



VERSIONE
05/05

2021

ESERCIZI DI ELETTROTECNICA

Piergiorgio Alotto – Paolo Bettini

Dipartimento di Ingegneria Industriale
Università di Padova

Stato modifiche

Aggiornamento 16/04/2021

- Aggiunti esercizi 11.13, 11.14, 11.15 su \mathcal{L} -trasformata

Aggiornamento 16/04/2021

- Corretti refusi nelle didascalie delle figure degli esercizi 7.1-7.4

Aggiornamento 07/04/2021

- Corretto refuso esercizio 7.9

Aggiornamento 03/04/2021

- Corretti refusi esercizi 5.6, 7.6, 7.7, 7.9 e 8.12

Aggiornamento 23/03/2021

- Aggiunti esercizi 7.8, 7.9, 7.10

Aggiornamento 20/03/2021

- Corretti refusi in 1.1, 3.8

Aggiornamento 20/02/2021

- Corretti refusi in 3.5, 5.2

Indice

1	Concetti fondamentali delle reti elettriche	1
1.1	Calcolo della potenza e del lavoro entrante in un bipolo	2
1.2	Calcolo della potenza misurata da un wattmetro ideale	4
1.3	Calcolo della potenza entrante in un tripolo	6
1.4	Calcolo della potenza entrante in un doppio bipolo	8
1.5	Calcolo della potenza entrante in un triplo bipolo	10
2	Elementi di topologia e leggi di Kirchhoff	12
2.1	Anelli	13
2.2	Albero e coalbero	15
2.3	Maglie e insiemi di taglio fondamentali	17
2.4	Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT)	21
2.5	Legge di Kirchhoff delle Correnti (LKC)	23
3	Reti di resistori ideali	25
3.1	Serie di due resistori - partitore di tensione	26
3.2	Serie di ℓ resistori	28
3.3	Parallelo di due resistori - partitore di corrente	30
3.4	Parallelo di ℓ resistori	32
3.5	Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori	34
3.6	Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori	37
3.7	Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori	39

3.8	Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori	41
3.9	Trasformazione stella/triangolo	43
3.10	Trasformazione triangolo/stella	45
3.11	Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori (stella/triangolo)	47
4	Connessioni fondamentali - Generatori affini adinamici	53
4.1	Bipoli non lineari in serie	54
4.2	Bipoli non lineari in parallelo	57
4.3	Applicazione delle trasformazioni $GAT \rightarrow GAC$ e $GAC \rightarrow GAT$	60
4.4	Formule di Millman	63
4.5	Formule di Millman	65
5	Analisi delle reti lineari adinamiche	68
5.1	Metodo delle correnti di anello	69
5.2	Metodo delle correnti di anello modificato	74
5.3	Metodo dei potenziali nodali	78
5.4	Metodo dei potenziali nodali modificato	81
5.5	Metodo dei potenziali nodali modificato	85
5.6	Metodo di sovrapposizione degli effetti	90
5.7	Metodo di sovrapposizione degli effetti	95
6	Generatori equivalenti	101
6.1	Generatore equivalente di Thevenin	102
6.2	Generatore equivalente di Norton	107
6.3	Massimo trasferimento di potenza	111
7	Doppi bipoli	113
7.1	Doppi bipoli: rappresentazioni controllate in corrente e in tensione	114
7.2	Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrici R, T	118
7.3	Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrici G, T	121
7.4	Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrice di trasmissione T	124
7.5	Analisi di rete lineare con doppio bipolo resisitivo	127

7.6	Analisi di rete lineare con GTPC	131
7.7	Generatore equivalente di tensione ai morsetti di una rete lineare con GTPT	133
7.8	Calcolo della resistenza interna ai morsetti AB di una rete lineare con GCPC	137
7.9	Analisi di rete lineare con GTPT e GTPC mediante metodo delle correnti di anello	142
7.10	Analisi di rete lineare con GTPC e GCPT mediante sovrapposizione degli effetti	145
8	Reti elettriche in regime sinusoidale	150
8.1	Metodo simbolico: da sinusoidi a fasori	151
8.2	Metodo simbolico: da fasori a sinusoidi	153
8.3	Legge di Kirchhoff delle tensioni in forma simbolica (LKTS)	156
8.4	Legge di kirchhoff delle correnti in forma simbolica (LKCS)	159
8.5	Metodo simbolico	162
8.6	Metodo simbolico	166
8.7	Metodo simbolico: strumenti di misura ideali	169
8.8	Metodo simbolico: risonanza parallelo	172
8.9	Rifasamento del carico	175
8.10	Generatori equivalenti simbolici	180
8.11	Generatori equivalenti simbolici	183
8.12	Metodi di analisi delle reti simboliche	187
8.13	Problema inverso	197
9	Reti elettriche trifasi	201
9.1	Potenza trifase (Aron)	202
9.2	Rifasamento del carico	206
9.3	Metodo delle potenze	211
9.4	Potenza trifase (Aron)	214
9.5	Thevenin e Millman su rete monofase equivalente	218
9.6	Metodo delle potenze	223
10	Reti elettriche in regime periodico (non sinusoidale)	227
10.1	Analisi armonica con un ingresso periodico	228
10.2	Analisi armonica con due ingressi periodici	232

11 Reti elettriche in regime variabile aperiodico	236
11.1 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R-L$	237
11.2 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R-C$	239
11.3 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1 + R_2) - L$	241
11.4 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1 + R_2) - C$	244
11.5 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1 // R_2) - C$	247
11.6 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - C_1 - C_2$	250
11.7 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - L_1 - L_2$	252
11.8 Modi naturali di un circuito del secondo ordine $R - L - C$ serie	254
11.9 Modi naturali di un circuito del secondo ordine non dissipativo (oscillatore $L - C$)	258
11.10 Analisi di un circuito del primo ordine $R - L$ con ingresso costante	261
11.11 Analisi di un circuito del primo ordine $R - L$ con ingresso sinusoidale	266
11.12 Analisi di un circuito del secondo ordine $R - L - C$ con ingresso sinusoidale	271
11.13 Analisi di un circuito del primo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata	277
11.14 Analisi di un circuito del secondo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata	282
11.15 Analisi di un circuito del secondo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata	287
12 Circuiti magnetici	292
12.1 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita	293
12.2 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita e un traferro	296
12.3 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita e magnete permanente	299
12.4 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita e due traferri	301
12.5 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita e tre traferri	304
12.6 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita, un traferro e due avvolgimenti	307
12.7 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita, due traferri e due avvolgimenti	310

1

Concetti fondamentali delle reti elettriche

1.1 Calcolo della potenza e del lavoro entrante in un bipolo

Per il bipolo rappresentato in figura 1.1 calcolare

- La potenza entrante
- Il lavoro elettrico entrante nel tempo Δt

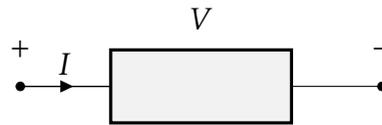


Figura 1.1: Bipolo

$$I = 4A \quad V = 5V \quad \Delta t = 1h$$

Soluzione

Con i riferimenti di tensione e corrente riportati in figura 1.1, sul bipolo è fissata la convenzione degli utilizzatori. La potenza entrante risulta

$$P_e = V \cdot I = 4 \cdot 5 = 20 \text{ W}$$

Il lavoro elettrico entrante nell'intervallo¹ indicato è

$$\mathcal{L}_e = P_e \cdot \Delta t = 20 \cdot 3600 = 72 \text{ kJ}$$

¹Si noti che Δt va espresso in s.

1.2 Calcolo della potenza misurata da un wattmetro ideale

Per la rete rappresentata in figura, determinare la potenza P_W indicata dal wattmetro ideale.

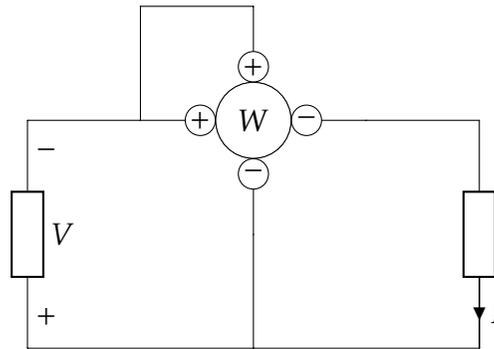


Figura 1.2: Wattmetro

$$V = 7V \quad I = 3A$$

Soluzione

La potenza P_W indicata da un wattmetro si ottiene moltiplicando la tensione V_W presente tra i morsetti della porta voltmetrica, ponendo attenzione ai riferimenti indicati, per la corrente I_W che attraversa la porta amperometrica, ponendo attenzione ai riferimenti indicati in figura 1.3: è positiva una corrente (I_W) che va dal morsetto A^+ al morsetto A^- ; è positiva una tensione (V_W) misurata tra il morsetto V^+ e il morsetto V^- .

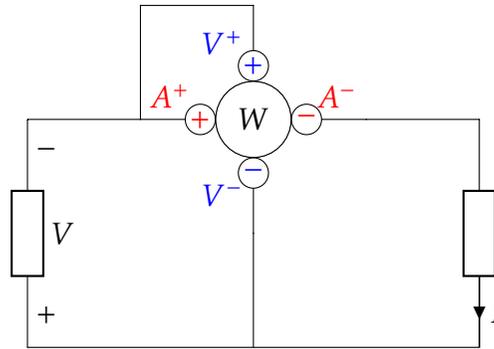


Figura 1.3: Wattmetro

Nel caso particolare di Fig.1.3, $V_W = -V$ e $I_W = I$, quindi $P_W = -V \cdot I = 7 \cdot 3 = -21 \text{ W}$.

1.3 Calcolo della potenza entrante in un tripolo

Nella figura 1.4 è rappresentato un tripolo (npolo con $n = 3$).

Calcolare la totale potenza entrante nel tripolo con i valori di tensione e corrente riportati in tabella

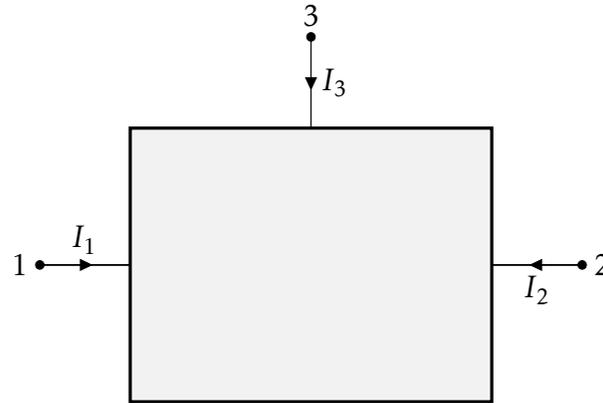


Figura 1.4: Tripolo

$$I_1 = 5 A \quad I_2 = 3 A \quad V_{12} = 10 V \quad V_{23} = 20 V$$

Soluzione

Per calcolare la totale potenza entrante nel tripolo, si sceglie uno dei tre morsetti che fa da morsetto comune attraverso cui si richiude la corrente degli altri due. Visto che sono note le correnti dei morsetti 1 e 2, conviene scegliere il morsetto 3 come morsetto comune del doppio bipolo definendo così le porte 1 – 3 e 2 – 3, come mostrato in figura 1.5.

Con i riferimenti indicati, la porta 1 – 3 ha corrente $I_1 = 5\text{ A}$ e tensione $V_{13} = V_{12} + V_{23} = 30\text{ V}$ e la porta 2 – 3 ha corrente $I_2 = 3\text{ A}$ e tensione $V_{23} = 20\text{ V}$. Su entrambe le porte è stabilita la convenzione degli utilizzatori.

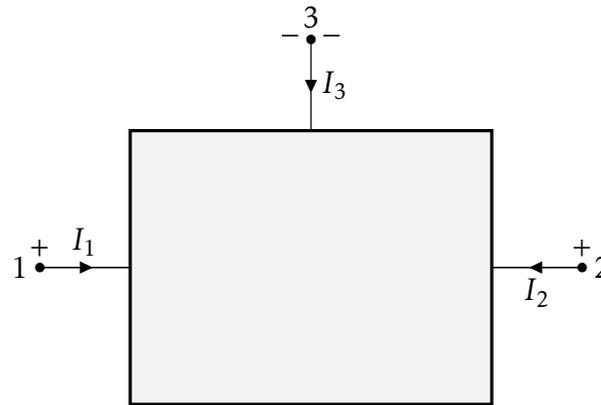


Figura 1.5: Tripolo

La potenza entrante alla porta 1 – 3 risulta

$$P_{13} = V_{13} \cdot I_1 = 30 \cdot 5 = 150\text{ W} \quad (\text{assorbita})$$

La potenza entrante alla porta 2 – 3 risulta

$$P_{23} = V_{23} \cdot I_2 = 20 \cdot 3 = 60\text{ W} \quad (\text{assorbita})$$

La totale potenza entrante è dunque

$$P_e = P_{12} + P_{23} = 150 + 60 = 210\text{ W} \quad (\text{assorbita})$$

1.4 Calcolo della potenza entrante in un doppio bipolo

Nella figura 1.6 è rappresentato un doppio bipolo (m-bipolo con $m = 2$).

Calcolare la totale potenza entrante nel doppio bipolo, con i valori di tensione e corrente delle porte riportati in tabella



Figura 1.6: Doppio bipolo

$$I_1 = 6A \quad I_2 = 5A \quad V_1 = 20V \quad V_2 = 10V$$

Soluzione

La totale potenza entrante nel doppio bipolo si calcola sommando le potenze entranti alle due porte. La porta 1 è convenzionata da utilizzatore (la corrente entra dal morsetto positivo), mentre la porta 2 è convenzionata da generatore (la corrente esce dal morsetto positivo).

La totale potenza entrante è dunque

$$P_e = P_1 - P_2 = (V_1 \cdot I_1) - (V_2 \cdot I_2) = (7 \cdot 20) - (5 \cdot 10) = 70 \text{ W}$$

La potenza è effettivamente assorbita, dato che $P_e > 0$.

1.5 Calcolo della potenza entrante in un triplo bipolo

Nella figura 1.7 è rappresentato un triplo bipolo (m-bipolo con $m = 3$).

Calcolare la totale potenza entrante nel triplo bipolo, con i valori di tensione e corrente delle porte riportati in tabella

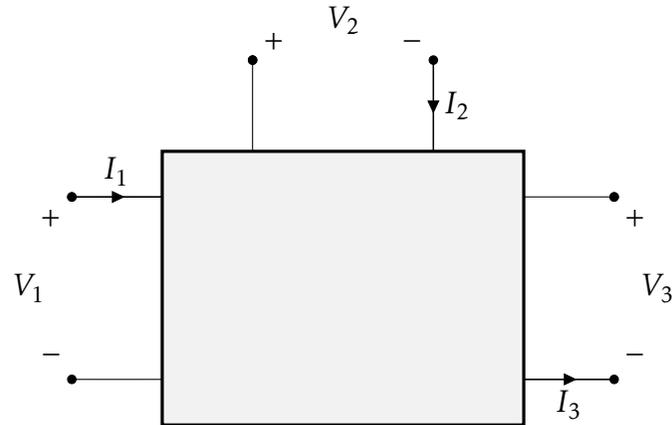


Figura 1.7: Triplo bipolo

$$I_1 = 10 A \quad V_1 = 15 V \quad I_2 = 5 A \quad V_2 = 10 V \quad I_3 = 4 A \quad V_3 = 5 V$$

Soluzione

La totale potenza entrante nel tripolo si calcola sommando le potenze entranti alle porte. Si noti che sulle le porte 1 e 3 è stabilita la convenzione dell'utilizzatore, mentre sulla porta 2 è stabilita la convenzione del generatore. La totale potenza entrante è dunque

$$P_e = P_1 - P_2 + P_3 = (V_1 \cdot I_1) - (V_2 \cdot I_2) + (V_3 \cdot I_3) = (10 \cdot 15) - (5 \cdot 10) + (5 \cdot 4) = 120 \text{ W}$$

La potenza è effettivamente assorbita, dato che $P_e > 0$.

2

Elementi di topologia e leggi di Kirchhoff

2.1 Anelli

In figura 2.1 è rappresentata un grafo piano connesso costituito da $\ell = 7$ lati ed $n = 5$ nodi. Determinare quanti sono gli anelli e disegnarli.

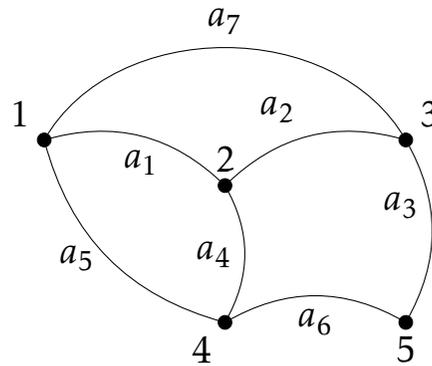


Figura 2.1: Grafo connesso costituito da $\ell = 7$ lati ed $n = 5$ nodi.

Soluzione

Per il grafo piano connesso di figura 2.1 gli anelli sono $m = \ell = -n + 1 = 3$ e sono disegnati in figura 2.2.

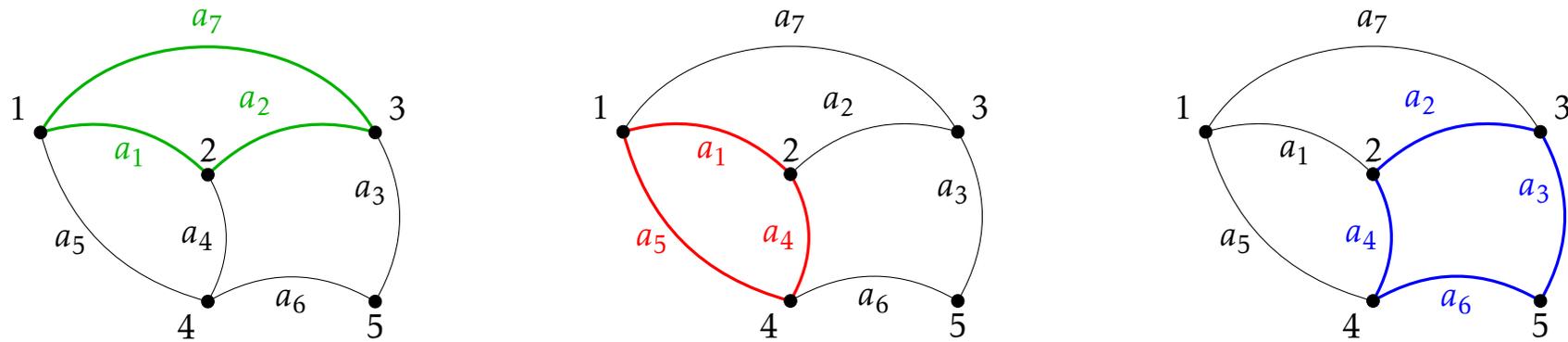


Figura 2.2: Anelli del grafo piano connesso.

2.2 Albero e coalbero

Nella figura 2.3 è rappresentata un grafo connesso costituito da $\ell = 7$ lati ed $n = 5$ nodi. Tracciare un albero e il corrispondente coalbero.

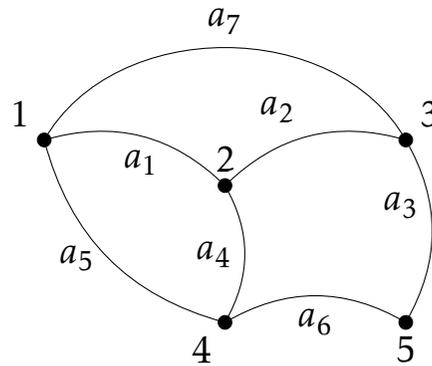


Figura 2.3: Grafo connesso costituito da $\ell = 7$ lati ed $n = 5$ nodi.

Soluzione

In figura 2.4 è riportato un esempio di albero costituito da $n - 1 = 4$ rami (disegnati in verde) e in figura 2.5 il corrispondente coalbero costituito da $\ell - n + 1 = 3$ corde (disegnate in rosso).

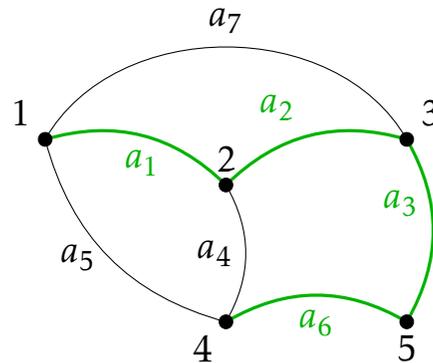


Figura 2.4: Esempio di albero costituito da 4 rami (verde).

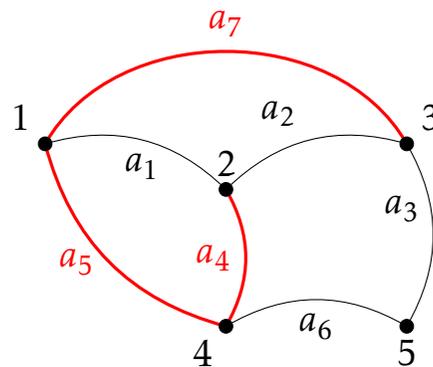


Figura 2.5: Coalbero costituito da 3 corde (rosso).

2.3 Maglie e insiemi di taglio fondamentali

Nella figura 2.6 è rappresentata un grafo connesso costituito da $\ell = 9$ lati ed $n = 5$ nodi.

Tracciare un albero e il corrispondente coalbero e determinare:

1. Le maglie fondamentali
2. Gli insiemi di taglio fondamentali

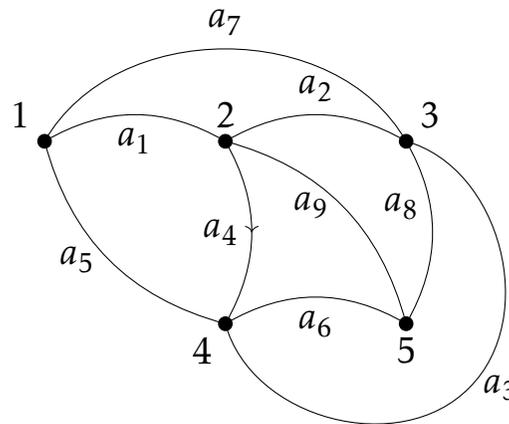


Figura 2.6: Grafo connesso costituito da $\ell = 9$ lati ed $n = 5$ nodi.

Soluzione

In figura 2.7 è riportato un esempio di albero costituito da $n-1 = 4$ rami (disegnati in verde) e in figura 2.8 il corrispondente coalbero costituito da $\ell - n + 1 = 5$ corde (disegnate in rosso).

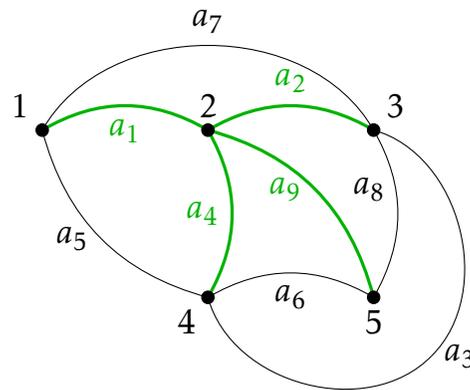


Figura 2.7: Esempio di albero costituito da 4 rami (verde).

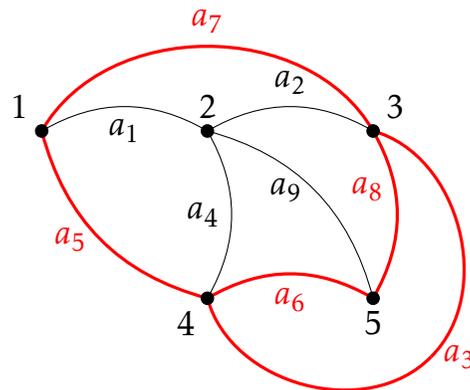


Figura 2.8: Coalbero costituito da 5 corde (rosso).

