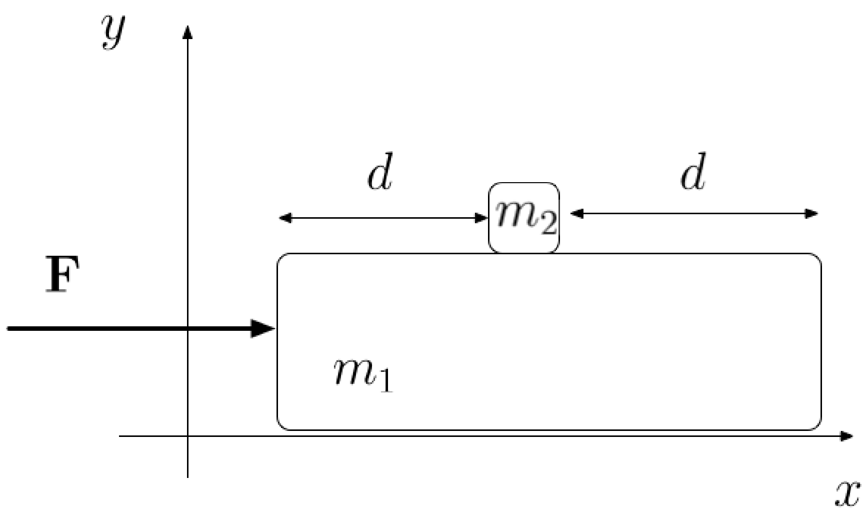
Esercizi meccanica

1 Corpo su lastra

Un blocco di massa $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, assimilabile ad un punto materiale, poggia su una lastra di massa $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ che può scorrere senza attrito su un piano orizzontale. Tra il blocco e la lastra il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu = 0.1$. La distanza iniziale del blocco dai bordi della lastra è $d = 3\,\mathrm{m}$. All'istante iniziale $t = 0$ alla lastra viene applicata la forza costante $F = 5\,\mathrm{N}$ verso destra. Si calcoli l'intervallo di tempo t_1 in secondi necessario,



affinché il blocco caschi giù dalla lastra.

Soluzione Nel sistema di riferimento solidale al piano, l'equazione del moto della lastra è

$$m_1 a_1 = F - \mu m_2 g \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g \approx 1.34\,\mathrm{m/s^2}$$

Nel sistema di riferimento solidale con la lastra (grandezze con apice), sul blocco agiscono la forza di attrito e la forza apparente

$$m_2 a_2' = \mu m_2 g - m_2 a_1 \Rightarrow a_2' = \mu g - \frac{F - \mu m_2}{m_1} \approx -0.359\,\mathrm{m/s^2}$$

Sempre nel sistema di riferimento solidale con la lastra, scegliendo come origine il bordo da cui cade il blocco, si ha