Maglie fondamentali

Si ottiene una maglia fondamentale da ogni corda insieme ai rami necessari a formare un percorso chiuso, univocamente determinati come in figura 2.9.

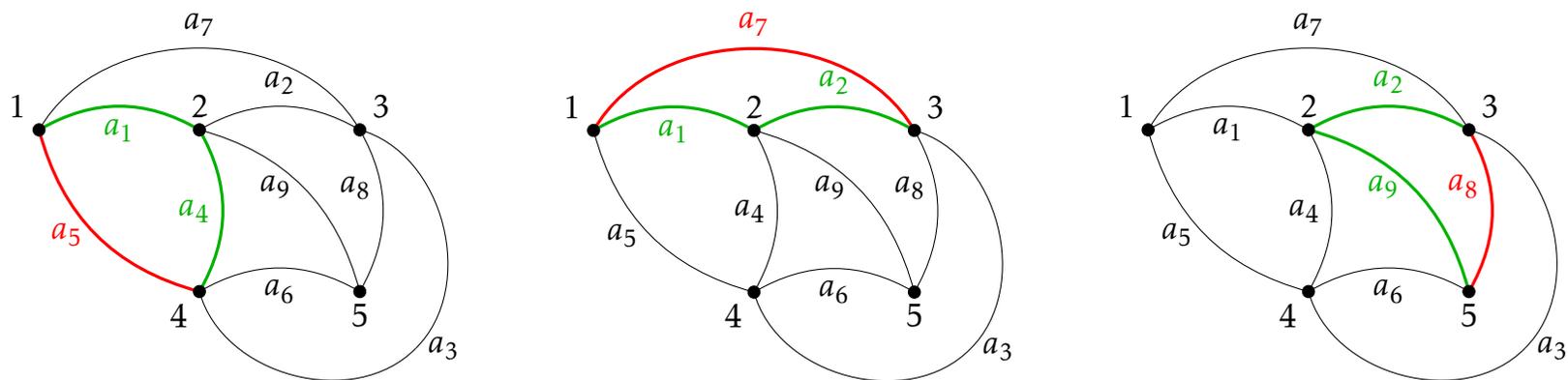
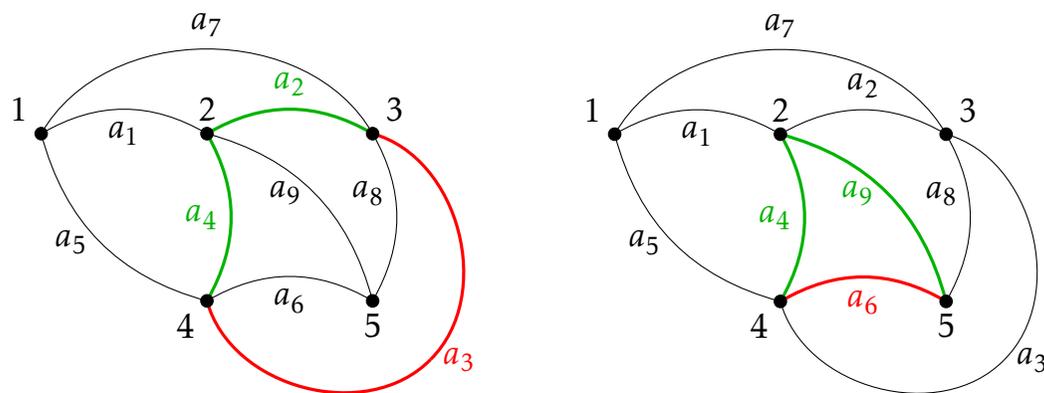
(a) Maglia costruita con la corda a_5 (b) Maglia costruita con la corda a_7 (c) Maglia costruita con la corda a_8 (d) Maglia costruita con la corda a_3 (e) Maglia costruita con la corda a_6

Figura 2.9: Ciascuna maglia fondamentale è costituita da una sola corda di coalbero e da rami d'albero

Insiemi di taglio fondamentali

Si ottiene un insieme di taglio fondamentale da ogni ramo d'albero insieme a corde di coalbero univocamente determinate come in figura 2.10.

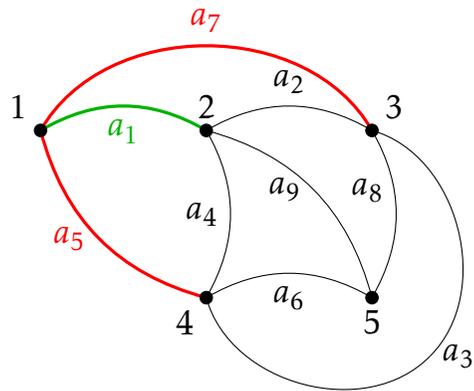
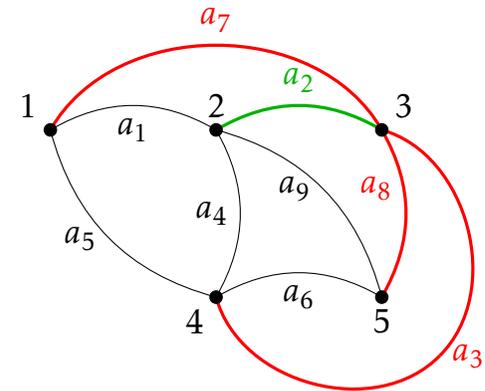
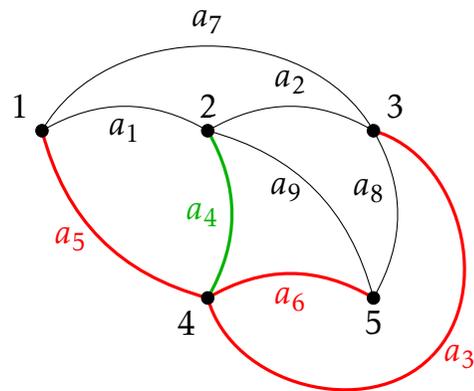
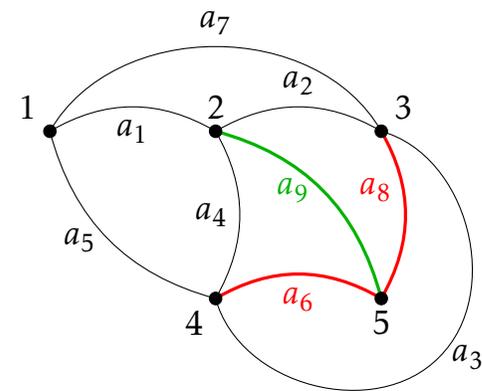
(a) IDT costruito con il ramo a_1 (b) IDT costruito con il ramo a_2 (c) IDT costruito con il ramo a_4 (d) IDT costruito con il ramo a_9

Figura 2.10: Ciascun insieme di taglio fondamentale è costituito da un solo ramo d'albero e da corde di coalbero

2.4 Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT)

In figura 2.11 è rappresentata un rete costituita da otto bipoli. Sono note le tensioni V_k ($k = 1 \dots 4$) riportate in tabella.

Applicando la LKT agli anelli, calcolare le tensioni rimanenti, V_k ($k = 5 \dots 8$), con i riferimenti riportati in figura.

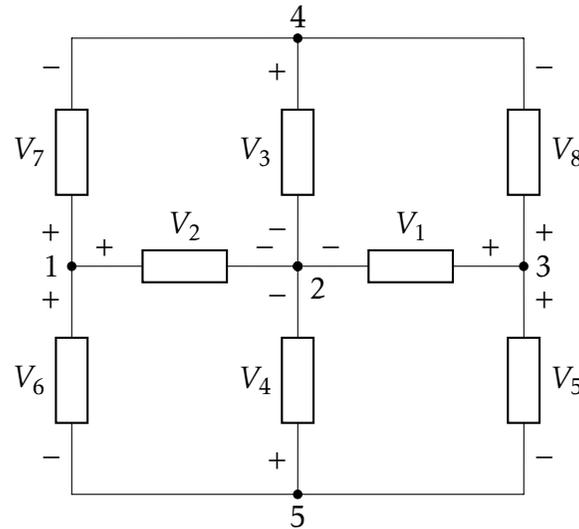


Figura 2.11: Rete elettrica in regime stazionario.

$$V_1 = 10 \text{ V} \quad V_2 = 12 \text{ V} \quad V_3 = 6 \text{ V} \quad V_4 = 8 \text{ V}$$

Soluzione

La rete rappresentata in figura 2.11 ha $\ell = 8$ lati (bipoli) e $n = 5$ nodi. Si hanno pertanto $m = \ell - n + 1 = 4$ anelli. Viene fissato lo stesso verso di percorrenza (orario) per tutti gli anelli, come riportato in figura 2.12.

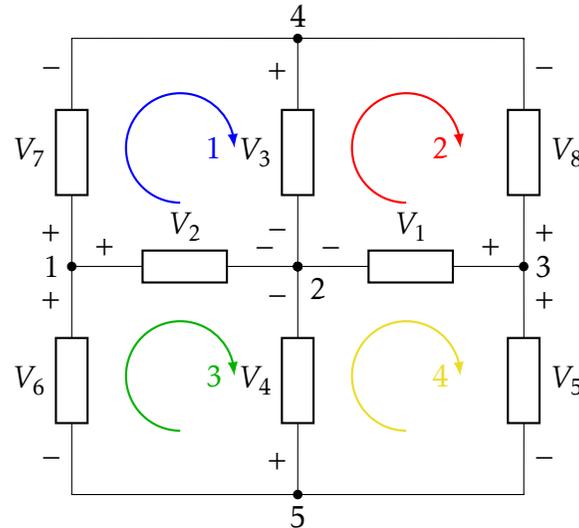


Figura 2.12: Scrittura della LKT sui 4 anelli, con verso di percorrenza orario.

La LKT scritta sui quattro anelli, tenendo conto dei riferimenti delle tensioni, risulta

$$\begin{cases} V_7 + V_3 - V_2 = 0 & (\text{anello 1}) & \Rightarrow V_7 = V_2 - V_3 = 12 - 6 = 6 V \\ -V_8 + V_1 - V_3 = 0 & (\text{anello 2}) & \Rightarrow V_8 = V_1 - V_3 = 10 - 6 = 4 V \\ -V_6 + V_2 - V_4 = 0 & (\text{anello 3}) & \Rightarrow V_6 = V_2 - V_4 = 12 - 8 = 4 V \\ +V_5 + V_4 - V_1 = 0 & (\text{anello 4}) & \Rightarrow V_5 = V_1 - V_4 = 10 - 8 = 2 V \end{cases}$$

Osservazioni

Si noti che invertendo il verso di percorrenza di una maglia (anello), cambia il segno a tutti gli addendi della LKT scritta su quella maglia (anello) e quindi il vincolo imposto alle tensioni rimane (come è ovvio) esattamente lo stesso.

2.5 Legge di Kirchhoff delle Correnti (LKC)

In figura 2.13 è rappresentata un rete costituita da otto bipoli. Sono note le correnti I_k ($k = 1 \dots 4$) riportate in tabella.

Applicando la LKC, calcolare le correnti rimanenti, I_k ($k = 5 \dots 8$), con i riferimenti riportati in figura.

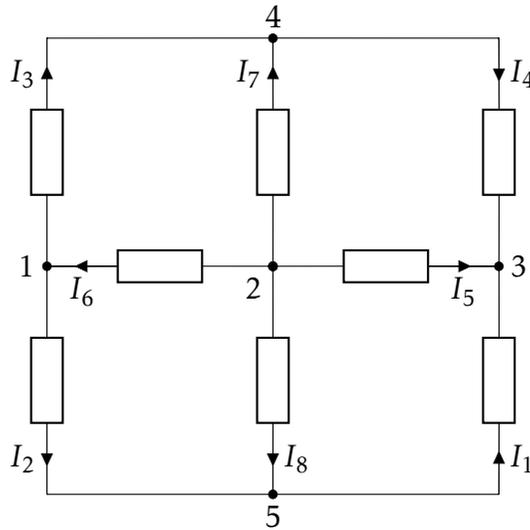


Figura 2.13: Rete elettrica in regime stazionario.

$$I_1 = 2A \quad I_2 = 4A \quad I_3 = 6A \quad I_4 = 8A$$

Soluzione

La rete rappresentata in figura 2.13 ha $\ell = 8$ lati (bipoli) e $n = 5$ nodi e si possono quindi scrivere le equazioni LKC linearmente indipendenti sui lati che si appoggiano a $n - 1 = 4$ nodi scelti in modo arbitrario, ad esempio 1-4 come evidenziato in figura 2.14.

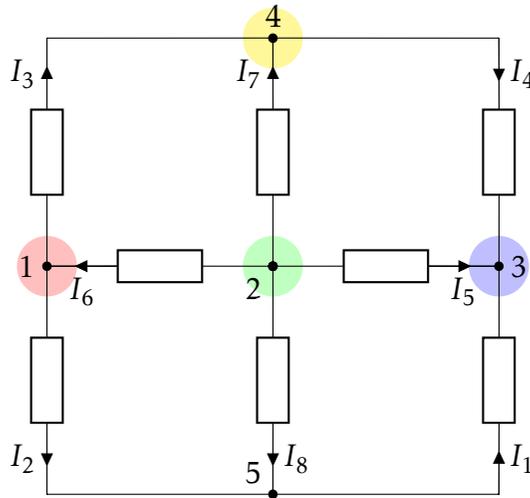


Figura 2.14: Scrittura della LKC su $n - 1 = 4$ nodi.

$$\left\{ \begin{array}{lll} I_2 + I_3 - I_6 = 0 & (\text{nodo } 1) & \Rightarrow I_6 = -I_2 - I_3 = 4 + 6 = 10A \\ I_5 + I_6 + I_7 + I_8 = 0 & (\text{nodo } 2) & \\ -I_1 - I_4 - I_5 = 0 & (\text{nodo } 3) & \Rightarrow I_5 = -I_1 - I_4 = -2 - 8 = -10A \\ -I_3 + I_4 - I_7 = 0 & (\text{nodo } 4) & \Rightarrow I_7 = I_4 - I_3 = 8 - 6 = 2A \end{array} \right.$$

E infine, sostituendo i valori già calcolati nella LKC scritta per i lati che si appoggiano al nodo 2, si ha

$$I_8 = -I_5 - I_6 - I_7 = -(-10) - (10) - (2) = -2A$$

3

Reti di resistori ideali

3.1 Serie di due resistori - partitore di tensione

Nella figura 3.1 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da due resistori ideali in serie e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la tensione v_s .

1. Calcolare il valore della resistenza R_s del resistore equivalente alla serie dei resistori
2. Calcolare la tensione su ogni resistore con i riferimenti di figura.

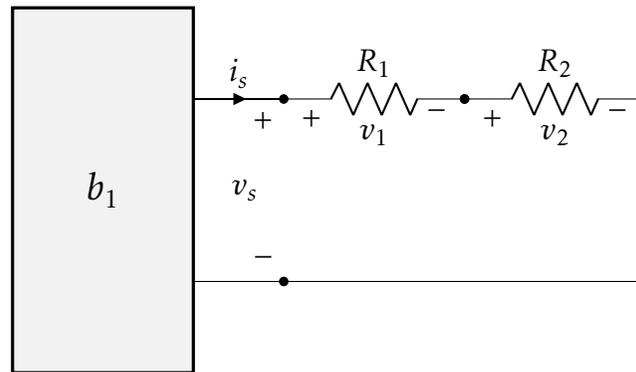


Figura 3.1: Serie di due resistori ideali

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 40 \Omega \quad v_s = V_s = 100 V$$

Soluzione

Il valore della resistenza R_s del resistore equivalente alla serie dei resistori ideali è pari alla somma delle resistenze:

$$R_s = R_1 + R_2 = 50 \Omega$$

La tensione v_s si ripartisce su ciascun resistore in modo proporzionale alla resistenza:

$$v_1 = V_s \frac{R_1}{R_s} = 100 \frac{10}{50} = 20 \text{ V} \quad v_2 = V_s \frac{R_2}{R_s} = 100 \frac{40}{50} = 80 \text{ V}$$

Osservazioni

La tensione più elevata è quella del resistore R_2 che ha la resistenza più grande.

Se le resistenze fossero uguali, v_s si ripartirebbe al 50%.

Ad esempio, con $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, si avrebbe: $v_1 = v_2 = 50 \text{ V}$.

3.2 Serie di ℓ resistori

Nella figura 3.2 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da $\ell = 4$ resistori ideali in serie e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la tensione v_s .

1. Calcolare il valore della resistenza R_s del resistore equivalente alla serie dei resistori
2. Calcolare la tensione v_k su ogni resistore con i riferimenti di figura.

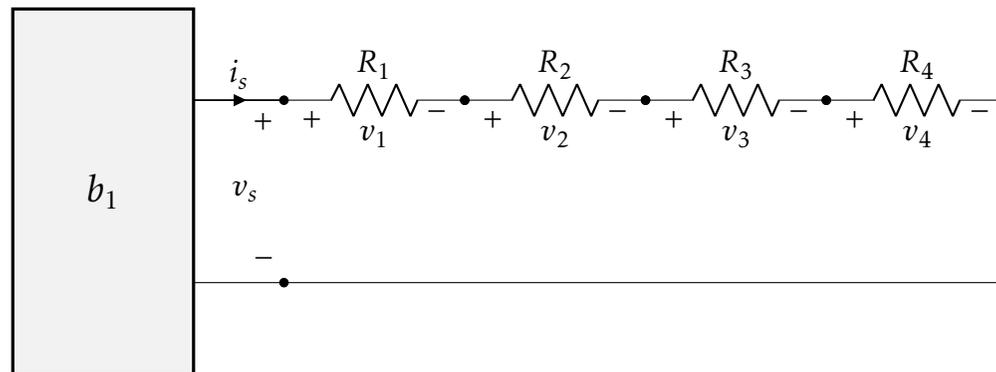


Figura 3.2: Serie di resistori ideali

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad R_3 = 15 \Omega \quad R_4 = 20 \Omega \quad v_s = V_s = 100 V$$

Soluzione

Il valore della resistenza R_s del resistore equivalente alla serie dei resistori ideali è pari alla somma delle resistenze:

$$R_s = \sum_{k=1}^4 R_k = 50 \Omega$$

La tensione v_s si ripartisce su ciascun resistore in modo proporzionale alla resistenza:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_s \frac{R_1}{R_s} = 100 \frac{5}{50} = 10 \text{ V} & v_2 &= V_s \frac{R_2}{R_s} = 100 \frac{10}{50} = 20 \text{ V} \\ v_3 &= V_s \frac{R_3}{R_s} = 100 \frac{15}{50} = 30 \text{ V} & v_4 &= V_s \frac{R_4}{R_s} = 100 \frac{20}{50} = 40 \text{ V} \end{aligned}$$

Osservazioni

Come verifica si può calcolare la tensione v_s applicando la LKT alla serie dei resistori:

$$v_s = \sum_{k=1}^4 v_k = 100 \text{ V}$$

3.3 Parallelo di due resistori - partitore di corrente

Nella figura 3.3 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da due resistori ideali in parallelo e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la corrente i_p .

1. Calcolare il valore della resistenza R_p del resistore equivalente al parallelo dei resistori
2. Calcolare la corrente su ogni resistore con i riferimenti di figura.

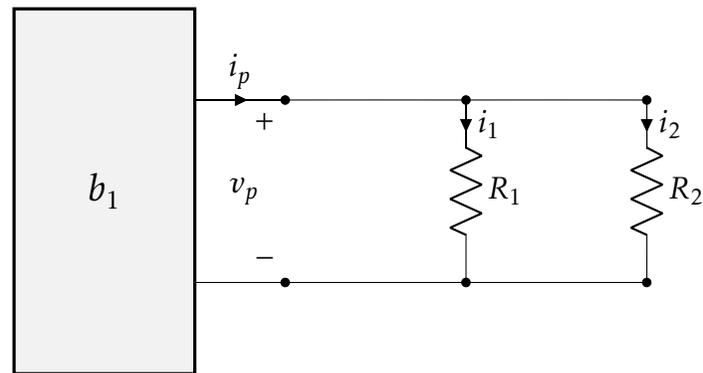


Figura 3.3: Serie di due resistori ideali

$$R_1 = 10 \, \Omega \quad R_2 = 40 \, \Omega \quad i_p = I_p = 10 \, A$$

Soluzione

Il valore della conduttanza G_p del resistore equivalente al parallelo dei resistori ideali è pari alla somma delle conduttanze (reciproco delle resistenze):

$$G_p = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = 0.1 + 0.025 = 0.125 \text{ S}$$

E quindi la resistenza R_p vale: $R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{0.125} = 8 \Omega$

La corrente i_p si ripartisce su ciascun resistore in modo proporzionale alla conduttanza:

$$i_1 = I_p \frac{G_1}{G_p} = 10 \frac{0.1}{0.125} = 8 \text{ A} \quad i_2 = I_p \frac{G_2}{G_p} = 10 \frac{0.025}{0.125} = 2 \text{ A}$$

Osservazioni

La corrente più elevata è quella del resistore R_1 che ha la resistenza più piccola, ovvero la conduttanza più grande.

L'espressione della resistenza R_p può essere calcolata anche come:

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \Omega$$

3.4 Parallelo di ℓ resistori

Nella figura 3.4 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da $\ell = 4$ resistori ideali in parallelo e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la corrente i_p .

1. Calcolare il valore della resistenza R_p del resistore equivalente al parallelo dei resistori
2. Calcolare la corrente su ogni resistore con i riferimenti di figura.

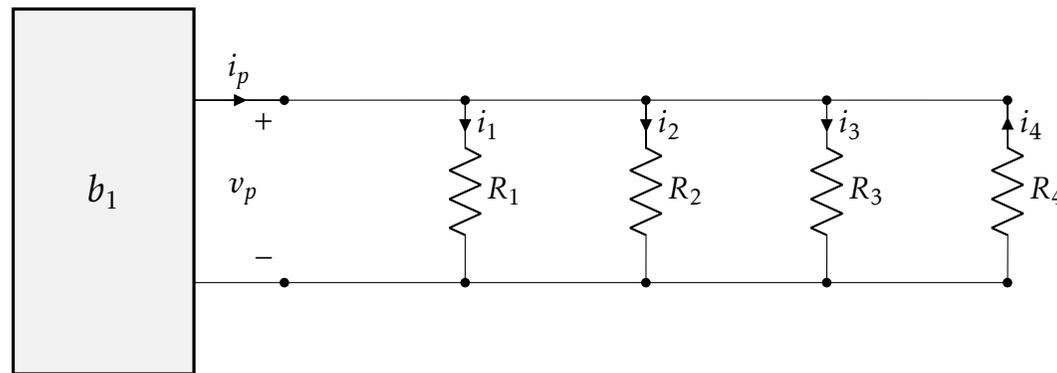


Figura 3.4: Serie di due resistori ideali

$$R_1 = 40 \, \Omega \quad R_2 = 40 \, \Omega \quad R_3 = 30 \, \Omega \quad R_4 = 60 \, \Omega \quad i_p = I_p = 60 \, A$$

Soluzione

Il valore della conduttanza G_p del resistore equivalente al parallelo dei resistori ideali è pari alla somma delle conduttanze (reciproco delle resistenze):

$$G_p = \sum_{k=1}^4 G_k = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{R_k} = 0.025 + 0.025 + 0.0\bar{3} + 0.01\bar{6} = 0.1 \text{ S}$$

E quindi la resistenza R_p vale: $R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{0.1} = 10 \Omega$

La corrente i_p si ripartisce su ciascun resistore in modo proporzionale alla conduttanza:

$$\begin{aligned} i_1 = I_p \frac{G_1}{G_p} = 60 \frac{0.025}{0.1} = 15 \text{ A} & \quad i_2 = I_p \frac{G_2}{G_p} = 60 \frac{0.025}{0.1} = 15 \text{ A} \\ i_3 = I_p \frac{G_3}{G_p} = 60 \frac{0.0\bar{3}}{0.1} = 20 \text{ A} & \quad i_4 = -I_p \frac{G_4}{G_p} = -60 \frac{0.01\bar{6}}{0.1} = -10 \text{ A} \end{aligned}$$

Osservazioni

Le correnti i_k con $k = 1, 2, 3$ sono positive, mentre $i_4 < 0$ perchè il riferimento di corrente di R_4 è opposto a quello utilizzato nella definizione del partitore di corrente.

La corrente più elevata è quella del resistore R_3 che ha la resistenza più piccola, ovvero la conduttanza più grande.

La resistenza R_p può essere calcolata anche applicando più volte la formula del parallelo di due resistori:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} = 20 \Omega, \quad R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 2 \Omega, \quad R_p = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \Omega$$

3.5 Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

Nella figura 3.5 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da $\ell = 7$ resistori ideali e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la tensione v .

1. Calcolare il valore della resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta AB .
2. Calcolare la corrente i con i riferimenti di figura.

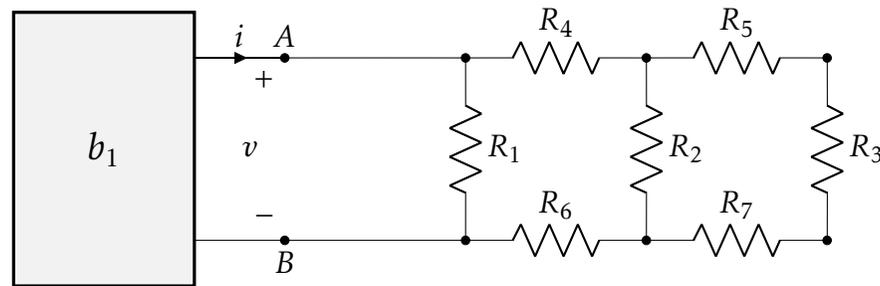


Figura 3.5: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

$$R_1 = 40 \, \Omega \quad R_2 = 30 \, \Omega \quad R_3 = 20 \, \Omega \quad R_4 = 20 \, \Omega$$

$$R_5 = 30 \, \Omega \quad R_6 = 20 \, \Omega \quad R_7 = 10 \, \Omega \quad v = V = 240 \, V$$

Soluzione

Si può ricavare la resistenza equivalente R_{eq} alla porta AB eseguendo operazioni di serie e parallelo fino a ridurre la rete ad un solo resistore. Partendo da destra, si calcola la resistenza che corrisponde alla serie di R_5 , R_3 ed R_7 :

$$R_{10} = R_5 + R_3 + R_7 = 30 + 20 + 10 = 60 \Omega$$

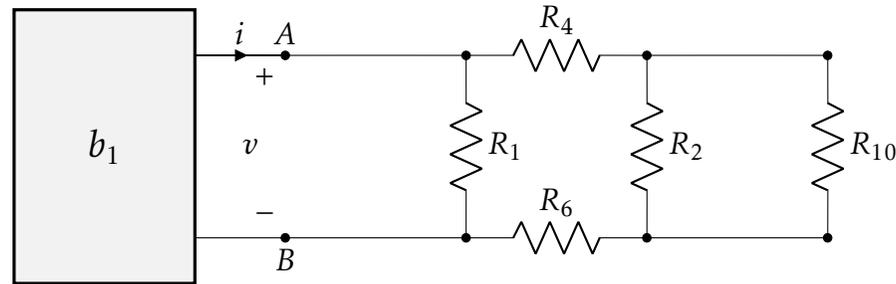


Figura 3.6: Semplificazione della rete: R_{10} al posto della serie di R_5 , R_3 ed R_7

Poi si calcola la resistenza che corrisponde al parallelo di R_2 ed R_{10} :

$$R_{11} = \frac{R_2 R_{10}}{R_2 + R_{10}} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 20 \Omega$$

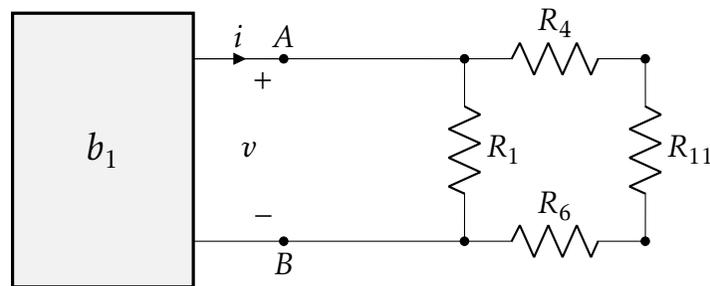


Figura 3.7: Semplificazione della rete: R_{11} al posto del parallelo di R_2 ed R_{10}

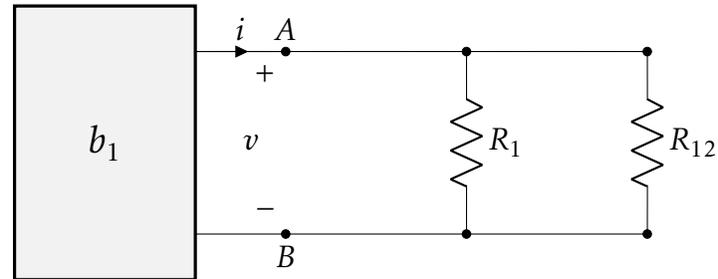


Figura 3.8: Semplificazione della rete: R_{12} al posto della serie di R_4 , R_6 ed R_{11}

Infine si sostituisce R_{12} alla serie di R_4 , R_6 ed R_{11} :

$$R_{12} = R_4 + R_6 + R_{11} = 20 + 20 + 20 = 60 \Omega$$

A questo punto è immediato calcolare la resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta AB :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_{12}}{R_1 + R_{12}} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24 \Omega$$

e la corrente i , che con i riferimenti di figura vale:

$$i = \frac{v}{R_{eq}} = \frac{240}{24} = 10 \text{ A}$$

3.6 Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

Nella figura 3.9 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali con lo stesso valore di resistenza R .

Calcolare il valore della resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta AB .

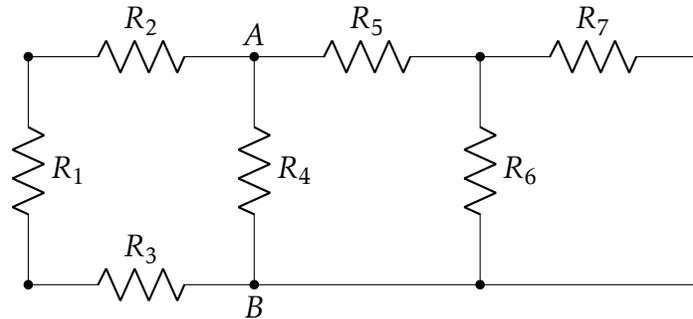


Figura 3.9: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

$$R = 100 \Omega$$

Soluzione

Si può ricavare la resistenza equivalente R_{eq} alla porta AB eseguendo operazioni di serie e parallelo fino a ridurre la rete ad un solo resistore. Partendo da destra, si calcola la resistenza che corrisponde alla parallelo di R_6 ed R_7 : $R_8 = R_6 // R_7 = 50 \Omega$

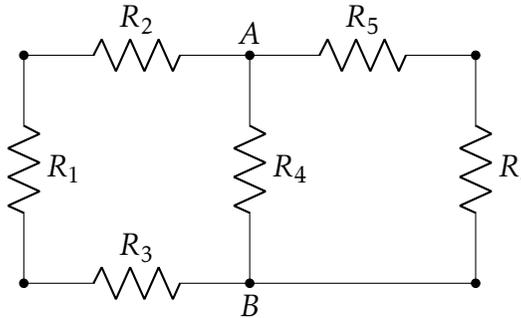


Figura 3.10: Semplificazione della rete: R_{10} al posto della serie di R_5 , R_3 ed R_7

Si calcolano poi le resistenze $R_9 = R_5 + R_8 = 150 \Omega$ (serie di R_5 , R_8) e $R_{10} = R_1 + R_2 + R_3 = 300 \Omega$ (serie di R_1 , R_2 , R_3).

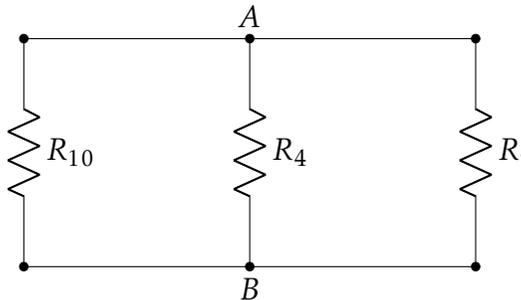


Figura 3.11: Semplificazione della rete: R_9 al posto della serie di R_5 ed R_8 ; R_{10} al posto della serie di R_1 , R_2 ed R_3

Infine si può calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} ai morsetti AB (parallelo di R_4 , R_9 , R_{10}):

$$G_{eq} = G_4 + G_9 + G_{10} = \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{300} = \frac{1}{50} \text{ S} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = 50 \Omega$$

3.7 Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

Nella figura 3.12 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali con lo stesso valore di resistenza R .

Calcolare il valore della resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta AB .

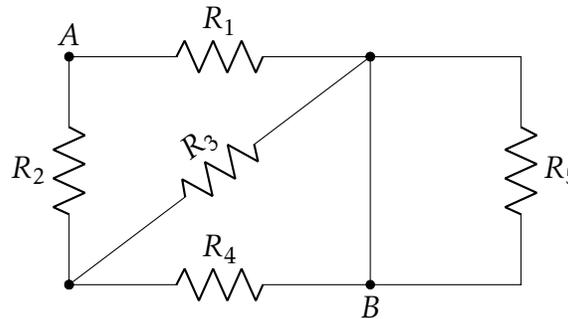


Figura 3.12: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

$$R_1 = 60 \, \Omega \quad R_2 = 30 \, \Omega \quad R_3 = 60 \, \Omega \quad R_4 = 60 \, \Omega \quad R_5 = 30 \, \Omega$$

Soluzione

Si può ricavare la resistenza equivalente R_{eq} alla porta AB eseguendo operazioni di serie e parallelo fino a ridurre la rete ad un solo resistore. Si nota che R_5 è in parallelo ad un cortocircuito e può quindi essere omessa, come fatto in figura 3.13¹.

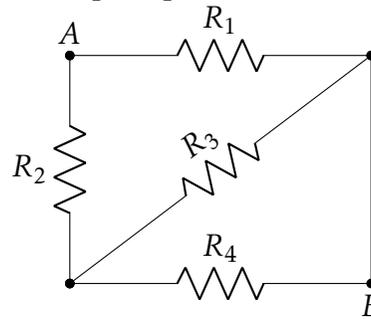


Figura 3.13: Semplificazione della rete: R_5 è in parallelo ad un cortocircuito e può essere omessa.

Si calcola poi la resistenza $R_6 = R_3 // R_4 = 30 \Omega$

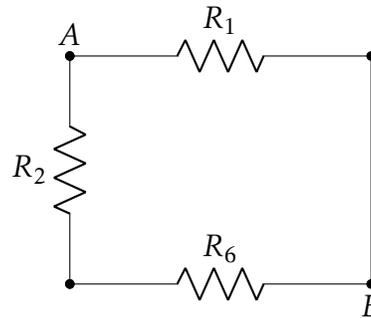


Figura 3.14: Semplificazione della rete: R_6 sostituisce il parallelo di R_3 ed R_4

Infine si può calcolare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti AB (parallelo di R_1 con la serie di R_2 ed R_6):

$$R_{eq} = R_1 // (R_2 + R_6) = 60 // (30 + 30) = 30 \Omega$$

¹La resistenza equivalente al parallelo di R_5 con il cortocircuito è $R_p = \frac{R_5 \cdot 0}{R_5 + 0} = 0$.

3.8 Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

Nella figura 3.15 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali.

Calcolare il valore della resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta AB .

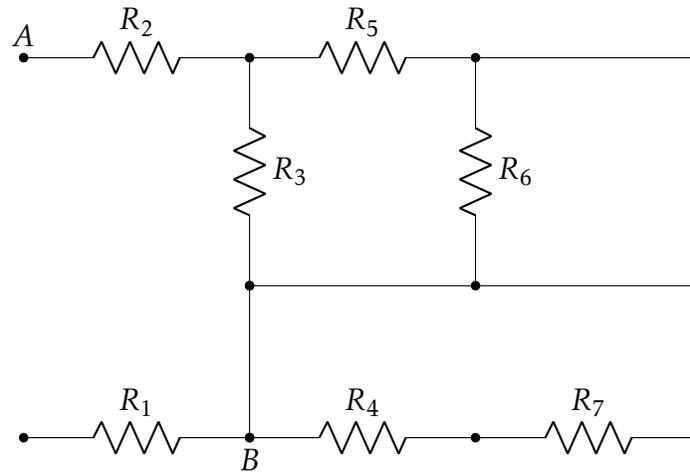


Figura 3.15: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

$$R_1 = 100 \, \Omega \quad R_2 = 75 \, \Omega \quad R_3 = 50 \, \Omega \quad R_4 = 60 \, \Omega \quad R_5 = 50 \, \Omega \quad R_6 = 25 \, \Omega \quad R_7 = 50 \, \Omega$$

Soluzione

Si può ricavare la resistenza equivalente R_{eq} alla porta AB eseguendo operazioni di serie e parallelo fino a ridurre la rete ad un solo resistore.

Si nota subito che R_6 è in parallelo con un cortocircuito, così come la serie di R_4 ed R_7 è in parallelo ad un cortocircuito. La resistenza equivalente tra i nodi B e C si riduce dunque ad un cortocircuito, come riportato in figura 3.16.

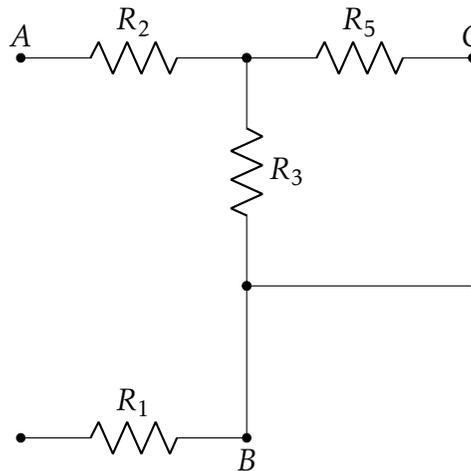


Figura 3.16: Semplificazione della rete: R_{10} al posto della serie di R_5 , R_3 ed R_7

Infine si può calcolare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti AB (serie di R_2 con il parallelo di R_3 ed R_5):

$$R_{eq} = R_2 + R_3 // R_5 = 75 + 50 // 50 = 100 \Omega$$

Si noti che il resistore R_1 è appeso e non compare nell'espressione della resistenza equivalente.

3.9 Trasformazione stella/triangolo

Nella figura 3.17 sono rappresentate due configurazioni di resistori ideali collegati ai nodi 1,2,3.

- Tre resistori a stella (R_1, R_2, R_3), i cui valori di resistenza sono riportati in tabella
- Tre resistori a triangolo (R_{12}, R_{23}, R_{31})

1. Calcolare il valore della resistenze R_{12}, R_{23}, R_{31} che garantiscono l'equivalenza tra le due configurazioni.

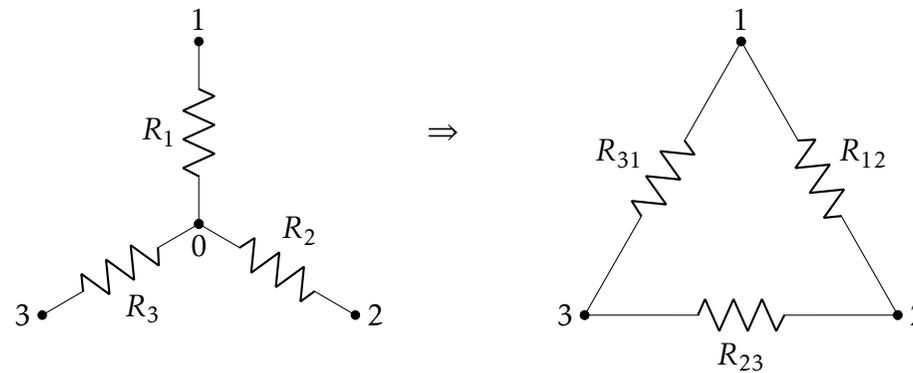


Figura 3.17: Trasformazione stella/triangolo

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 20 \Omega \quad R_3 = 40 \Omega$$

Soluzione

Le resistenze R_{12} , R_{23} , R_{31} si calcolano con le formule di trasformazione da stella a triangolo:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = 35 \, \Omega \quad R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = 140 \, \Omega \quad R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = 70 \, \Omega$$

Osservazioni

In alternativa si possono calcolare le conduttanze G_{12} , G_{23} , G_{31} e poi da queste le corrispondenti resistenze.

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0.1 \, S \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} = 0.05 \, S \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{40} = 0.025 \, S$$

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{35} \, S \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{140} \, S \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{70} \, S$$

$$R_{12} = \frac{1}{G_{12}} = 35 \, \Omega \quad R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = 140 \, \Omega \quad R_{31} = \frac{1}{G_{31}} = 70 \, \Omega$$

Si noti, infine che se le resistenze della configurazione a stella sono uguali tra loro, anche le resistenze della configurazione a triangolo sono uguali tra loro. Ad esempio:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_{\text{☆}} = 10 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3 R_{\text{☆}} = R_{\Delta} = 30 \, \Omega$$

3.10 Trasformazione triangolo/stella

Nella figura 3.18 sono rappresentate due configurazioni di resistori ideali collegati ai nodi 1,2,3.

- Tre resistori a triangolo (R_{12} , R_{23} , R_{31}), i cui valori di resistenza sono riportati in tabella
- Tre resistori a stella (R_1 , R_2 , R_3)

1. Calcolare il valore della resistenze R_1 , R_2 , R_3 che garantiscono l'equivalenza tra le due configurazioni.

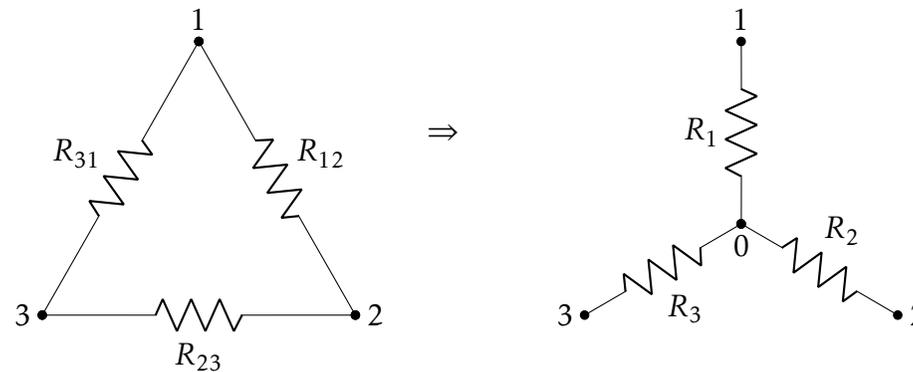


Figura 3.18: Trasformazione stella/triangolo

$$R_{12} = 20 \, \Omega \quad R_{23} = 80 \, \Omega \quad R_{31} = 100 \, \Omega$$

Soluzione

Le resistenze R_1 , R_2 , R_3 si calcolano con le formule di trasformazione da triangolo a stella:

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 10 \, \Omega \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 8 \, \Omega \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 40 \, \Omega$$

Osservazioni

In alternativa si possono calcolare le conduttanze G_1 , G_2 , G_3 e poi da queste le corrispondenti resistenze.

$$G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{20} = 0.05 \, S \quad G_{23} = \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{80} = 0.0125 \, S \quad G_{31} = \frac{1}{R_{31}} = \frac{1}{100} = 0.01 \, S$$

$$G_1 = \frac{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}}{G_{23}} = \frac{1}{10} \, S \quad G_2 = \frac{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}}{G_{31}} = \frac{1}{8} \, S \quad G_3 = \frac{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}}{G_{12}} = \frac{1}{40} \, S$$

$$R_1 = \frac{1}{G_1} = 10 \, \Omega \quad R_2 = \frac{1}{G_2} = 8 \, \Omega \quad R_3 = \frac{1}{G_3} = 40 \, \Omega$$

Si noti, infine che se le resistenze della configurazione a triangolo sono uguali tra loro, anche le resistenze della configurazione a stella sono uguali tra loro. Ad esempio:

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta} = 60 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{R_{\Delta}} = R_{\star} = 20 \, \Omega$$

3.11 Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori (stella/triangolo)

Nella figura 3.19 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da $\ell = 12$ resistori ideali e da un bipolo b_1 . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la tensione v .

1. Calcolare il valore della resistenza R_{eq} del resistore equivalente alla porta 1 – 2.
2. Calcolare la corrente i con i riferimenti di figura.

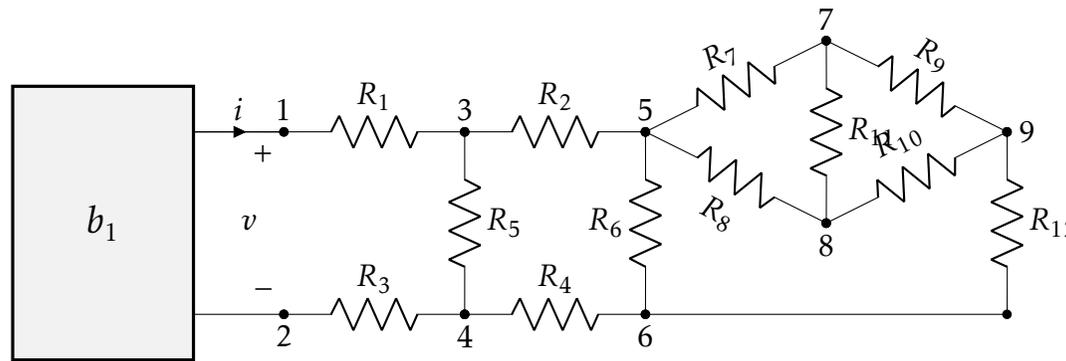


Figura 3.19: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad R_3 = 20 \Omega \quad R_4 = 20 \Omega \quad R_5 = 50 \Omega \quad R_6 = 40 \Omega$$

$$R_7 = 15 \Omega \quad R_8 = 10 \Omega \quad R_9 = 60 \Omega \quad R_{10} = 40 \Omega \quad R_{11} = 20 \Omega \quad R_{12} = 10 \Omega \quad v = V = 100 V$$

Soluzione

Si noti che la configurazione di resistori collegati tra i nodi 5, 7, 8, 9 di figura 3.19 non può essere semplificata con sole operazioni di serie e parallelo. È possibile però semplificare la rete, arrivando a calcolare la resistenza equivalente ai nodi 5-9 (R_{eq}^{59}) indicata in figura 3.20, ricorrendo ad una delle quattro trasformazioni alternative descritte nel seguito. Utilizzando il valore di resistenza $R_{eq}^{59} = 30 \Omega$ (vedi più avanti come calcolarlo), si può semplificare ulteriormente la rete come in figura 3.20, dove a destra si è indicato con R_{eq}^{34} il valore della resistenza equivalente alla porzione di rete nel rettangolo rosso di sinistra².

$$R_{eq}^{34} = (R_2 + R_4) + (R_6) // (R_{12} + R_{eq}^{59}) = (10 + 20) + (40) // (30 + 10) = (30) + (40) // (40) = (30) + (20) = 50 \Omega$$

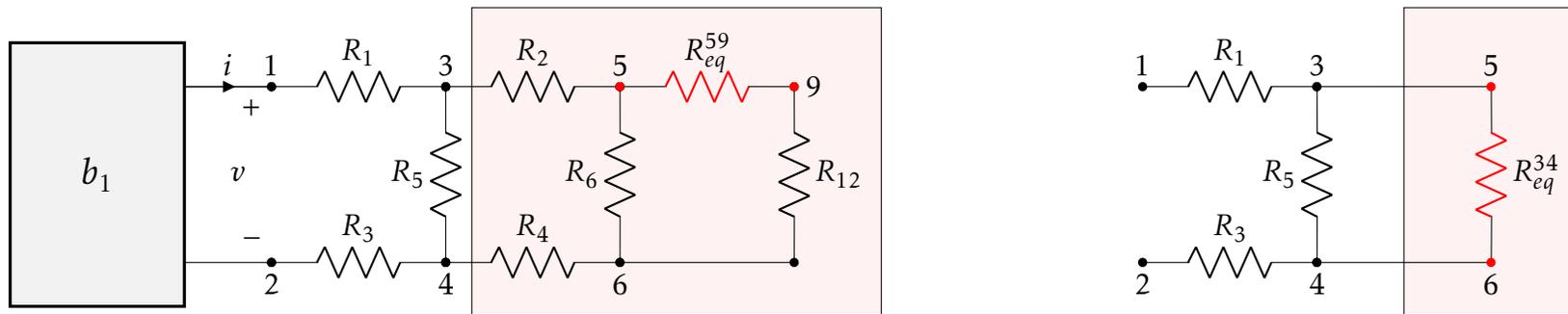


Figura 3.20: Resistenza equivalente alla porta di una rete di resistori

A questo punto è facile calcolare la R_{eq} ai nodi 1-2 come:

$$R_{eq} = (R_1 + R_3) + (R_5) // (R_{eq}^{34}) = (5 + 20) + (50) // (50) = (25) + (25) = 50 \Omega$$

Infine, si può calcolare la corrente i che, con i riferimenti di figura, vale:

$$i = \frac{v}{R_{eq}} = \frac{100}{50} = 2 \text{ A}$$

²Si adotta la notazione $R_x // R_y$ per indicare il parallelo tra R_x ed R_y .