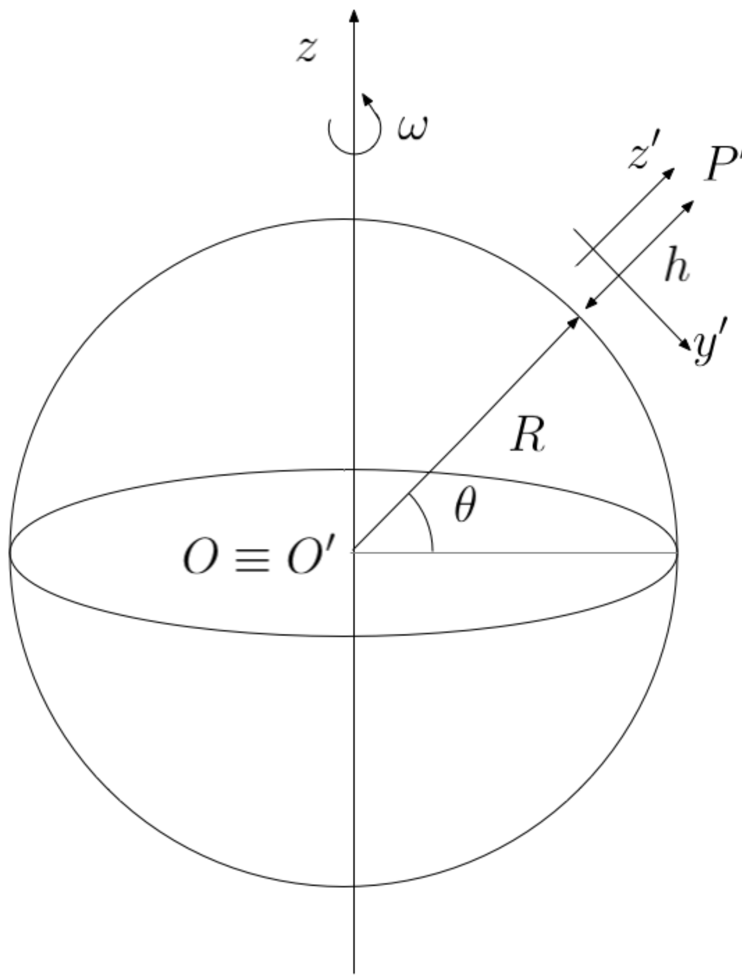
$$x' = d + \frac{1}{2}a'_2 t^2$$

Il blocco cade per $x' = 0$ all'istante t_1 dato da

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a'_2}} \approx 4.09\,\mathrm{s}$$

2 Corpo in caduta libera

Un corpo assimilabile ad un punto materiale in P' viene lasciato cadere da un'altezza $h = 100\,\mathrm{m}$ ad una latitudine $\theta = 50°$ con velocità iniziale nulla. Assumendo l'accelerazione



verticale costante ed uguale a g, si calcoli a che distanza d caschi il corpo rispetto alla congiungente il punto di partenza con il centro della terra. La velocità angolare della Terra è $\omega = 7.27 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$ ed il suo raggio é $R = 6.37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$.

Soluzione La Terra è un sistema di riferimento non inerziale e quindi un punto materiale è soggetto all'accelerazione di trascinamento che, assumendo il sistema di riferimento inerziale quello con asse z l'asse di rotazione della Terra, è data da

$$\mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}'\right) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{z}'$$

dove $\mathbf{a}_{O'} = 0$ e $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{z}' = 0$ perchè l'origine del sistema inerziale e del sistema Terra coincidono e perché la rotazione della Terra si suppone avvenire con velocità angolare costante. Inoltre, bisogna tener conto dell'accelerazione di Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$.

Poichè siamo interessati solo alla deviazione dalla verticale rispetto ad OP', ci limitiamo alle componeti delle accelerazioni perpendicolari ad OP'. Scegliamo gli assi del sistema non inerziale solidale alla Terra in modo che l'asse z' sia lungo OP' e y' sia parallelo al foglio. Sia $r = R + h$ la distanza del punto dal centro della Terra. Allora

$$\omega \times \mathbf{r} = -\omega r \sin(\pi/2 - \theta)\hat{u}_{x'} = \omega r \cos\theta \hat{u}_{x'}$$

e

$$\boldsymbol{\omega} \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega^2 r = -\omega^2 r \cos\theta \left(\sin\theta \hat{u}_{y'} + \cos\theta \hat{u}_{z'}\right)$$

La componente perpendicolare ad OP' dell'accelerazione di trascinamento è

$$a_{y'} = \omega^2 r \cos\theta \sin\theta \approx 1.66 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$$

Poiché $r/R = 1 + h/R \approx R$, quest'accelerazione si può considerare costante entro 15 parti per milione, lo spostamento lungo y' causato da quest'accelerazione vale

$$y' = \frac{1}{2} a_{y'} t^2 = \frac{1}{2} a_{y'} \frac{2h}{g} \approx 0.169\,\mathrm{m}$$

dove $t = \sqrt{2h/g} \approx 4.5\,\mathrm{s}$ è il tempo di caduta libera. Bisogna ora valutare il termine di Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$.

$$a_C = -2\omega \hat{u}_z \times -v'(t)\hat{u}_{z'} = -2\omega \cos\theta v'(t)\hat{u}_{x'} = -2\omega \cos\theta g t \hat{u}_{x'}$$

dove t è la durata della caduta libera calcolata in precedenza. La velocità lungo $\hat{u}_{x'}$ si ottiene integrando l'accelerazione