Trasformazione n.1: stella (R_7, R_9, R_{11}) \rightarrow triangolo (R_{58}, R_{59}, R_{89})

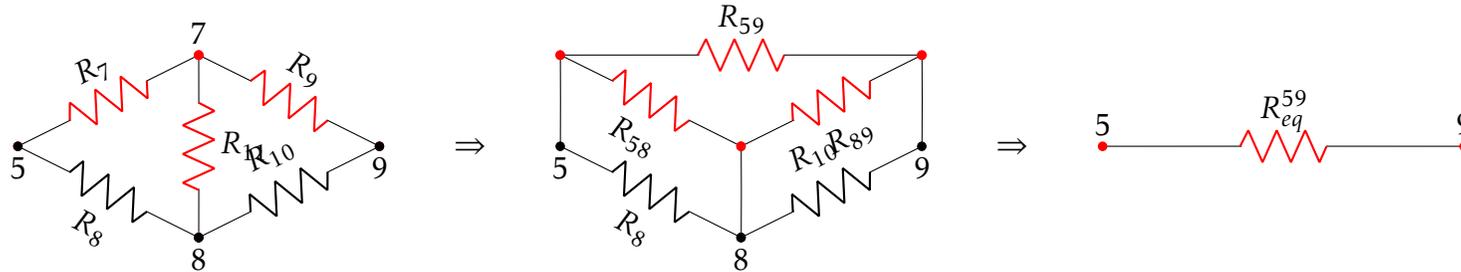


Figura 3.21: Trasformazione n.1: stella (R_7, R_9, R_{11}) \rightarrow triangolo (R_{58}, R_{59}, R_{89})

Le resistenze R_{58}, R_{59}, R_{89} si calcolano con le formule di trasformazione da stella a triangolo:

$$R_{58} = \frac{R_7 R_9 + R_7 R_{11} + R_9 R_{11}}{R_9} = 40 \, \Omega \quad R_{59} = \frac{R_7 R_9 + R_7 R_{11} + R_9 R_{11}}{R_{11}} = 120 \, \Omega \quad R_{89} = \frac{R_7 R_9 + R_7 R_{11} + R_9 R_{11}}{R_7} = 160 \, \Omega$$

Infine si può calcolare la resistenza equivalente ai nodi 5-9:

$$R_{eq}^{59} = [(R_{58} // R_8) + (R_{89} // R_{10})] // (R_{59}) = [(40 // 10) + (160 // 40)] // (120) = [(8) + (32)] // (120) = (40) // (120) = 30 \, \Omega$$

Trasformazione n.2: stella (R_8, R_{10}, R_{11}) \rightarrow triangolo (R_{57}, R_{59}, R_{79})

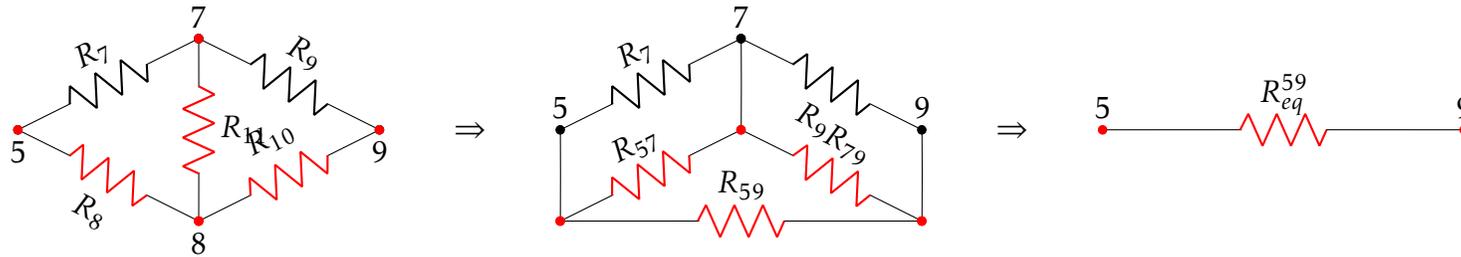


Figura 3.22: Trasformazione n.2: stella (R_8, R_{10}, R_{11}) \rightarrow triangolo (R_{57}, R_{59}, R_{79})

Le resistenze R_{57}, R_{59}, R_{79} si calcolano con le formule di trasformazione da stella a triangolo:

$$R_{57} = \frac{R_5 R_7 + R_5 R_9 + R_7 R_{11}}{R_{10}} = 35 \Omega \quad R_{59} = \frac{R_5 R_7 + R_5 R_9 + R_7 R_{11}}{R_{11}} = 70 \Omega \quad R_{79} = \frac{R_5 R_7 + R_5 R_9 + R_7 R_{11}}{R_8} = 140 \Omega$$

Infine si può calcolare la resistenza equivalente ai nodi 5-9:

$$R_{eq}^{59} = [(R_{57} // R_7) + (R_{79} // R_9)] // (R_{59}) = [(35 // 15) + (140 // 60)] // (70) = [(10.5) + (42)] // (70) = (52.5) // (70) = 30 \Omega$$

Trasformazione n.3: triangolo (R_7, R_8, R_{11}) \rightarrow stella (R_5^0, R_7^0, R_8^0)

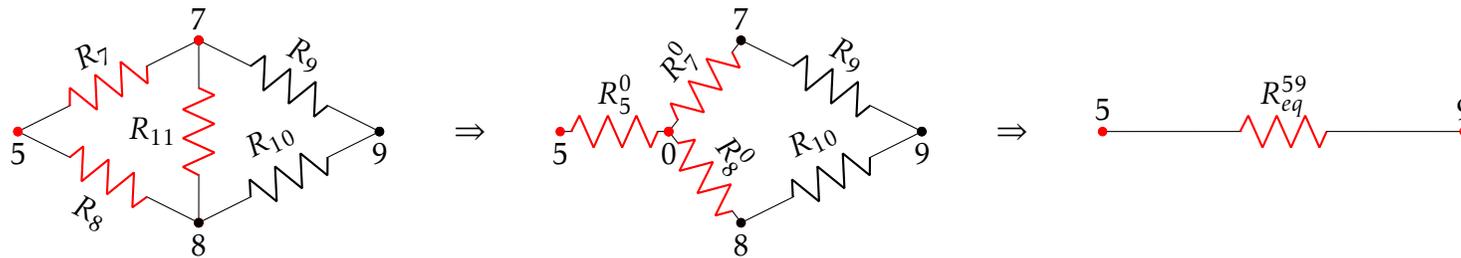


Figura 3.23: Trasformazione n.3: triangolo (R_7, R_8, R_{11}) \rightarrow stella

Le resistenze R_5^0, R_7^0, R_8^0 si calcolano con le formule di trasformazione da triangolo a stella:

$$R_5^0 = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8 + R_{11}} = 3.\bar{3} \Omega \quad R_7^0 = \frac{R_7 R_{11}}{R_7 + R_8 + R_{11}} = 6.\bar{6} \Omega \quad R_8^0 = \frac{R_8 R_{11}}{R_7 + R_8 + R_{11}} = 4.\bar{4} \Omega$$

Infine si può calcolare la resistenza equivalente ai nodi 5-9:

$$R_{eq}^{59} = (R_5^0) + \left[(R_7^0 + R_9) // (R_8^0 + R_{10}) \right] = (3.\bar{3}) + \left[(6.\bar{6} + 60) // (4.\bar{4} + 40) \right] = (3.\bar{3}) + \left[(66.\bar{6}) + (44.\bar{4}) \right] = (3.\bar{3}) + (26.\bar{6}) = 30 \Omega$$

Trasformazione n.4: triangolo $(R_9, R_{10}, R_{11}) \rightarrow$ stella (R_7^0, R_8^0, R_9^0)

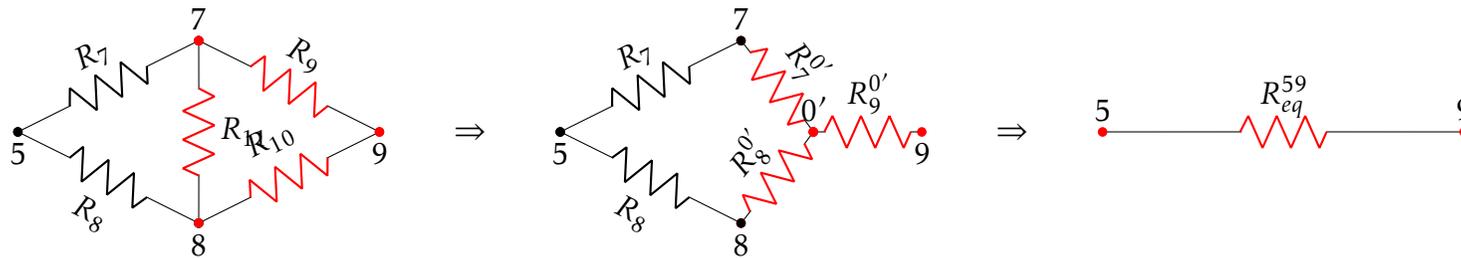


Figura 3.24: Trasformazione n.4: triangolo $(R_7, R_8, R_9) \rightarrow$ stella (R_7^0, R_8^0, R_9^0)

Le resistenze R_7^0, R_8^0, R_9^0 si calcolano con le formule di trasformazione da triangolo a stella:

$$R_7^0 = \frac{R_9 R_{11}}{R_9 + R_{10} + R_{11}} = 10 \, \Omega \quad R_8^0 = \frac{R_{10} R_{11}}{R_9 + R_{10} + R_{11}} = 6.\bar{6} \, \Omega \quad R_9^0 = \frac{R_9 R_{10}}{R_9 + R_{10} + R_{11}} = 20 \, \Omega$$

Infine si può calcolare la resistenza equivalente ai nodi 5-9:

$$R_{eq}^{59} = (R_9^0) + \left[(R_7^0 + R_7) // (R_8^0 + R_8) \right] = (20) + \left[(10 + 15) // (6.\bar{6} + 10) \right] = (20) + \left[(25) + (16.\bar{6}) \right] = (20) + (10) = 30 \, \Omega$$

4

Connessioni fondamentali - Generatori affini adinamici

4.1 Bipoli non lineari in serie

A regime stazionario, dati i due bipoli A e B le cui caratteristiche statiche esterne sono rappresentate in figura 4.1 e che vengono connessi a formare il bipolo C, ricavare la caratteristica statica esterna del bipolo C.

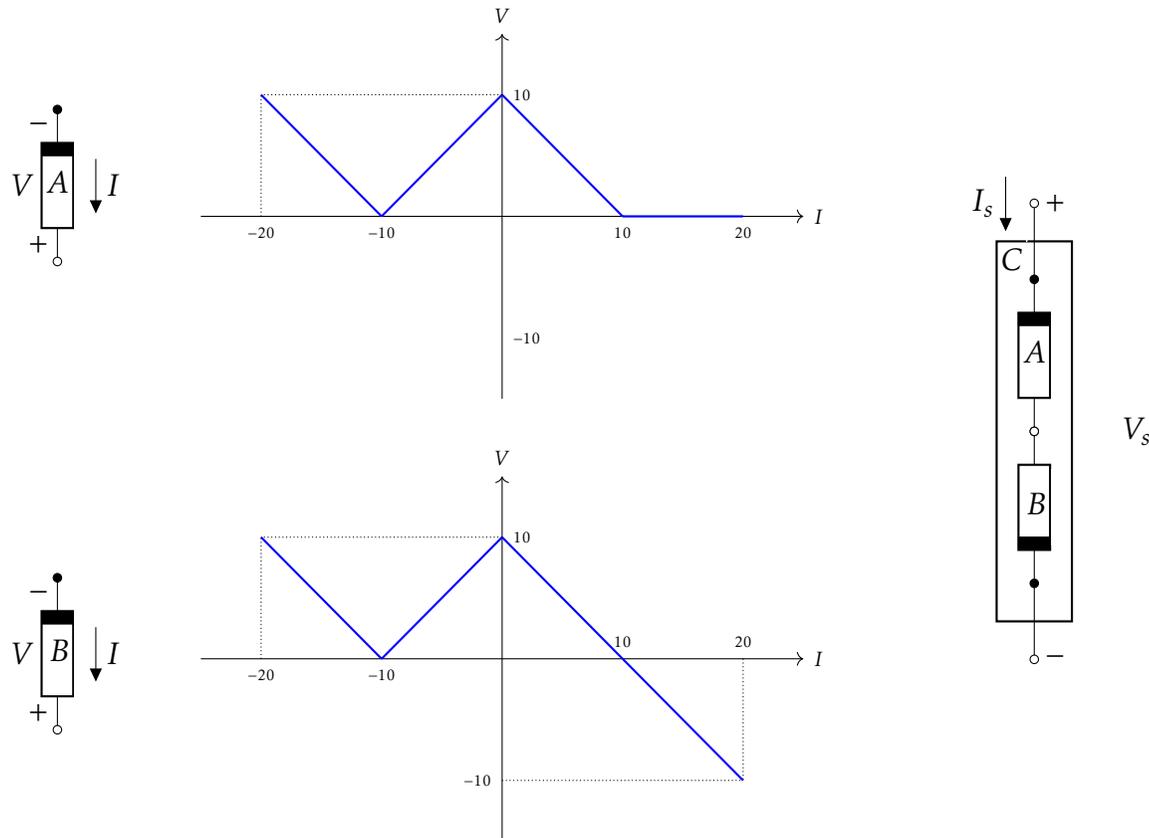


Figura 4.1: Connessione in serie di due bipoli (A, B) con caratteristiche statiche esterne non lineari

Soluzione

La caratteristica statica esterna del bipolo C , ottenuto connettendo i bipoli A e B in serie con i riferimenti di figura 4.1, si ricava sommando i valori di tensione dei bipoli A e B a parità di corrente.

Innanzitutto si ricavano i segni delle correnti dei bipoli A e B connessi in serie, assumendo come riferimento la corrente I_s del bipolo C :

$$A: I_A = +I_s$$

$$B: I_B = -I_s$$

Visto che $I_B = -I_s$, la caratteristica statica esterna del bipolo B va “specchiata” rispetto all’asse delle tensioni come rappresentato dalla spezzata di colore verde in figura 4.2.

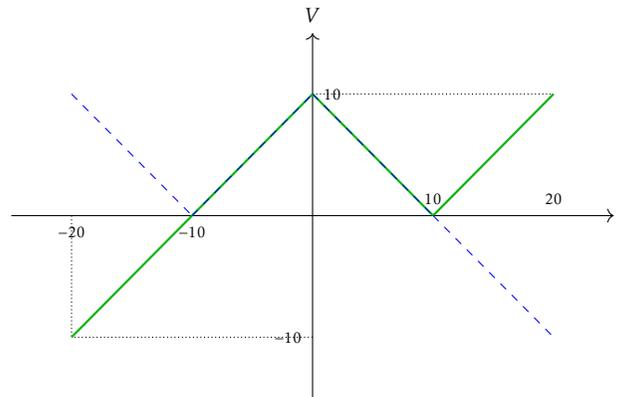


Figura 4.2: Caratteristica statica esterna del bipolo B in cui si inverte il riferimento di corrente

Poi si scrive la LKT, esprimendo la V_s in funzione delle tensioni dei bipoli A e B :

$$V_s = -V_A + V_B$$

Visto che nella LKT la tensione V_A appare con il segno meno, la caratteristica statica esterna del bipolo A va “specchiata” rispetto all’asse delle correnti come rappresentato dalla caratteristica statica di colore rosso riportata in figura 4.3.

Infine si sommano, a parità di tensione, le caratteristiche statiche esterne del bipolo A (rosso, caratteristica di figura 4.3) e del bipolo B (verde, caratteristica di figura 4.2), ottenendo la caratteristica statica esterna del bipolo C riportata in colore blu in figura 4.4.

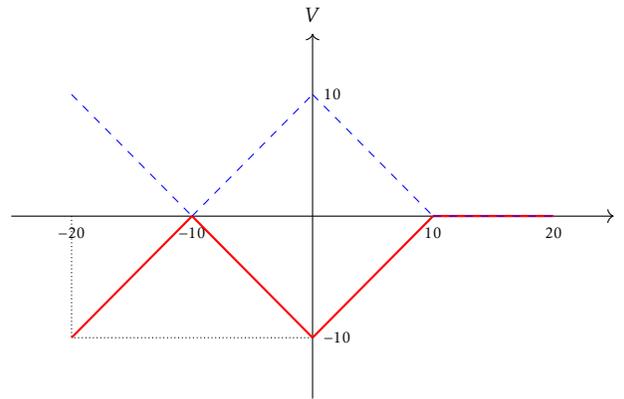


Figura 4.3: Caratteristica statica esterna del bipolo A in cui si inverte il riferimento di tensione

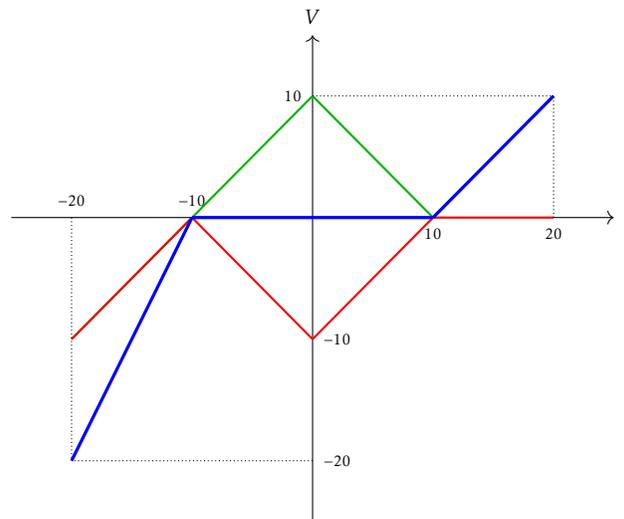


Figura 4.4: Caratteristica statica esterna del bipolo C (blu), ottenuta sommando, a parità di tensione, le caratteristiche statiche esterne del bipolo A (verde) e del bipolo B (rosso)

4.2 Bipoli non lineari in parallelo

A regime stazionario, dati i due bipoli A e B le cui caratteristiche statiche esterne sono rappresentate in figura 4.5 e che vengono connessi a formare il bipolo C, ricavare la caratteristica statica esterna del bipolo C.

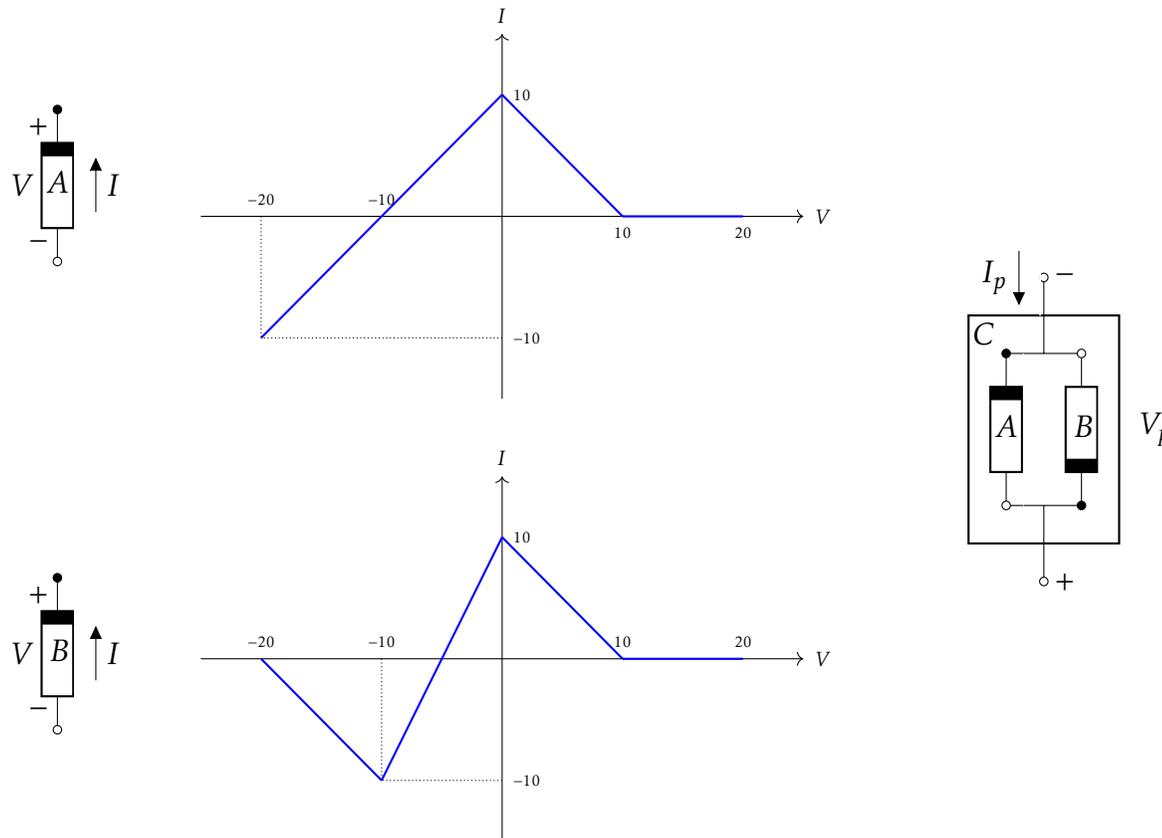


Figura 4.5: Connessione in parallelo di due bipoli (A, B) con caratteristiche statiche esterne non lineari

Soluzione

La caratteristica statica esterna del bipolo C , ottenuto connettendo i bipoli A e B in parallelo con i riferimenti di figura 4.5, si ottiene sommando i valori di corrente dei bipoli A e B a parità di tensione (assumendo come riferimento la tensione V_p di C).

Innanzitutto si ricavano i segni delle tensioni dei bipoli A e B connessi in parallelo prendendo come riferimento il verso della tensione V_p :

$$A: V_A = -V_p$$

$$B: V_B = +V_p$$

Visto che $V_A = -V_p$, la caratteristica statica esterna del bipolo A va “specchiata” rispetto all’asse delle correnti come rappresentato dalla spezzata di colore verde in figura 4.6.

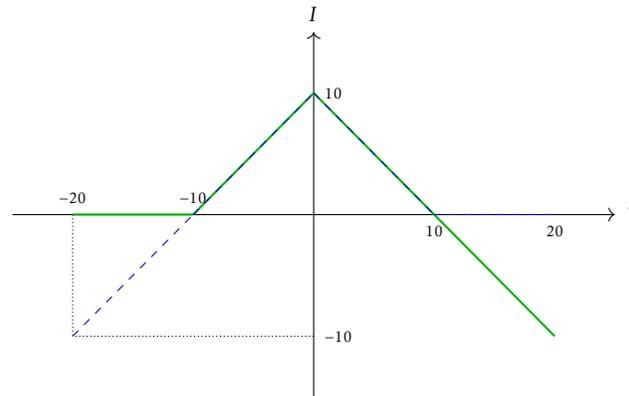


Figura 4.6: Caratteristica statica esterna del bipolo A in cui si inverte il riferimento di tensione

Poi si scrive la LKC, esprimendo la I_p in funzione delle correnti dei bipoli A e B :

$$I_p = -I_A + I_B$$

Visto che nella LKC la corrente I_A appare con il segno meno, la caratteristica statica esterna del bipolo A di figura 4.6 va “specchiata” rispetto all’asse delle tensioni come rappresentato dalla caratteristica statica di colore rosso riportata in figura 4.7.

Infine si sommano, a parità di tensione, le caratteristiche statiche esterne del bipolo A (rosso, caratteristica di figura 4.7) e del bipolo B (verde, caratteristica di figura 4.5), ottenendo la caratteristica statica esterna del bipolo C riportata in colore blu in figura 4.8.

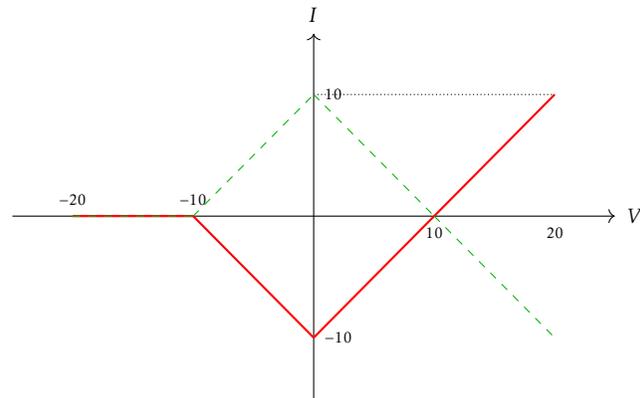


Figura 4.7: Caratteristica statica esterna del bipolo A in cui si inverte anche il riferimento di corrente

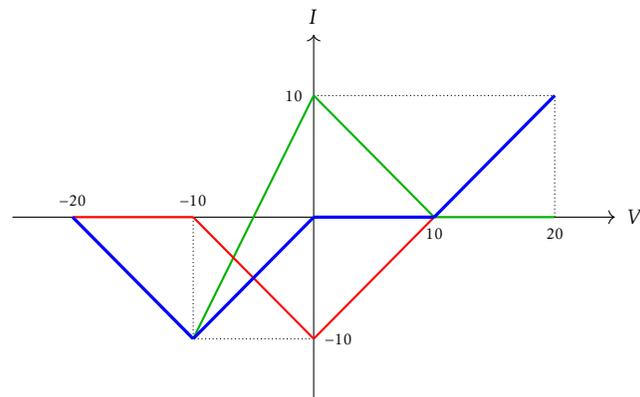


Figura 4.8: Caratteristica statica esterna del bipolo C (blu), ottenuta sommando, a parità di tensione, le caratteristiche statiche esterne del bipolo A (rosso) e del bipolo B (verde)

4.3 Applicazione delle trasformazioni $GAT \rightarrow GAC$ e $GAC \rightarrow GAT$

Nella figura 4.9 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da tre resistori ideali (R_1, R_2, R_3) e da un generatore ideale di tensione E . Sono noti i valori di tutte le resistenze e la tensione E . Immaginando che a destra dei morsetti A e B si trovi una rete elettrica, i resistori R_1, R_2 e R_3 sono collegati tra di loro in modo da non consentire semplificazioni tramite equivalenti serie o parallelo. È tuttavia possibile semplificare notevolmente la rete operando una sequenza di trasformazioni $GAT \rightarrow GAC$.

1. Calcolare i valori della resistenza R_{eq} e della tensione del generatore ideale E_{eq} del GAT equivalente della rete a sinistra dei morsetti A e B .

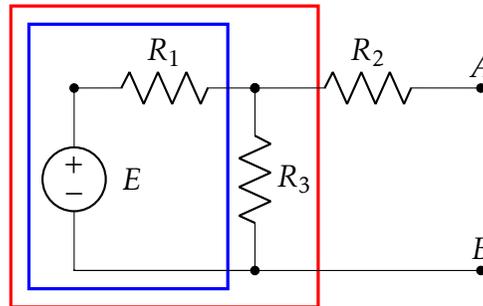


Figura 4.9: Rete di resistori e GIT

$$R_1 = 20 \, \Omega \quad R_2 = 45 \, \Omega \quad R_3 = 60 \, \Omega \quad E = 120 \, V$$

Soluzione

Trasformiamo il GAT racchiuso nella linea blu nel GAC equivalente, con $J = E/R_1 = 120/20 = 6 \text{ A}$ e $R_{1'} = R_1 = 20 \text{ }\Omega$.

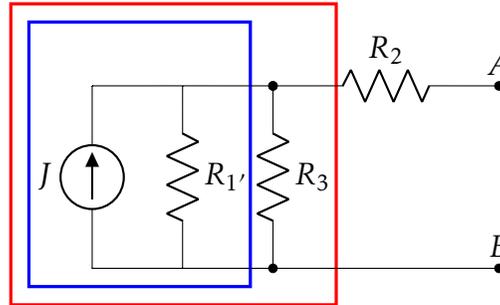


Figura 4.10: Prima trasformazione GAT→GAC

Dopo questa trasformazione $R_{1'}$ e R_3 risultano essere in parallelo e possono essere sostituite dal resistore equivalente $R_{1'3} = (R_{1'}R_3)/(R_{1'} + R_3) = (20 * 60)/(20 + 60) = 15 \text{ }\Omega$.

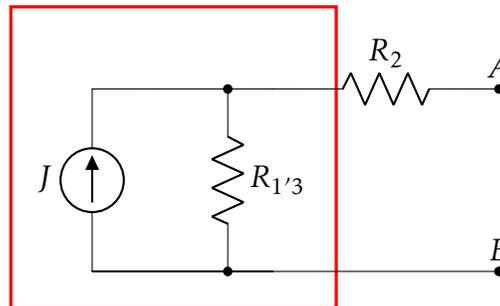


Figura 4.11: Sostituzione di due resistori in parallelo con un resistore equivalente

Notiamo ora che la rete all'interno della linea rossa è un GAC che può essere sostituito con un GAT equivalente, con $E_{eq} = JR_{1'3} = 6 \cdot 15 = 90 \text{ V}$ e $R_s = R_{1'3} = 15 \Omega$.

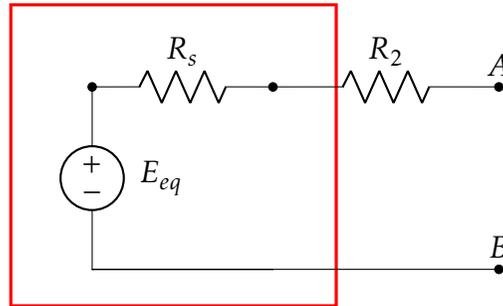


Figura 4.12: Seconda trasformazione GAC→GAT

Infine dopo questa trasformazione R_s e R_2 risultano essere in serie e possono essere sostituite dal resistore equivalente $R_{eq} = R_s + R_2 = 15 + 45 = 60 \Omega$.

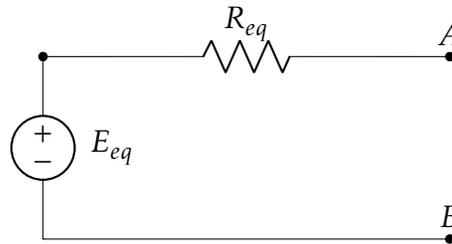


Figura 4.13: Seconda trasformazione GAC→GAT

4.4 Formule di Millman

Nella figura 4.14 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da un generatore affine di corrente (J_1, R_1) e da un generatore affine di tensione (E_2, R_2). Sono noti i valori di tutte le resistenze, la corrente impressa J_1 e la tensione impressa E_2

Calcolare la tensione V_{AB} ai morsetti AB utilizzando la formula di Millman.

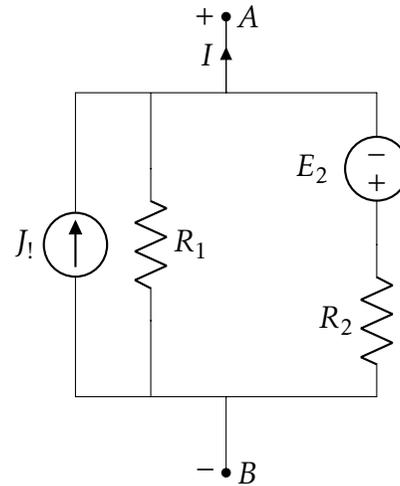


Figura 4.14: Rete di resistori e generatori ideali

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad J_1 = 5 A \quad E_2 = 20 V$$

Soluzione

La tensione V_{AB} può essere calcolata immediatamente applicando la formula di Millman, dove n_J indica il numero di generatori affini di corrente (GAC) e n_E indica il numero di generatori affini di tensione (GAT)

$$V_{AB} = \frac{\sum_{h=1}^{n_J} \pm J_h + \sum_{k=1}^{n_E} \pm E_k/R_k}{\sum_{h=1}^{n_J} G_h + \sum_{k=1}^{n_E} 1/R_k}$$

Nel caso in esame abbiamo solo un GAC e un GAT, evidenziati dai rettangoli di colore rosso e blu, rispettivamente, in figura 4.15.

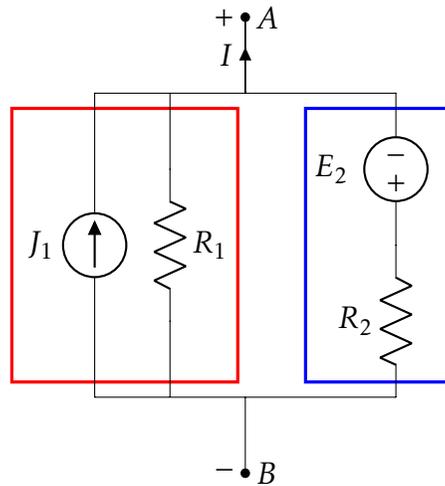


Figura 4.15: Rete di resistori e generatori ideali

Tenendo conto dei riferimenti della corrente e delle tensioni impresse si ha:

$$V_{AB} = \frac{J_1 - E_2/R_2}{G_1 + 1/R_2} = \frac{5 - 2}{0.1 + 0.2} = 10 \text{ V}$$

Osservazioni

La soluzione può essere ottenuta anche applicando la sovrapposizione degli effetti

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot J + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E = 16.6 - 6.6 = 10 \text{ V}$$

4.5 Formule di Millman

Nella figura 4.16 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da due generatori affini di tensione (E_1, R_1), (E_2, R_2) e da un generatore affine di corrente (J_3, R_3). Sono noti i valori di tutte le resistenze, le tensioni impresses E_1 ed E_2 e la corrente impressa J_3 .

Calcolare la tensione V_{AB} ai morsetti AB utilizzando la formula di Millman.

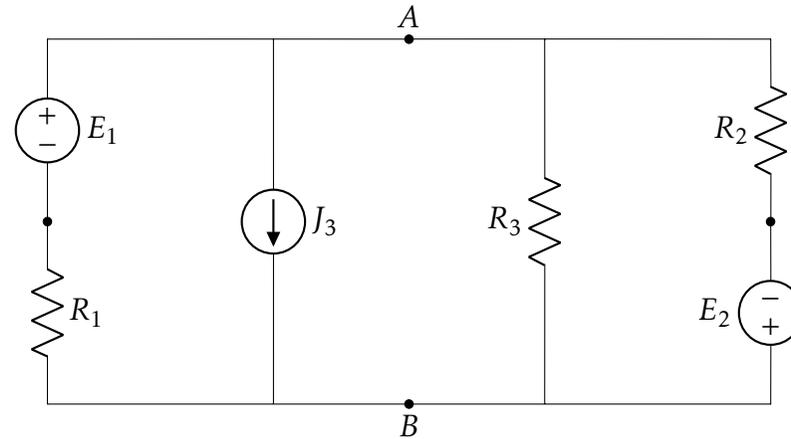


Figura 4.16: Rete di resistori e generatori ideali

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega \quad R_3 = 10 \Omega \quad E_1 = 100 \text{ V} \quad E_2 = 200 \text{ V} \quad J_3 = 20 \text{ V}$$

Soluzione

La tensione V_{AB} può essere calcolata immediatamente applicando la formula di Millman, dove n_J indica il numero di generatori affini di corrente (GAC) e n_E indica il numero di generatori affini di tensione (GAT):

$$V_{AB} = \frac{\sum_{h=1}^{n_J} \pm J_h + \sum_{k=1}^{n_E} \pm E_k/R_k}{\sum_{h=1}^{n_J} G_h + \sum_{k=1}^{n_E} 1/R_k}$$

Nel caso in esame abbiamo un solo GAC e due GAT, evidenziati dai rettangoli di colore rosso e blu, rispettivamente, in figura 4.17.

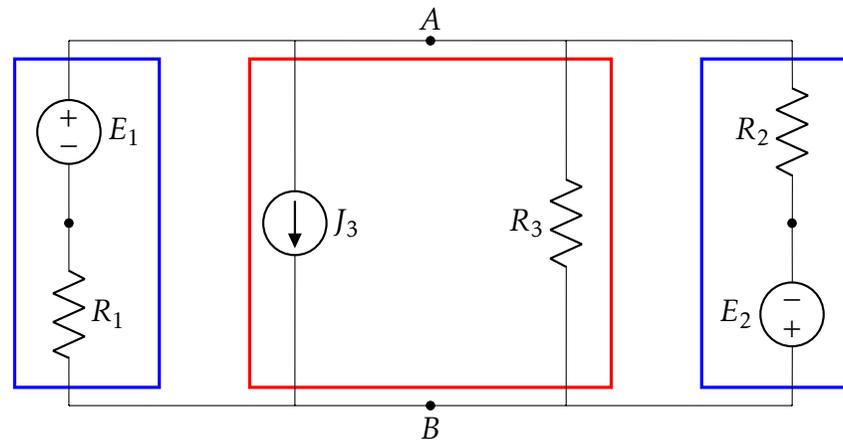


Figura 4.17: Rete di resistori e generatori ideali

Tenendo conto dei riferimenti della corrente e delle tensioni impresse si ha:

$$V_{AB} = \frac{-J_3 + E_1/R_1 - E_2/R_2}{G_3 + 1/R_1 + 1/R_2} = \frac{-20 + 10 - 40}{0.1 + 0.1 + 0.2} = -125 \text{ V}$$

Osservazioni

La soluzione può essere ottenuta anche applicando la sovrapposizione degli effetti

$$V_{AB} = V_{AB}^{E_1} + V_{AB}^{E_2} + V_{AB}^{J_3} = E_1 \cdot \frac{R_2//R_3}{R_1 + R_2//R_3} - E_2 \cdot \frac{R_1//R_3}{R_1//R_3 + R_2} - J_3 \cdot R_1//R_2//R_3 = 25 - 100 - 50 = -125 \text{ V}$$

5

Analisi delle reti lineari adinamiche

5.1 Metodo delle correnti di anello

Nella figura 5.1 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione e resistori ideali. Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle tensioni impresse.

1. Utilizzando il metodo delle correnti di anello, calcolare il valore della correnti con i riferimenti indicati in figura.
2. Verificare la conservazione delle potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete

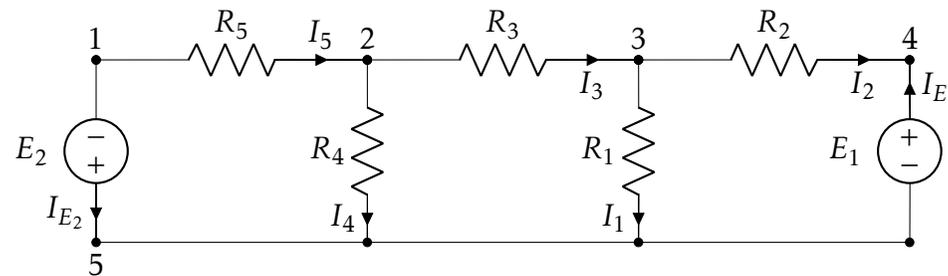


Figura 5.1: Rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione e resistori ideali

$$R_1 = 10 \, \Omega \quad R_2 = 6 \, \Omega \quad R_3 = 4 \, \Omega \quad R_4 = 20 \, \Omega \quad R_5 = 2 \, \Omega \quad E_1 = 30 \, V \quad E_2 = 32 \, V$$

Soluzione

Considerando la rete costituita da due generatori ideali di tensione e da cinque resistori ideali, si hanno $\ell = 7$ lati e $n = 5$ nodi. Pertanto gli anelli sono $m = \ell - n + 1 = 7 - 5 + 1 = 3$. Se invece si considerano i due GAT costituiti dalle serie (E_1, R_3) e (E_2, R_5) , si devono considerare solo $\ell = 5$ lati $n = 3$ nodi (un lato e un nodo in meno per ogni GAT). Ovviamente non cambia il numero degli anelli $m = \ell - n + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$.

Per scrivere il sistema di equazioni linearmente indipendenti sui 3 anelli, si fissa innanzitutto il verso (orario) delle correnti di anello K_1, K_2, K_3 , come in figura 5.2.

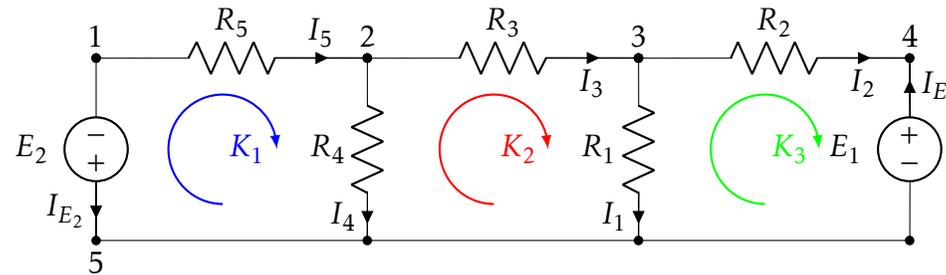


Figura 5.2: Correnti di anello K_1, K_2, K_3 (verso orario).

Le equazioni sui tre anelli sono:

$$\begin{cases} (R_4 + R_5)K_1 - R_4K_2 & = -E_2 \\ (R_1 + R_3 + R_4)K_2 - R_4K_1 - R_1K_3 & = 0 \\ (R_1 + R_2)K_3 - R_1K_2 & = -E_1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori per le correnti di anello:

$$\begin{cases} K_1 = -6 \text{ A} \\ K_2 = -5 \text{ A} \\ K_3 = -5 \text{ A} \end{cases}$$

Si possono quindi calcolare le correnti dei lati. Con i riferimenti di figura si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = K_2 - K_3 = -5 - (-5) = 0 \text{ A} \\ I_2 = K_3 = -5 \text{ A} \\ I_3 = K_2 = -5 \text{ A} \\ I_4 = K_1 - K_2 = -6 - (-5) = -1 \text{ A} \\ I_5 = K_1 = -6 \text{ A} \\ I_{E_1} = -K_3 = -(-5) = 5 \text{ A} \\ I_{E_2} = -K_1 = -(-6) = 6 \text{ A} \end{array} \right.$$

Verifichiamo ora che vale la conservazione della potenza elettrica.

La potenza assorbita dai resistori vale:

$$P_R = \sum_{k=1}^5 P_k = \sum_{k=1}^5 R_k I_k^2 = 0 + 150 + 100 + 20 + 72 = 342 \text{ W}$$

Le potenze uscenti dai generatori di tensione E_1 ed E_2 (entrambi convenzionati da generatori: corrente uscente dal morsetto "+") valgono:

$$P_{E_1} = E_1 I_{E_1} = 150 \text{ W}, \quad P_{E_2} = E_2 I_{E_2} = 192 \text{ W}$$

Sono entrambe positive e quindi effettivamente erogate.

Cambiando il segno alla potenza dei generatori di tensione per passare dalla convenzione dei generatori a quella degli utilizzatori (il teorema di Tellegen prevede che tutti i bipoli siano convenzionati allo stesso modo), si ottiene:

$$P = P_R - P_E = (342) - (150 + 192) = 0 \text{ W}$$

Osservazioni

Vediamo come si modifica la scrittura delle equazioni, scegliendo il verso opposto (antiorario) per le correnti di anello K_1 , K_2 , K_3 , come indicato in figura 5.3.

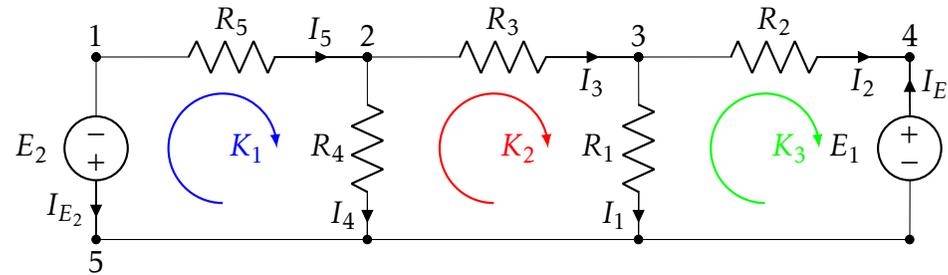


Figura 5.3: Correnti di anello K_1 , K_2 , K_3 (verso orario).

Le equazioni sui tre anelli rimangono inalterate per quanto riguarda i termini alla sinistra dell'uguale mentre cambia il segno nei termini a destra dell'uguale.

$$\begin{cases} (R_4 + R_5)K_1 - R_4K_2 & = E_2 \\ (R_1 + R_3 + R_4)K_2 - R_1K_3 - R_4K_1 & = 0 \\ (R_1 + R_2)K_3 - R_1K_2 & = E_1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono pertanto i seguenti valori per le correnti di anello:

$$\begin{cases} K_1 = 6 \text{ A} \\ K_2 = 5 \text{ A} \\ K_3 = 5 \text{ A} \end{cases}$$

Si possono quindi calcolare le correnti dei lati. Tenendo conto dei nuovi riferimenti delle correnti di anello si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = K_3 - K_2 = 5 - 5 = 0 \text{ A} \\ I_2 = -K_3 = -5 \text{ A} \\ I_3 = -K_2 = -5 \text{ A} \\ I_4 = K_2 - K_1 = 5 - 6 = -1 \text{ A} \\ I_5 = -K_1 = -6 \text{ A} \\ I_{E_1} = K_3 = 5 \text{ A} \\ I_{E_2} = K_1 = 6 \text{ A} \end{array} \right.$$

Il bilancio delle potenze rimane ovviamente inalterato.