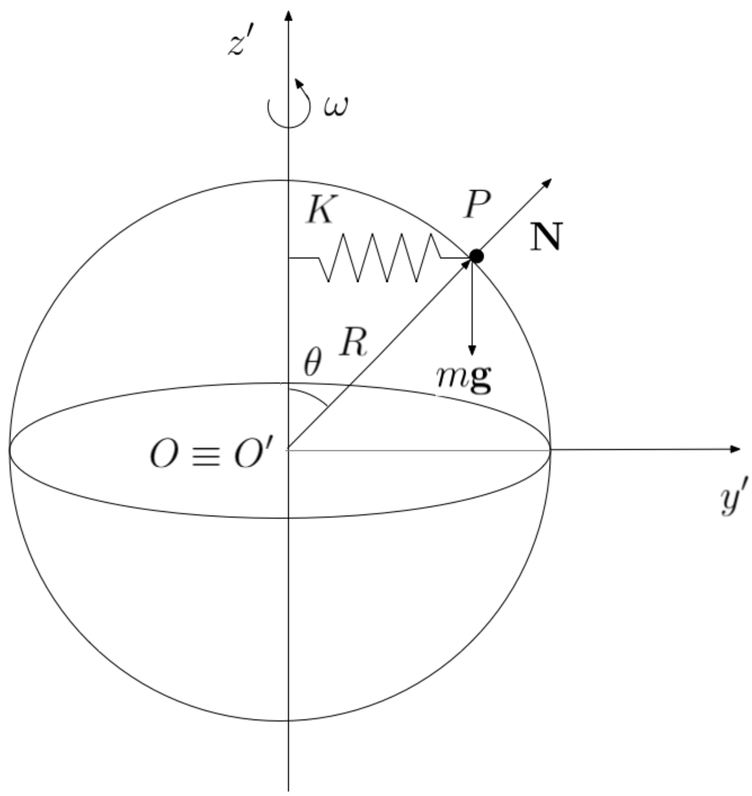
$$v'_{x'} = -2\omega g \cos\theta \int_0^t t\,\mathrm{d}t = -\omega g \cos\theta t^2$$

e lo spostamento lungo x' si ottiene integrando la velocità

$$x' = -\omega g \cos\theta \int_0^t t^2\,\mathrm{d}t = -\omega g \frac{t^3}{3} \approx 1.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

3 Punto, molla e cerchio

Un punto materiale P di massa $m = 10\,\mathrm{g}$ può scorrere senza attrito lungo una guida circolare liscia di raggio $R = 50\,\mathrm{cm}$ posta in un piano verticale. Il punto è collegato ad una molla ideale di costante elastica $K = 0.4\,\mathrm{N/m}$ il cui estrem0 può scorrere senza attrito lungo il diametro verticale della guida. La guida ruota intorno al diametro verticale con velocità angolare costante $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$. Determinare gli angoli (nel primo e quarto quadrante) θ delle posizioni di equilibrio del punto materiale, misurati a partire dal diametro verticale della guida. E quale sarebbe l'angolo se la massa fosse $m = 1\,\mathrm{g}$?



Soluzione Considero il sistema di riferimento non inerziale come in figura. Bisogna tenere conto delle forze apparenti in questo sistema. Siccome cerco le posizioni di equilibrio, la forza di Coriolis è nulla perché $v' = 0$. L'unica forza apparente è quella di trascinamento $\mathbf{F}_t = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$.

L'equilibrio delle forze richiede

$$\mathbf{F}_{\mathrm{el}} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{N} = 0$$

dove $\mathbf{N}$ è la reazione vincolare della guida. Abbiamo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{u}_{z'}$ e $\mathbf{R} = R\left(\sin\theta \hat{u}_{y'} + \cos\theta \hat{u}_{z'}\right)$

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = -\omega \hat{u}_{z'} \times (-\omega R \sin\theta \hat{u}_{x'}) = \omega^2 R \sin\theta \hat{u}_{y'}$$

Proiettando lungo gli assi:
lungo y'

$$N \sin\theta - KR\sin\theta + m\omega^2 R \sin\theta = 0$$

lungo z'

$$-mg + N\cos\theta = 0$$

Sostituendo la seconda nella prima

$$\sin\theta \left[\frac{mg}{\cos\theta} - KR + m\omega^2 R\right] = 0$$

Per $\sin\theta = 0$ abbiamo le due soluzioni $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$. Questi angoli corrispondono alla posizione sull'asse di rotazione dove l'accelerazione di trascinamento è nulla, la forza elastica è nulla e la forza peso viene equilibrata dalla reazione vincolare. Per $\sin\theta \neq 0$, abbiamo la soluzione

$$\theta_3 = \cos^{-1}\left[\frac{mg}{(K - m\omega^2)\, R}\right] \approx 109.1^\circ$$

Se $m = 1\,\mathrm{g}$,

$$\theta_4 \approx 86.3^\circ$$