5.2 Metodo delle correnti di anello modificato

Nella figura 5.4 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione, resistori ideali e da due generatori ideali di corrente¹. Sono noti i valori delle resistenze e delle grandezze impresse.

1. Utilizzando il metodo delle correnti di anello (modificato), calcolare il valore della correnti con i riferimenti indicati in figura.
2. Verificare la conservazione delle potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete

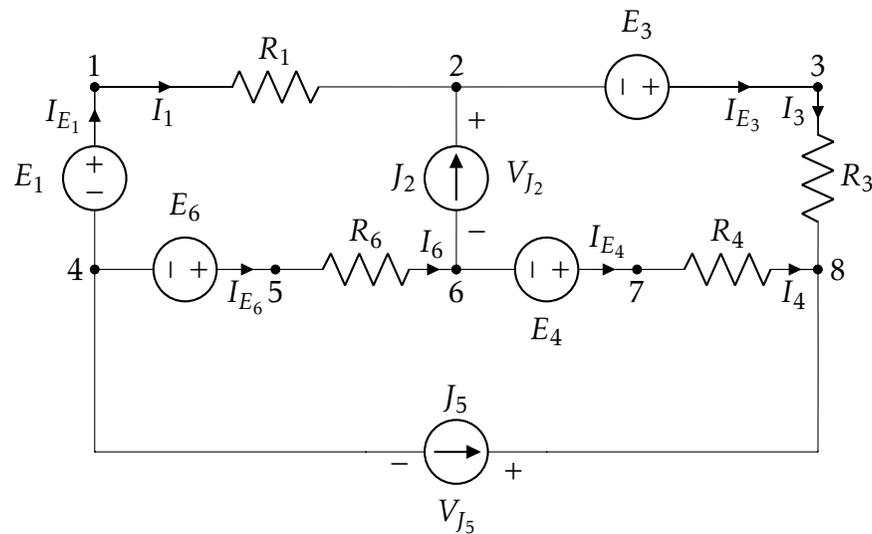


Figura 5.4: Rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali, generatori ideali di tensione e di corrente

$$R_1 = 4 \Omega \quad R_3 = 2 \Omega \quad R_4 = 2 \Omega \quad R_6 = 4 \Omega \quad E_1 = 20 \text{ V} \quad E_3 = 20 \text{ V} \quad E_4 = 10 \text{ V} \quad E_6 = 10 \text{ V} \quad J_2 = 5 \text{ A} \quad J_5 = 4 \text{ A}$$

¹I generatori ideali di corrente costituiscono lati "anomali" per l'applicazione diretta del metodo delle correnti di anello.

Soluzione

Considerando la rete costituita da quattro generatori ideali di tensione, due generatori ideali di corrente e da cinque resistori ideali, si hanno $\ell = 10$ lati e $n = 8$ nodi. Pertanto gli anelli sono $m = \ell - n + 1 = 10 - 8 + 1 = 3$. Se invece si considerano i quattro GAT costituiti dalle serie (E_1, R_1) , (E_3, R_3) , (E_4, R_4) e (E_6, R_6) , si devono considerare solo $\ell = 6$ lati e $n = 4$ nodi (un lato e un nodo in meno per ogni GAT). Ovviamente non cambia il numero degli anelli $m = \ell - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Per scrivere il sistema di equazioni linearmente indipendenti sui 3 anelli, si fissa innanzitutto il verso (orario) delle correnti di anello K_1, K_2, K_3 , come in figura 5.5.

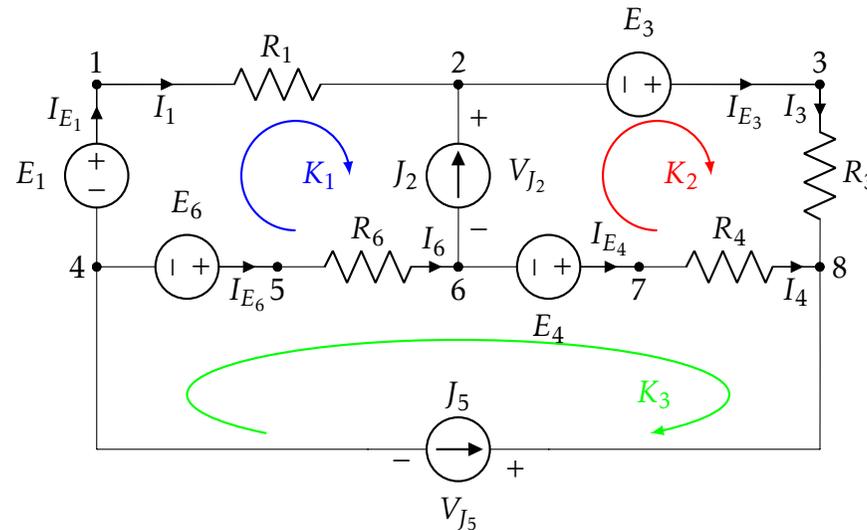


Figura 5.5: Correnti di anello K_1, K_2, K_3 (verso orario).

Si ottiene un sistema di cinque equazioni in cinque incognite: le prime due equazioni ottenute dall'applicazione del metodo delle correnti di anello e le ultime due che vincolano le correnti degli anelli alle correnti impresse (note). Le incognite sono le tre correnti degli anelli (K_1, K_2, K_3) e le due tensioni dei generatori ideali di corrente (V_{J_2} e V_{J_5}), indicate in rosso a destra dell'uguale nelle prime tre equazioni, per ricordare che non sono note e vanno determinate dalla soluzione del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1 + R_6)K_1 - R_6K_3 = E_1 - E_6 + (-V_{J_2}) \\ (R_3 + R_4)K_2 - R_4K_3 = E_3 - E_4 + (+V_{J_2}) \\ (R_4 + R_6)K_3 - R_6K_1 - R_4K_2 = E_4 + E_6 + (-V_{J_5}) \\ J_2 = K_2 - K_1 \\ J_5 = -K_3 \end{array} \right.$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori delle correnti di anello e delle tensioni dei generatori di corrente:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = -2 \text{ A} \\ K_2 = 3 \text{ A} \\ K_3 = -4 \text{ A} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{J_2} = 10 \text{ V} \\ V_{J_5} = 42 \text{ V} \end{array} \right.$$

Si possono quindi calcolare le correnti dei lati. Con i riferimenti di figura si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = I_{E_1} = K_1 = -2 \text{ A} \\ I_3 = I_{E_3} = K_2 = 3 \text{ A} \\ I_4 = I_{E_4} = K_3 - K_2 = -7 \text{ A} \\ I_6 = I_{E_6} = K_3 - K_1 = -2 \text{ A} \end{array} \right.$$

Verifichiamo ora che vale la conservazione della potenza elettrica.

La potenza assorbita dai resistori vale:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_6 I_6^2 = 16 + 18 + 98 + 16 = 148 \text{ W}$$

Le potenze uscenti dai generatori ideali di tensione (convenzione dei generatori: corrente uscente dal "+") sono:

$$P_{E_1} = E_1 I_{E_1} = -40 \text{ W}, \quad P_{E_3} = E_3 I_{E_3} = 60 \text{ W} \quad P_{E_5} = E_5 I_{E_5} = -70 \text{ W} \quad P_{E_6} = E_6 I_{E_6} = -42 \text{ W}$$

Risulta $P_{E_3} > 0$ e quindi é effettivamente erogata. Le altre tre sono negative e quindi sono assorbite (sarebbero positive se calcolate con la convenzione degli utilizzatori).

Le potenze uscenti dai generatori ideali di corrente (convenzione dei generatori: corrente uscente dal “+”) sono:

$$P_{J_2} = V_{J_2} J_2 = 50 \text{ W}, \quad P_{J_5} = E_3 I_{E_3} = 168 \text{ W}$$

Sono entrambe positive e quindi effettivamente erogate.

Si può ora verificare che vale la conservazione della potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete. Si noti che è necessario stabilire la stessa convenzione su tutti i bipoli, ad esempio quella degli utilizzatori. Dato che le potenze sui generatori sono state calcolate con la convenzione dei generatori, vanno conteggiate con segno opposto:

$$P = P_R + (-P_{E_1}) + (-P_{E_3}) + (-P_{E_4}) + (-P_{E_6}) + (-P_{J_2}) + (-P_{J_5}) = (168) + (40) + (-60) + (70) + (20) + (-50) + (-168) = 0 \text{ W}$$

Osservazioni

Un altro modo per verificare la conservazione della potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete consiste nel confrontare la somma delle potenze effettivamente assorbite con la somma delle potenze effettivamente erogate.

Le potenze assorbite sono quelle dei resistori ideali e quelle dei generatori ideali che risultano negative con la convenzione dei generatori (positive con la convenzione degli utilizzatori):

$$P_{\text{assorbite}} = P_R + |P_{E_1}| + |P_{E_4}| + |P_{E_6}| = 148 + 40 + 70 + 20 = 278 \text{ W}$$

Le potenze erogate sono quelle dei generatori ideali che risultano positive con la convenzione dei generatori (negative con la convenzione degli utilizzatori):

$$P_{\text{erogate}} = P_{E_3} + P_{J_2} + P_{J_5} = 60 + 50 + 168 = 278 \text{ W}$$

5.3 Metodo dei potenziali nodali

Nella figura 5.6 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di corrente e resistori ideali. Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle correnti impresse.

1. Utilizzando il metodo dei potenziali nodali, calcolare il valore della tensioni con i riferimenti indicati in figura.
2. Verificare la conservazione delle potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete

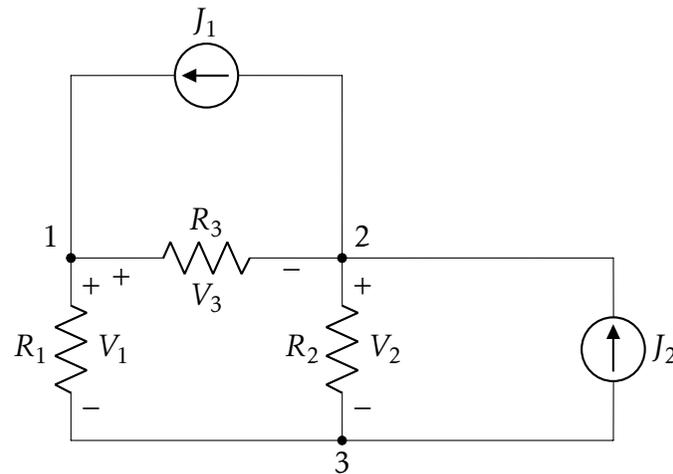


Figura 5.6: Rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di corrente e resistori ideali

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 6 \Omega \quad R_3 = 4 \Omega \quad J_1 = 15 \text{ V} \quad J_2 = 30 \text{ V}$$

Soluzione

La rete ha $n = 3$ nodi. Utilizzando il metodo dei potenziali nodali si possono scrivere $n - 1 = 2$ equazioni linearmente indipendenti.

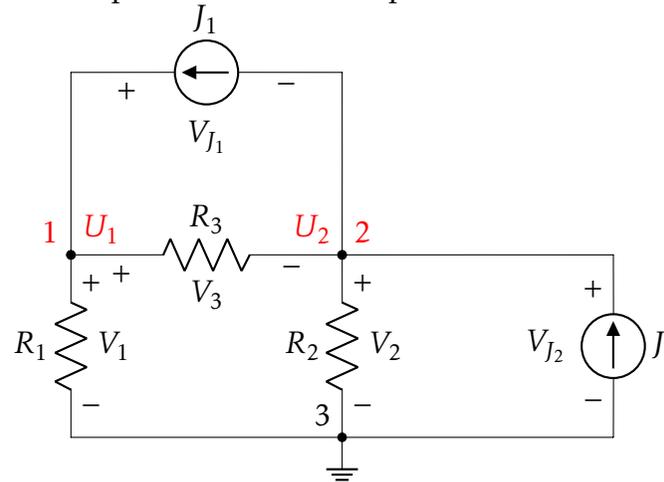


Figura 5.7: Rete elettrica in regime stazionario: il nodo 3 è scelto come nodo di massa (riferimento dei potenziali).

Scegliamo il nodo 3 come nodo di massa (riferimento dei potenziali), come indicato in figura 5.7. Le incognite sono i potenziali dei nodi 1 e 2 indicati con U_1 e U_2 , rispettivamente. Fissiamo poi i riferimenti di tensione indicati in figura con V_{J_1} e V_{J_2} stabilendo così la convenzione dei generatori per entrambi i generatori ideali di corrente.

Le equazioni scritte per i nodi 1 e 2 sono:

$$\begin{cases} (G_1 + G_3)U_1 - G_3U_2 = J_1 \\ (G_2 + G_3)U_2 - G_3U_1 = -J_1 + J_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori per le potenziali nodali: $U_1 = 40 \text{ V}$, $U_2 = 60 \text{ V}$

Si possono quindi calcolare le tensioni dei lati dei resistori ideali. Con i riferimenti di figura si ottiene:

$$\begin{cases} V_1 = U_1 = 40 \text{ V} \\ V_2 = U_2 = 60 \text{ V} \\ V_3 = U_1 - U_2 = -20 \text{ V} \end{cases}$$

Le tensioni dei generatori coincidono con le tensioni già calcolate per i resistori a cui sono collegati in parallelo:

$$\begin{cases} V_{J_1} = V_3 = -20 \text{ V} \\ V_{J_2} = V_2 = 60 \text{ V} \end{cases}$$

a cui corrispondono le potenze uscenti:

$$\begin{cases} P_{J_1} = V_{J_1} J_1 = -20 \cdot 15 = -300 \text{ W} & (\text{assorbita}) \\ P_{J_2} = V_{J_2} J_2 = 60 \cdot 30 = 1800 \text{ W} & (\text{erogata}) \end{cases}$$

Le potenze assorbite dai resistori sono:

$$P_1 = G_1 V_1^2 = \frac{1}{2}(40)^2 = 800 \text{ W} \quad P_2 = G_2 V_2^2 = \frac{1}{6}(60)^2 = 600 \text{ W} \quad P_3 = G_3 V_3^2 = \frac{1}{4}(-20)^2 = 100 \text{ W}$$

La potenza complessivamente assorbita dai bipoli della rete é data dalla somma delle potenze assorbite dai resistori ideali e dal generatore J_1 :

$$P_{\text{assorbita}} = P_1 + P_2 + P_3 + |P_{J_1}| = 800 + 600 + 100 + 300 = 1800 \text{ W}$$

L'unico bipolo della rete che eroga potenza é J_2 :

$$P_{\text{erogata}} = P_{J_2} = 1800 \text{ W}$$

É così verificato quanto previsto dal teorema di Tellegen.

5.4 Metodo dei potenziali nodali modificato

Nella figura 5.8 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali, un generatore ideale di corrente e un generatore ideale di tensione. Sono noti i valori delle resistenze e delle grandezze impresse.

1. Utilizzando il metodo dei potenziali nodali, calcolare il valore della tensioni dei resistori con i riferimenti indicati
2. Verificare la conservazione della potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete

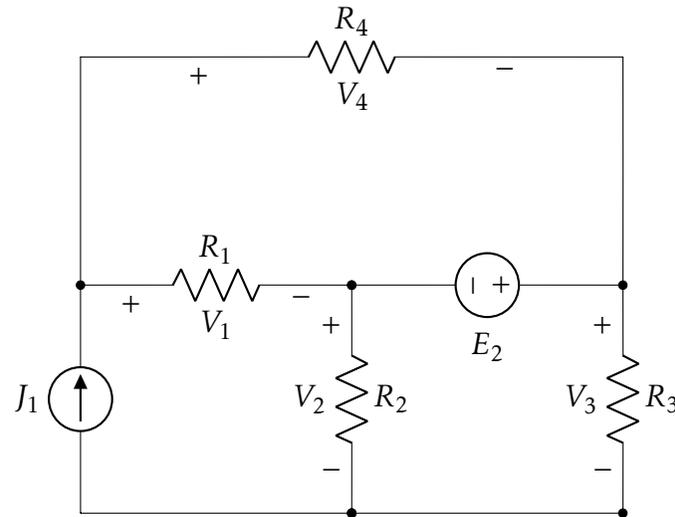


Figura 5.8: Rete elettrica in regime stazionario.

$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 8\Omega \quad R_3 = 6\Omega \quad R_4 = 4\Omega \quad J_1 = 235\text{ V} \quad E_2 = 500\text{ V}$$

Soluzione

La rete ha $n = 4$ nodi. Utilizzando il metodo dei potenziali nodali si possono scrivere $n - 1 = 3$ equazioni linearmente indipendenti. Scegliamo il nodo 4 come nodo di massa (riferimento dei potenziali), come indicato in figura 5.9. Le incognite sono i potenziali nodali (U_1, U_2, U_3) e la corrente I_{E_2} del generatore E_2 , fissata con il riferimento indicato in figura per stabilire la convenzione dei generatori, così come per il riferimento di tensione V_{J_1} per J_1 .

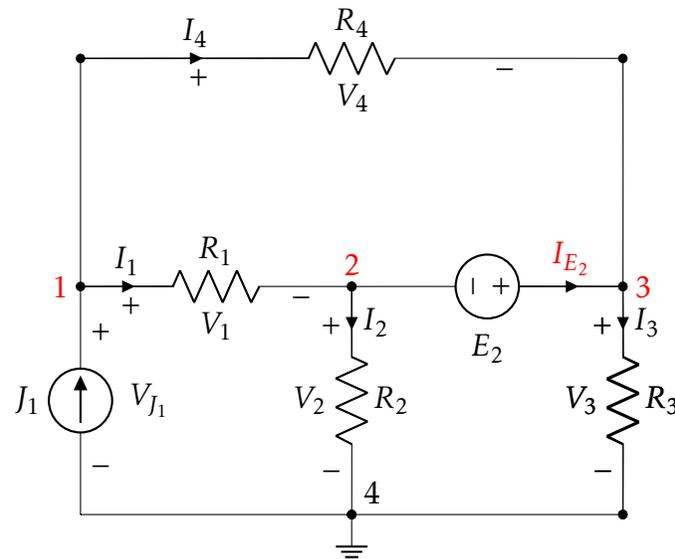


Figura 5.9: Rete elettrica in regime stazionario: il nodo 4 è scelto come nodo di massa (riferimento dei potenziali).

Si ottiene un sistema di quattro equazioni in quattro incognite: le prime tre equazioni ottenute dall'applicazione del metodo dei potenziali ai nodi 1, 2, e 3 e l'ultima che vincola i potenziali dei nodi 2 e 3 alla tensione impressa E_2 .

$$\begin{cases} (G_1 + G_4)U_1 - G_1U_2 - G_4U_3 & = J_1 \\ (G_1 + G_2)U_2 - G_1U_1 & = -I_{E_2} \\ (G_3 + G_4)U_3 - G_4U_1 & = +I_{E_2} \\ U_3 - U_2 & = E_2 \end{cases}$$

Si noti che anziché risolvere il sistema così com'è, conviene prima cercare di ridurre il numero di equazioni e di incognite. Ad esempio, sommando tra loro le prime tre equazioni, ci si riconduce al seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} G_2 U_2 + G_3 U_3 = J_1 \\ U_3 - U_2 = E_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori per le potenziali nodali: $U_2 = 520 \text{ V}$, $U_3 = 1020 \text{ V}$.

Dall'equazione scritta per il nodo 1, si ricava il potenziale U_1 :

$$U_1 = \frac{G_1 U_2 + G_4 U_3 + J_1}{G_1 + G_4} = 1000 \text{ V}$$

Infine, si può calcolare la corrente I_{E_2} dall'equazione scritta per il nodo 3 (oppure per il nodo 2):

$$I_{E_2} = (G_3 + G_4)U_3 - G_4 U_1 = 175 \text{ A}$$

Si possono quindi calcolare le tensioni dei lati dei resistori ideali e del generatore di corrente:

$$\begin{cases} V_1 = U_1 - U_2 = 1000 - 520 = 480 \text{ V} \\ V_2 = U_2 = 520 \text{ V} \\ V_3 = U_3 = 1020 \text{ V} \\ V_4 = U_1 - U_3 = 1000 - 1020 = 20 \text{ V} \\ V_{J_1} = U_1 = 1000 \text{ V} \end{cases}$$

Le potenze uscenti dai generatori sono:

$$\begin{cases} P_{J_1} = V_{J_1} J_1 = (1000) (235) = 235 \text{ kW} \quad (\text{erogata}) \\ P_{E_2} = E_2 I_{E_2} = (500) (175) = 87.5 \text{ kW} \quad (\text{erogata}) \end{cases}$$

Le potenze assorbite dai resistori sono:

$$P_1 = G_1 V_1^2 = 115.2 \text{ kW} \quad P_2 = G_2 V_2^2 = 33.8 \text{ kW} \quad P_3 = G_3 V_3^2 = 173.4 \text{ kW} \quad P_4 = G_4 V_4^2 = 0.1 \text{ kW}$$

La potenza complessivamente assorbita dai bipoli della rete é data dalla somma delle potenze assorbite dai resistori:

$$P_{assorbita} = P_1 + P_2 + P_3 + p_4 = 115.2 + 33.8 + 173.4 + 0.1 = 322.5 \text{ kW}$$

La potenza complessivamente assorbita dai bipoli della rete é data dalla somma delle potenze erogate dai generatori:

$$P_{erogata} = P_{J_1} + P_{E_2} = 322.5 \text{ kW}$$

É cosí verificato quanto previsto dal teorema di Tellegen.

Osservazioni

In alternativa, si poteva calcolare la corrente I_{E_2} applicando la LKC al nodo 3 (oppure al nodo 2):

$$I_{E_2} = I_3 - I_4 = \frac{V_3}{R_3} - \frac{V_4}{R_4} = \frac{1020}{6} - \frac{20}{4} = 170 - (-5) = 175 \text{ A}$$

5.5 Metodo dei potenziali nodali modificato

Nella figura 5.10 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali, generatori ideali di corrente e generatori ideali di tensione. Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle grandezze impresse.

1. Utilizzando il metodo dei potenziali nodali, calcolare il valore della tensioni V_1 e V_4 con i riferimenti in figura
2. Calcolare la potenza erogata dai generatori E_3 , J_1 e J_5
3. Calcolare la potenza erogata dai generatori E_2 , J_6
4. Verificare la conservazione delle potenze

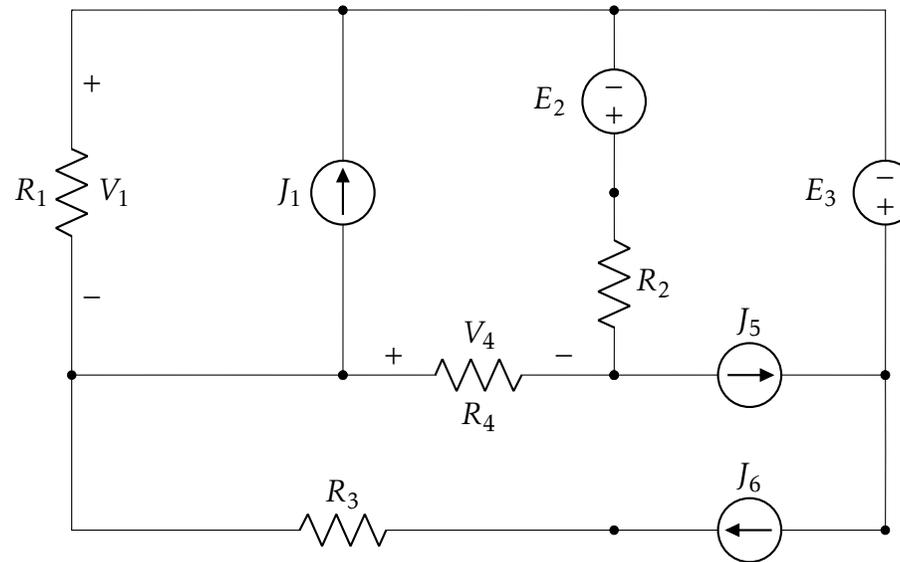


Figura 5.10: Rete elettrica in regime stazionario

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad R_3 = 5 \Omega \quad R_4 = 10 \Omega \quad J_1 = 5 \text{ A} \quad J_5 = 5 \text{ A} \quad J_6 = 23 \text{ A} \quad E_2 = 10 \text{ V} \quad E_3 = 50 \text{ V}$$

Soluzione

Innanzitutto semplifichiamo la rete di figura 5.11, sostituendo:

- Il bipolo evidenziato dal rettangolo verde (serie J_6 , R_3) con il bipolo equivalente $J'_6 = J_6^2$;
- Il GAT evidenziato dal rettangolo rosso (serie di E_2 , R_2) con il GAC equivalente con $J_{E_2} = E_2/R_2 = 1 A$

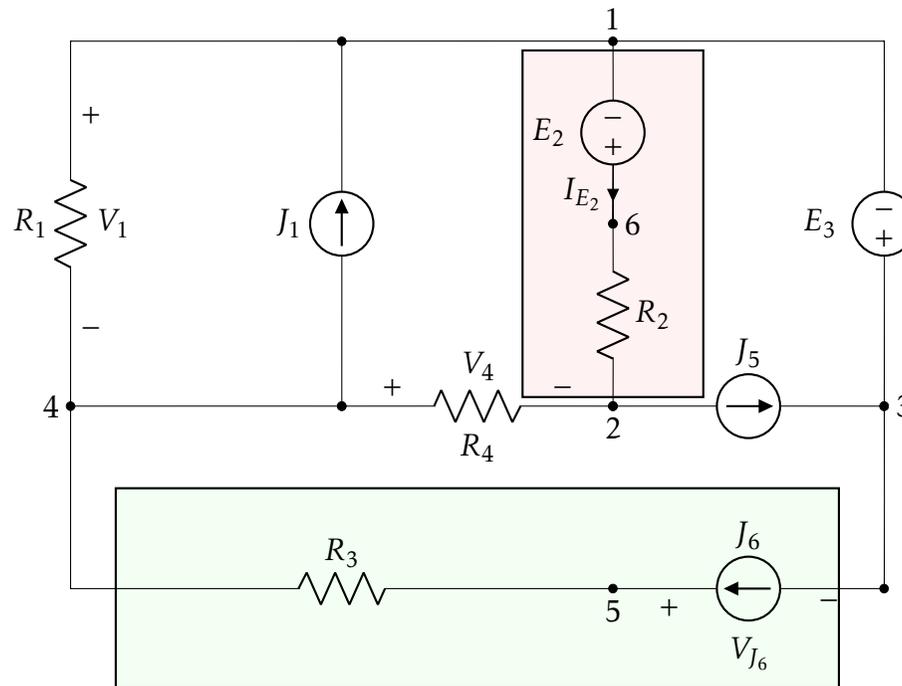


Figura 5.11: Rete elettrica in regime stazionario. Nei rettangoli colorati i bipoli che è conveniente sostituire.

La rete così semplificata, riportata in figura 5.12, ha $n = 4$ nodi.

²Per il principio di equivalenza elettrica il bipolo equivalente alla serie di R_3 e J_6 garantisce che ci sia la stessa differenza di potenziale tra i nodi 3 e 4. Utilizziamo un simbolo diverso (J'_6), perché non c'è equivalenza in termini energetici tra J'_6 e la serie di J_6 ed R_3 .

Utilizzando il metodo dei potenziali nodali si possono scrivere $n - 1 = 3$ equazioni linearmente indipendenti. Scegliamo il nodo 2 come nodo di massa (riferimento dei potenziali). Le incognite sono i potenziali dei nodi 1, 3 e 4 indicati con U_1 , U_3 e U_4 . Fissiamo poi i riferimenti di tensione (V_{J_1} , V_{J_5}) e il riferimento di corrente (I_{E_3}) che serviranno per il calcolo delle potenze erogate. Con i riferimenti scelti si è fissata su tutti la convenzione dei generatori.

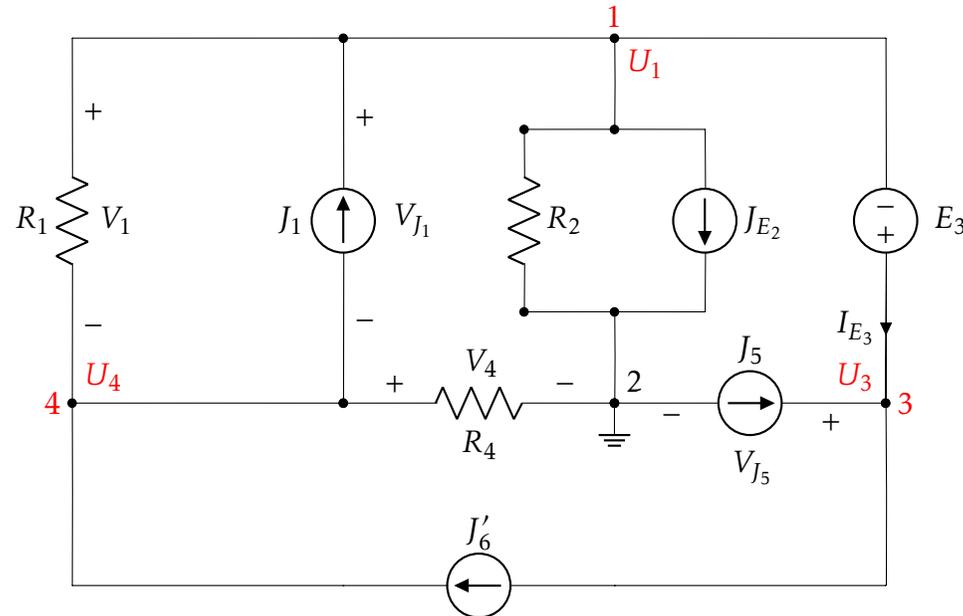


Figura 5.12: Rete elettrica in regime stazionario semplificata con $n = 4$ nodi.

Si ottiene un sistema di quattro equazioni in quattro incognite: le prime tre equazioni ottenute dall'applicazione del metodo dei potenziali nodali e l'ultima che vincola i potenziali dei nodi 1 e 3 alle tensioni impressa E_3 (nota). Le incognite sono i potenziali nodali (U_1 , U_3 , U_4) e la corrente I_{E_3} , indicata in rosso a destra dell'uguale nelle prime tre equazioni, per ricordare che non è nota e va determinate dalla soluzione del sistema.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)U_1 - G_1 U_4 = J_1 - J_{E_2} + (-I_{E_3}) \\ 0 = J_5 - J'_6 + (+I_{E_3}) \\ (G_1 + G_4)U_4 - G_1 U_1 = J'_6 - J_1 \\ U_3 - U_1 = E_3 \end{cases}$$

Si noti che le equazioni si prestano ad essere semplificate riducendo il sistema da risolvere a due equazioni in due incognite (U_1 , U_4). La seconda equazione, infatti, corrisponde alla LKC nel nodo 3 e ci consente di sostituire nella prima equazione la corrente I_{E_3} espressa come: $I_{E_3} = -J_5 + J'_6 = -5 + 23 = 18 \text{ A}$. Il sistema si riduce quindi al seguente:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)U_1 - G_1 U_4 = J_1 - J_{E_2} + (-I_{E_3}) \\ (G_1 + G_4)U_4 - G_1 U_1 = J'_6 - J_1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori per le potenziali nodali: $U_1 = -12 \text{ V}$, $U_4 = 52 \text{ V}$

Il potenziale U_3 si ottiene mediante la quarta equazione del sistema completo che non é stata ancora utilizzata:

$$U_3 = U_1 + E_3 = -12 + 50 = 38 \text{ V}$$

Le tensioni dei generatori risultano $V_{J_1} = U_1 - U_4 = -12 - 52 = -64 \text{ V}$, $V_{J_5} = U_3 = 38 \text{ V}$

Le potenze uscenti da J_1 , J_2 e E_3 valgono

$$\begin{cases} P_{J_1} = V_{J_1} J_1 = (-64) 5 = -320 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{J_2} = V_{J_2} J_2 = (38) 5 = 190 \text{ W} & \text{(erogata)} \\ P_{E_3} = E_3 I_{E_3} = (50) 18 = 900 \text{ W} & \text{(erogata)} \end{cases}$$

Per il calcolo delle potenze uscenti da E_2 e J_6 , dobbiamo fare riferimento alla rete originale, con i riferimenti indicati in figura 5.11. La tensione V_{J_6} può essere calcolata applicando la LKT alla maglia che comprende la serie di R_3 e J_6

$$V_{J_6} - R_3 \cdot J_6 - V_{43} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{J_6} = R_3 J_6 + V_{43} = R_3 J_6 + U_4 - U_3 = 5 \cdot 23 + 52 - 38 = 129 \text{ V}$$

La corrente I_{E_2} può essere calcolata applicando la LKT alla maglia che comprende la serie di E_2 e R_2

$$E_2 - R_2 \cdot I_{E_2} + V_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{E_2} = \frac{E_2 + V_{12}}{R_2} = \frac{E_2 + U_1}{R_2} = \frac{10 + (-12)}{10} = -0.2 \text{ A}$$

Le potenze uscenti da E_2 e J_6 valgono dunque

$$\begin{cases} P_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 10 \cdot (-0,2) = -2 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{J_6} = V_{J_6} \cdot J_6 = 129 \cdot 23 = 2967 \text{ W} & \text{(erogata)} \end{cases}$$

Infine, per verificare la conservazione delle potenze, sulla rete originaria, occorre calcolare le potenze dissipate sui resistori. Si ha:

$$\begin{cases} P_{R_1} = V_1^2/R_1 = V_{J_1}^2/R_1 = (-64)^2/5 = 819,2 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{R_2} = R_2 \cdot I_{E_2}^2 = 10 \cdot (-0,2)^2 = 0,4 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{R_3} = R_3 \cdot I_{E_3}^2 = R_3 \cdot J_6^2 = 10 \cdot (23)^2 = 2645 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{R_4} = V_4^2/R_4 = U_4^2/R_4 = (52)^2/10 = 270,4 \text{ W} & \text{(assorbita)} \end{cases}$$

Affinchè sia verificato il bilancio delle potenze deve essere:

$$(\text{somma potenze erogate}) P_{J_2} + P_{E_3} + P_{J_6} = P_{J_1} + P_{E_2} + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} \quad (\text{somma potenze assorbite})$$

e in effetti si ha che:

$$190 \text{ W} + 900 \text{ W} + 2967 \text{ W} = 4057 \text{ W} = 320 \text{ W} + 2 \text{ W} + 819,2 \text{ W} + 0,4 \text{ W} + 2645 \text{ W} + 270,4 \text{ W}.$$

5.6 Metodo di sovrapposizione degli effetti

Nella figura 5.13 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione e resistori ideali. Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle tensioni impresse.

1. Calcolare il valore della correnti con i riferimenti indicati in figura.
2. Verificare la conservazione delle potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete

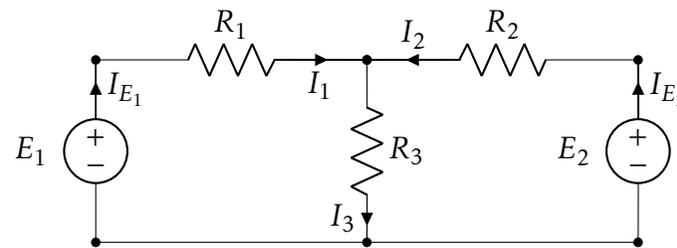


Figura 5.13: Rete elettrica in regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione e resistori ideali

$$R_1 = 6 \, \Omega \quad R_2 = 10 \, \Omega \quad R_3 = 3 \, \Omega \quad E_1 = 15 \, V \quad E_2 = 29 \, V$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due generatori ideali di tensione. Applichiamo il metodo di sovrapposizione degli effetti facendo agire i generatori uno alla volta. Come notazione, utilizziamo un apice singolo (doppio) per identificare le correnti del primo (secondo) caso: ad esempio I'_3 per il primo caso, I''_3 per il secondo caso³.

Caso 1 (solo E_1)

Nel primo caso agisce solo E_1 : viene spento (cortocircuitato) il generatore di tensione E_2 come mostrato in figura 5.14.

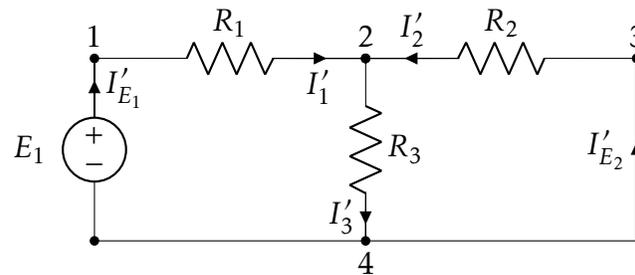


Figura 5.14: Caso 1 (solo E_1): viene spento (cortocircuitato) il generatore di tensione E_2 .

La resistenza “vista” dal generatore E_1 è:

$$R_{eq1} = R_1 + R_3 // R_2 = 6 + \frac{3 \cdot 10}{3 + 10} = 6 + \frac{30}{13} = \frac{108}{13} \Omega \approx 8.3076 \Omega$$

La corrente di E_1 vale:

$$I'_{E_1} = \frac{E_1}{R_{eq1}} = \frac{65}{36} A = 1.805 A$$

E_1 ed R_1 sono in serie e hanno la stessa corrente (si può verificare formalmente applicando la LKC nel nodo 1):

$$I'_1 = I'_{E_1} = \frac{65}{36} A = 1.805 A$$

³In alternativa si può utilizzare il doppio pedice come notazione: il primo pedice identifica il lato (componente) su cui si calcola la corrente, il secondo identifica il generatore che è “attivo”. Ad esempio I_{31} indica la corrente del resistore R_3 quando agisce il primo generatore (E_1)

Le correnti sui resistori R_2 ed R_3 si possono calcolare con la formula del partitore di corrente, prestando attenzione al segno (I'_2 ha segno opposto a I'_1):

$$I'_3 = I'_{E_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{50}{36} A = 1.3\bar{8} A \quad I'_2 = -I'_{E_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = -\frac{15}{36} A = -0.41\bar{8}$$

Come verifica si può applicare la LKC nel nodo 2:

$$\sum_{k=1}^3 \pm I'_k = -I'_1 - I'_2 + I'_3 = -\frac{65}{36} - \left(-\frac{15}{36}\right) + \frac{50}{36} = 0$$

E_2 ed R_2 sono in serie e hanno la stessa corrente (si può verificare formalmente applicando la LKC nel nodo 3):

$$I'_{E_2} = I'_2 = -\frac{15}{36} A = -0.41\bar{8}$$

Caso 2 (solo E_2)

Nel secondo caso agisce solo E_2 : viene spento (cortocircuitato) il generatore di tensione E_1 come mostrato in figura 5.15.

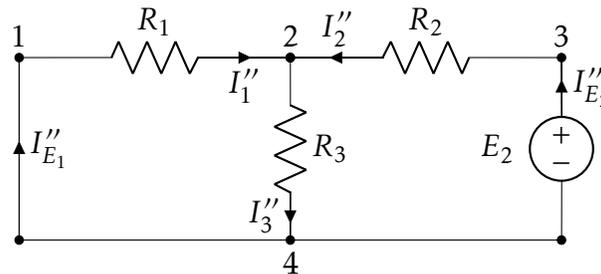


Figura 5.15: Caso 2 (solo E_2): viene spento (cortocircuitato) il generatore di tensione E_1 .

La resistenza “vista” dal generatore E_2 è:

$$R_{eq2} = R_2 + R_3 // R_1 = 10 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 10 + 2 = 12 \Omega$$

La corrente di E_2 vale:

$$I''_{E_2} = \frac{E_2}{R_{eq_2}} = \frac{29}{12} A = 2.41\bar{6} A$$

E_2 ed R_2 sono in serie e hanno la stessa corrente (si può verificare formalmente applicando la LKC nel nodo 3):

$$I''_2 = I''_{E_2} = \frac{29}{12} A = 2.41\bar{6} A$$

Le correnti sui resistori R_1 ed R_3 si possono calcolare con la formula del partitore di corrente, prestando attenzione al segno (I''_1 ha segno opposto a I''_2):

$$I''_3 = I''_{E_2} \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{29}{18} A = 1.6\bar{1} A \quad I''_1 = -I''_{E_2} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = -\frac{29}{36} A = -0.80\bar{5} A$$

Come verifica si può applicare la LKC nel nodo 2:

$$\sum_{k=1}^3 \pm I''_k = -I''_1 - I''_2 + I''_3 = -\left(-\frac{29}{36}\right) - \frac{29}{12} + \frac{29}{18} = 0$$

Soluzione completa ($E_1 + E_2$)

Le correnti I_1 , I_2 e I_3 si ottengono sommando i contributi calcolati nei due casi precedenti:

$$\begin{cases} I_1 = I'_1 + I''_1 = \frac{65}{36} + \left(-\frac{29}{36}\right) = 1 A \\ I_2 = I'_2 + I''_2 = \left(-\frac{15}{36}\right) + \frac{29}{12} = 2 A \\ I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{50}{36} + \frac{29}{18} = 3 A \end{cases}$$

Anche in questo caso può essere utile verificare che le correnti calcolate siano consistenti con quanto previsto applicando la LKC nel nodo 2:

$$\sum_{k=1}^3 \pm I_k = -I_1 - I_2 + I_3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

Le correnti dei due generatori, valgono: $I_{E_1} = I_1 = 1 A$ $I_{E_2} = I_2 = 2 A$

Si può ora verificare la conservazione della potenza elettrica scambiata dai bipoli della rete. Le potenze complessivamente assorbite dai resistori ed erogate dai generatori sono:

$$P_{\text{assorbita}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 6 + 40 + 27 = 73 W$$

$$P_{\text{erogata}} = E_1 I_{E_1} + E_2 I_{E_2} = 15 \cdot 1 + 29 \cdot 2 = 73 W$$

Osservazioni

Applicando il metodo di sovrapposizione degli effetti abbiamo ottenuto la soluzione senza dover risolvere sistemi di equazioni, grazie alla semplificazione delle reti con operazioni di serie/parallelo. E' stato necessario, però, risolvere due reti anche se più semplici rispetto alla rete completa. Come verifica dei risultati ottenuti, risolviamo ora l'esercizio mediante il metodo delle correnti di anello, adottando i riferimenti indicati in figura 5.16 per le correnti K_1 e K_2 .

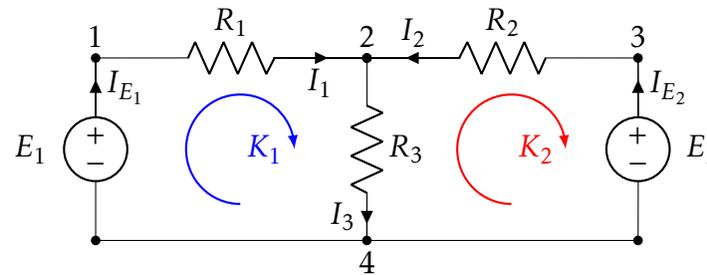


Figura 5.16: Applicazione del metodo delle correnti di anello.

Le equazioni sui due anelli sono:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)K_1 - R_3K_2 = E_1 \\ (R_2 + R_3)K_2 - R_3K_1 = -E_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $K_1 = 1 A$ e $K_2 = -2 A$, da cui $I_1 = K_1 = 1 A$, $I_2 = -K_2 = 2 A$, $I_3 = K_1 - K_2 = 3 A$.

5.7 Metodo di sovrapposizione degli effetti

Nella figura 5.17 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali, generatori ideali di tensione e di corrente. Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle grandezze impresse.

1. Utilizzando il metodo di sovrapposizione degli effetti, calcolare la potenza erogata da ciascuno dei generatori

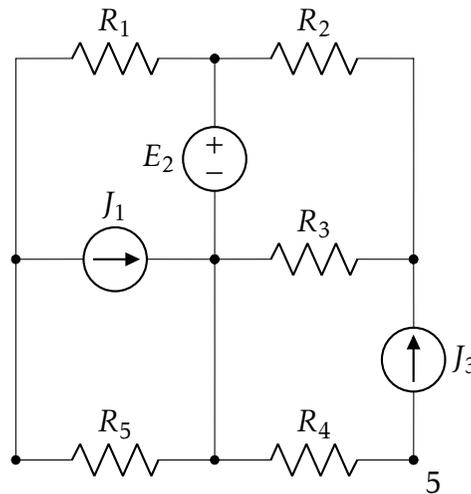


Figura 5.17: Rete elettrica in regime stazionario costituita da resistori ideali, generatori ideali di tensione e di corrente

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 2 \Omega \quad R_3 = 4 \Omega \quad R_4 = 8 \Omega \quad R_5 = 10 \Omega \quad J_1 = 12 A \quad E_2 = 60 V \quad J_3 = 15 A$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due generatori ideali di corrente ed un generatore ideale di tensione. Applichiamo il metodo di sovrapposizione degli effetti facendo agire i generatori uno alla volta. Come notazione, utilizziamo un apice singolo per identificare le correnti del primo caso, due apici per il secondo caso e tre apici per il terzo caso.

Caso 1 (solo J_1)

Nel primo caso agisce solo J_1 : il generatore di tensione E_2 viene sostituito da un cortocircuito e il generatore di corrente J_3 da un lato aperto, come mostrato in figura 5.18. Vengono indicati i riferimenti per la corrente I'_{E_2} del lato cortocircuitato (dove era inserito E_2) e la tensione V'_{J_3} del lato aperto (dove era inserito J_3 che devono essere calcolate perché possono essere diverse da zero anche se i generatori sono stati “spenti”.

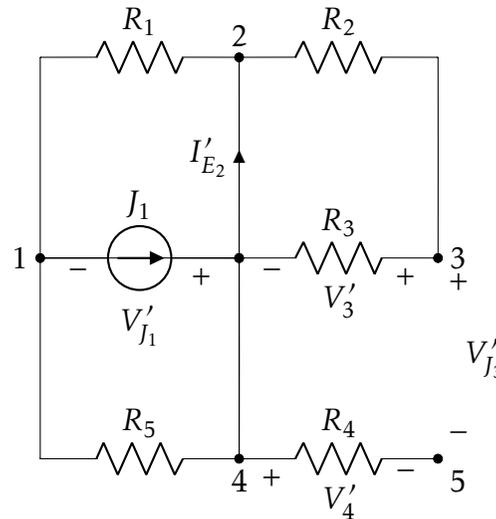


Figura 5.18: Caso 1 (solo J_1): E_2 è sostituito da un cortocircuito e J_3 da un lato aperto.

La resistenza “vista” dal generatore J_1 è

$$R_{eq1} = R_1 // R_5 = \frac{2 \cdot 10}{2 + 10} = \frac{5}{3} \Omega = 1.\bar{6} \Omega$$

La tensione ai capi di J_1 vale dunque

$$V'_{J_1} = J_1 R_{eq1} = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20 V$$

La corrente I'_{E_2} coincide con la corrente su R_1 che può essere calcolata con la formula del partitore di corrente

$$I'_{E_2} = J_1 \frac{R_5}{R_1 + R_5} = 12 \frac{10}{12} = 10 A$$

Dato che i resistori R_3 ed R_4 non sono percorsi da corrente, si ha $v'_3 = 0$ e $v'_4 = 0$. Applicando la LKT alla maglia che comprende il lato con tensione V'_{J_3} e i resistori R_3 ed R_4 si ottiene dunque $V'_{J_3} = V'_3 + V'_4 = 0$

Caso 2 (solo E_2)

Nel secondo caso agisce solo E_2 : i generatori di corrente J_1 e J_3 sono sostituiti da lati aperti, come mostrato in figura 5.19. Vengono indicati i riferimenti per le tensioni V''_{J_1} e V''_{J_3} dei lati aperti (dove erano inseriti J_1 e J_3) che devono essere calcolate perché possono essere diverse da zero anche se i generatori sono stati “spenti”.

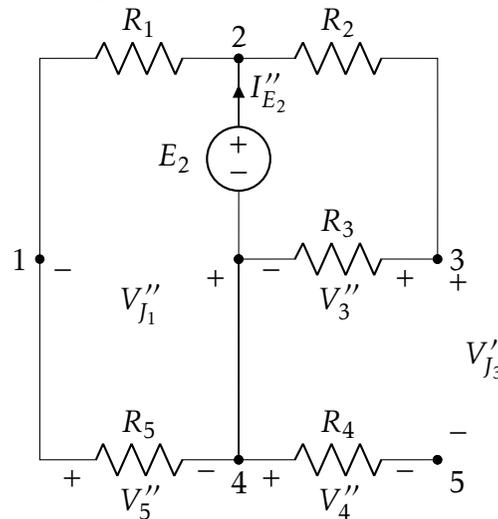


Figura 5.19: Caso 2 (solo E_2): i generatori di corrente J_1 e J_3 sono sostituiti da lati aperti

La resistenza “vista” dal generatore E_2 è data dal parallelo di $R_2 + R_3$ (serie) e di $R_1 + R_5$ (serie)

$$R_{eq2} = (R_2 + R_3) // (R_1 + R_5) = (12) // (6) = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4 \Omega$$

La corrente di E_2 vale dunque

$$I''_{E_2} = \frac{E_2}{R_{eq2}} = \frac{60}{4} = 15 A$$

La tensione di J_1 può essere calcolata applicando la formula del partitore di tensione considerando che vale

$$V''_{J_3} = V''_3 = E_2 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 60 \frac{4}{4 + 2} = 40 V$$

La tensione di J_3 può essere calcolata applicando la formula del partitore di tensione considerando che vale

$$V''_{J_1} = -V''_5 = -E_2 \frac{R_5}{R_1 + R_5} = -60 \frac{10}{10 + 2} = -50 V$$

Caso 3 (solo J_3)

Nel terzo caso agisce solo J_3 : il generatore di tensione E_2 viene sostituito da un cortocircuito e il generatore di corrente J_1 da un lato aperto, come mostrato in figura 5.20. Vengono indicati i riferimenti per la corrente I'''_{E_2} del lato cortocircuitato (dove era inserito E_2) e la tensione V'''_{J_1} del lato aperto (dove era inserito J_1) che devono essere calcolate perché possono essere diverse da zero anche se i generatori sono stati “spenti”.

La resistenza “vista” dal generatore J_3 è

$$R_{eq3} = R_4 + R_2 // R_3 = 8 + \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{28}{3} \Omega = 9.\bar{3} \Omega$$

La tensione ai capi di J_3 è dunque

$$V'''_{J_3} = J_1 R_{eq3} = 15 \cdot \frac{28}{3} = 140 V$$

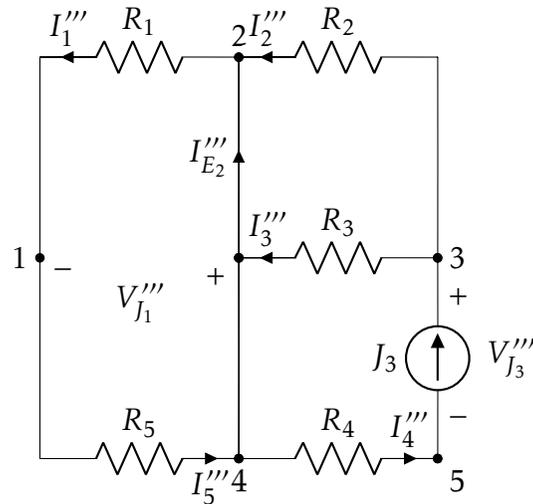


Figura 5.20: Caso 3 (solo J_3): E_2 è sostituito da un cortocircuito e J_1 da un lato aperto.

Per le correnti sui resistori abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1''' = I_5''' = 0 \\ I_4''' = J_3 = 15 \text{ A} \\ I_2''' = J_3 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 15 \frac{4}{4 + 2} = 10 \text{ A} \quad (\text{partitore di corrente}) \\ I_3''' = J_3 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 15 \frac{2}{4 + 2} = 5 \text{ A} \quad (\text{partitore di corrente}) \end{array} \right.$$

Applicando la LKC nel nodo 2 si può calcolare la corrente I_{E_2}'''

$$I_{E_2}''' = I_1''' - I_2''' = 0 - 10 = -10 \text{ A}$$

Dato che i resistori R_1 ed R_5 non sono percorsi da corrente, si ha

$$V_{J_1}''' = R_1 I_1''' = R_5 I_5''' = 0 \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti

Sommando i termini calcolati nei tre casi precedenti si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{J_1} = V'_{J_1} + V''_{J_1} + V'''_{J_1} = 20 + (-50) + 0 = -30 \text{ V} \\ I_{E_2} = I'_{E_2} + I''_{E_2} + I'''_{E_2} = 10 + 15 + (-10) = 15 \text{ A} \\ V_{J_3} = V'_{J_3} + V''_{J_3} + V'''_{J_3} = 0 + 40 + 140 = 180 \text{ V} \end{array} \right.$$

Si possono ora calcolare le potenze uscenti dai generatori (convenzione dei generatori)

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{J_1} = V_{J_1} J_1 & = (-30) \cdot 12 = -360 \text{ W} < 0 \text{ (assorbita)} \\ P_{E_2} = E_2 I_{E_2} & = 60 \cdot 15 = 900 \text{ W} > 0 \text{ (erogata)} \\ P_{J_3} = V_{J_3} J_3 & = 180 \cdot 15 = 2700 \text{ W} > 0 \text{ (erogata)} \end{array} \right.$$

6

Generatori equivalenti

6.1 Generatore equivalente di Thevenin

Nella figura 6.1 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da tre resistori ideali (R_1 , R_2 , R_3), da un generatore ideale di tensione E_1 e da un generatore ideale, di corrente J_2 racchiusa in una linea blu, alla cui porta AB è collegato un resistore di carico R_u . Sono noti i valori di tutte le resistenze e delle tensioni impresse.

1. Calcolare i parametri del generatore equivalente di tensione alla porta AB
2. Calcolare la potenza assorbita dal carico R_u

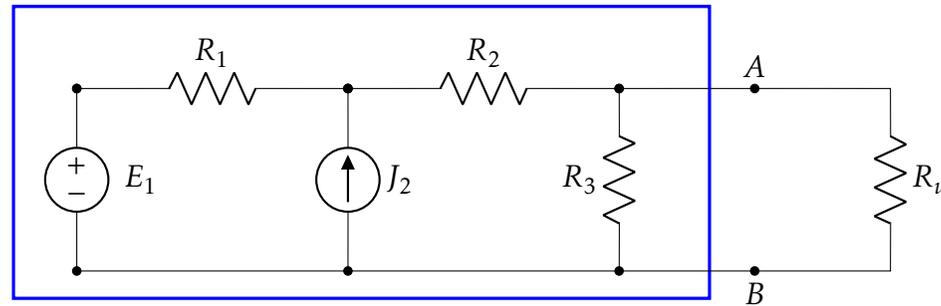


Figura 6.1: Rete elettrica in regime stazionario accessibile alla porta AB

$$R_1 = 6 \, \Omega \quad R_2 = 6 \, \Omega \quad R_3 = 4 \, \Omega \quad R_u = 1 \, \Omega \quad E_1 = 12 \, V \quad J_2 = 2 \, A$$

Soluzione

Calcoliamo prima la resistenza equivalente dello schema di Thevenin, facendo riferimento alla figura 6.2 dove sono stati “spenti” i generatori ideali: E_1 sostituito da un cortocircuito e J_2 da un circuito aperto.

$$R_{eq} = R_i = R_3 // (R_1 + R_2) = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3 \Omega$$

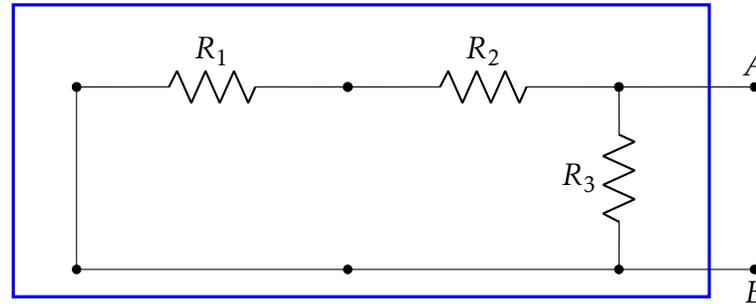


Figura 6.2: Rete elettrica costituita solo da resistori ideali: E_1 sostituito da un cortocircuito e J_2 da un circuito aperto.

Calcoliamo poi la $E_{eq} = V_{AB_0}$ dello schema di Thevenin, facendo riferimento alla figura 6.3 dove la porta AB è lasciata “a vuoto”. Per calcolare la tensione V_{AB_0} conviene semplificare la rete trasformando il GAT nel rettangolo rosso con l’equivalente GAC con $J_{E_1} = E_1/R_1 = 2 A$, come in figura 6.4

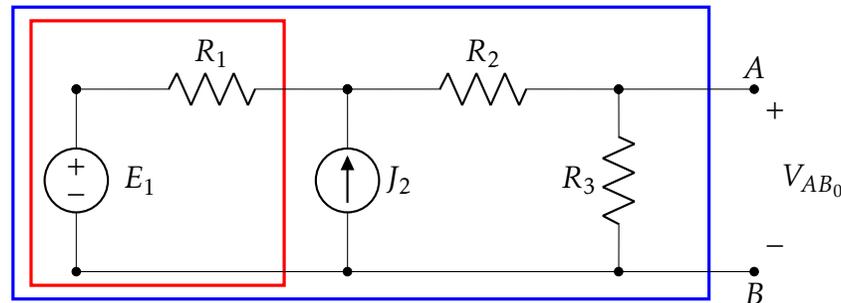


Figura 6.3: Rete elettrica in regime stazionario: la porta AB è “a vuoto”.

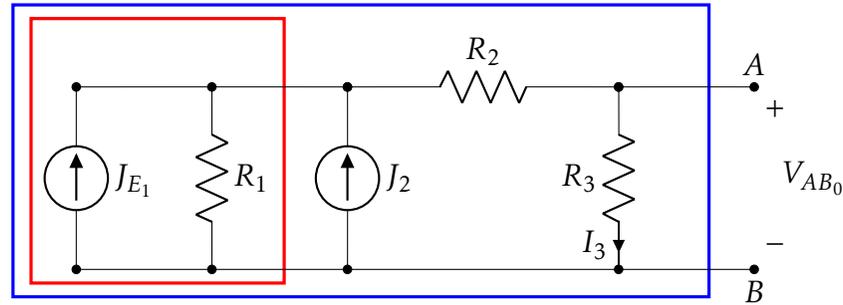


Figura 6.4: Rete elettrica in regime stazionario: $J_{E_1} = E_1/R_1 = 2 A$

Si può ora calcolare la corrente I_3 utilizzando la formula del partitore di corrente

$$I_3 = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)} \cdot (J_{E_1} + J_2) = \frac{6}{16} \cdot (2 + 2) = 1.5 A$$

e quindi la tensione a vuoto

$$V_{AB_0} = R_3 \cdot I_3 = 4 \cdot 1.5 = 6 V$$

Infine si può calcolare la potenza assorbita da resistore R_u collegato al generatore equivalente ($E_{eq} = 6 V$, $R_{eq} = 3 \Omega$) come in figura 6.5.

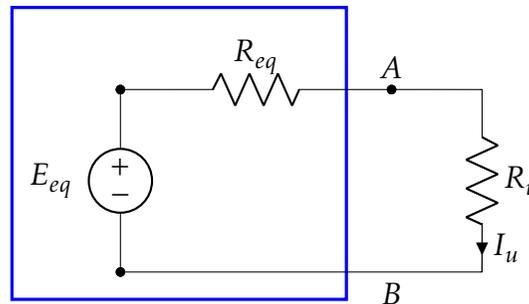


Figura 6.5: Generatore equivalente alla rete ai morsetti AB.

La corrente I_u vale

$$I_u = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_u} = \frac{6}{3 + 1} = 1.5 \text{ A}$$

e quindi la potenza assorbita vale

$$P_u = R_u \cdot I_u^2 = 1 \cdot 1.5^2 = 2.25 \text{ W}$$

Osservazioni

Si noti che $R_u \neq R_{eq}$ per cui la potenza assorbita è inferiore a quella massima che si ottiene in condizioni di adattamento del carico ($R_u = R_{eq}$) che vale

$$P_u^{mt} = \frac{E_{eq}^2}{4R_{eq}} = \frac{6^2}{4 \cdot 3} = 3 \text{ W}$$

Come alternativa per calcolare la tensione a vuoto V_{AB_0} consideriamo la sovrapposizione degli effetti, facendo agire i generatori ideali uno alla volta.

Caso 1 (solo E_1)

Nel primo caso agisce solo E_1 : J_2 viene sostituito da un circuito aperto come indicato in figura 6.6.

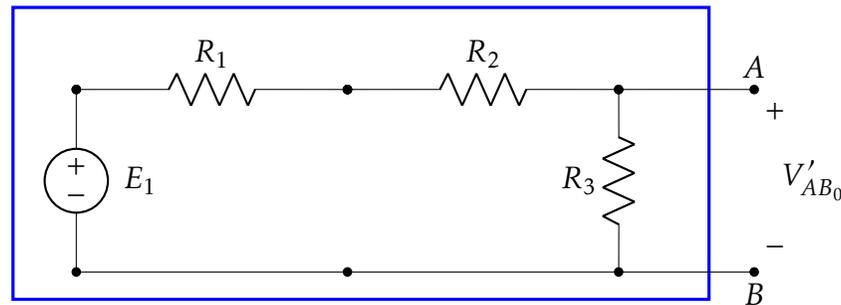


Figura 6.6: Sovrapposizione degli effetti: agisce solo E_1 .

Applicando la formula del partitore di tensione, si ottiene

$$V'_{AB_0} = E_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 12 \cdot \frac{4}{16} = 3 \text{ V}$$

Caso 2 (solo J_2)

Nel primo caso agisce solo J_2 : E_1 viene sostituito da un cortocircuito come indicato in figura 6.7.

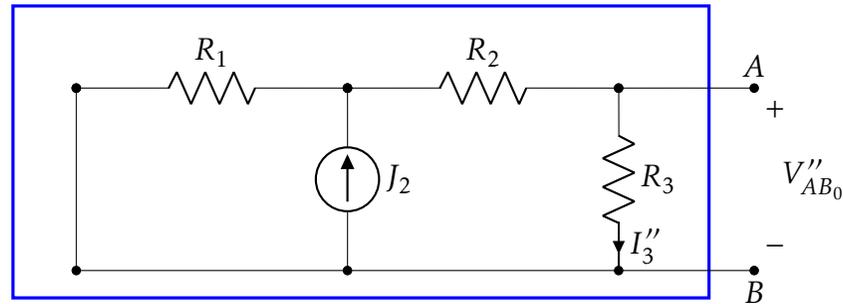


Figura 6.7: Sovrapposizione degli effetti: agisce solo J_2 .

Applicando la formula del partitore di corrente, si ottiene

$$I_3'' = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)} \cdot J_2 = \frac{6}{16} \cdot 2 = 0.75 \text{ A}$$

e quindi

$$V_{AB_0}'' = R_3 \cdot I_3'' = 4 \cdot 0.75 = 3 \text{ V}$$

Infine, si calcola il valore della tensione a vuoto sommando i due contributi

$$V_{AB_0} = V_{AB_0}' + V_{AB_0}'' = 3 + 3 = 6 \text{ V}$$

6.2 Generatore equivalente di Norton

Nella figura 6.8 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da tre resistori ideali (R_1 , R_2 , R_3), da un generatore ideale di tensione E_1 e da un generatore ideale, di corrente J_2 racchiusa in una linea blu, alla cui porta AB è collegato un resistore di carico R_u .

1. Calcolare i parametri del generatore equivalente di corrente alla porta AB
2. Calcolare la potenza assorbita dal carico R_u

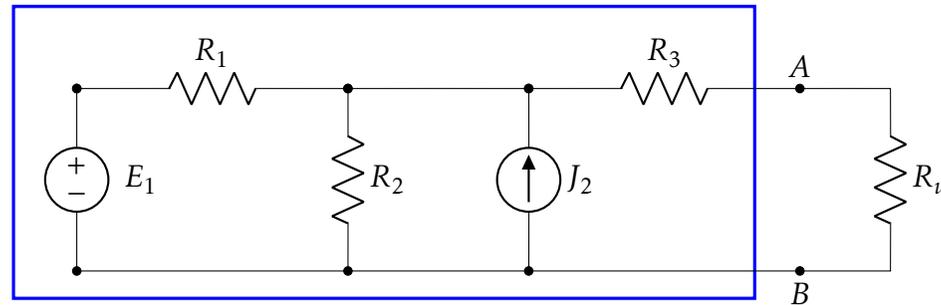


Figura 6.8: Rete elettrica in regime stazionario accessibile alla porta AB

$$R_1 = 4 \Omega \quad R_2 = 12 \Omega \quad R_3 = 1 \Omega \quad R_u = 6 \Omega \quad E_1 = 32 \text{ V} \quad J_2 = 2 \text{ A}$$

Soluzione

Calcoliamo prima la resistenza equivalente dello schema di Thevenin, facendo riferimento alla figura 6.9 dove sono stati “spenti” i generatori ideali: E_1 sostituito da un cortocircuito e J_2 da un circuito aperto.

$$R_{eq} = R_i = R_3 + R_1 // R_2 = 1 + \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 4 \Omega$$

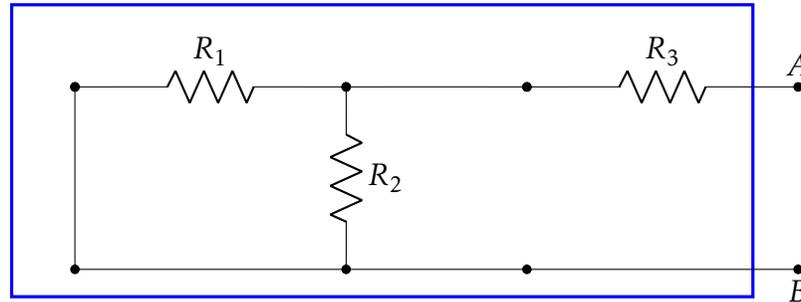


Figura 6.9: Rete elettrica costituita solo da resistori ideali: E_1 sostituito da un cortocircuito e J_2 da un circuito aperto.

Calcoliamo poi la $J_{eq} = I_{cc}$ dello schema di Norton, facendo riferimento alla figura 6.10 dove la porta AB è “cortocircuitata”. Per calcolare la corrente di cortocircuito I_{cc} conviene semplificare la rete trasformando il GAT nel rettangolo rosso con l’equivalente GAC con $J_{E_1} = E_1/R_1 = 8 A$, come in figura 6.11

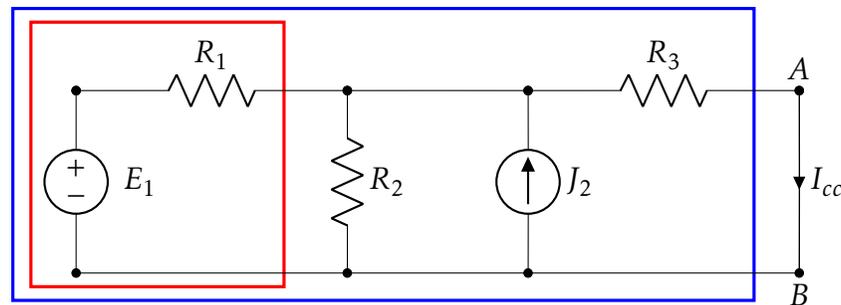


Figura 6.10: Rete elettrica in regime stazionario: la porta AB è “in cortocircuito”.

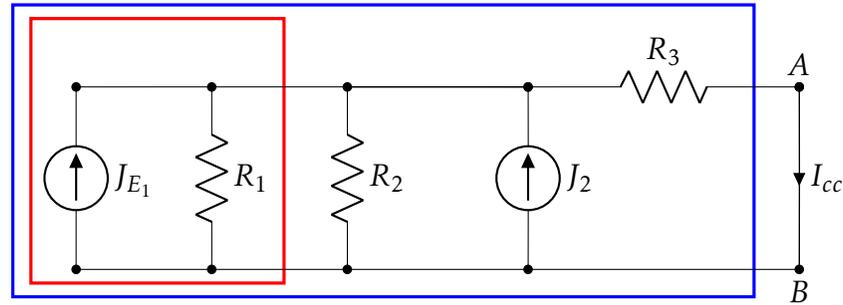


Figura 6.11: Rete elettrica in regime stazionario: $J_{E_1} = E_1/R_1 = 8 A$

Si può ora calcolare la corrente $J_{eq} = I_{cc}$ utilizzando la formula del partitore di corrente, in cui $R_p = R_1 // R_2 = 3 \Omega$

$$I_{cc} = \frac{R_p}{R_p + R_3} \cdot (J_{E_1} + J_2) = \frac{3}{3 + 1} \cdot (8 + 2) = 7.5 A$$

Infine si può calcolare la corrente I_u del resistore R_u collegato al generatore equivalente di corrente come in figura 6.12 e la potenza assorbita P_u

$$I_u = J_{eq} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_u} = 7.5 \frac{4}{4 + 6} = 3 A \quad \Rightarrow \quad P_u = R_u \cdot I_u^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 W$$

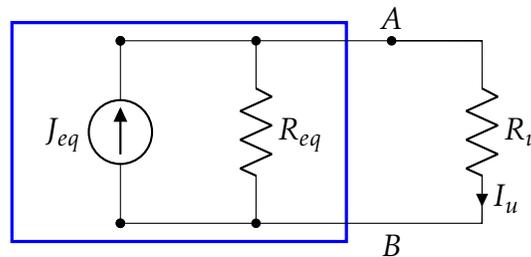


Figura 6.12: Generatore equivalente di corrente alla rete ai morsetti AB.

Osservazioni

Si noti che la potenza assorbita dal carico con $R_u \neq R_{eq}$ è inferiore a quella massima che si avrebbe in condizioni di adattamento del carico ($R_u = R_{eq}$).

Ci si può convincere facilmente di questo fatto se si pensa che il generatore equivalente di Norton può essere sostituito con un generatore equivalente di Thevenin con $E_{eq} = R_{eq} \cdot J_{eq} = 30 V$ e con la stessa resistenza equivalente $R_{eq} = 4 \Omega$, per il quale vale quanto previsto dal teorema del massimo trasferimento di potenza

$$P_u^{mt} = \frac{E_{eq}^2}{4R_{eq}} = \frac{30^2}{4 \cdot 4} = 56.25 W$$

Si noti che l'espressione precedente può essere riscritta anche come

$$P_u^{mt} = \frac{E_{eq}^2}{4R_{eq}} = \frac{(R_{eq} \cdot J_{eq})^2}{4R_{eq}} = \frac{R_{eq} \cdot J_{eq}^2}{4} = \frac{J_{eq}^2}{4G_{eq}} = 56.25 W$$

che rappresenta un modo alternativo per calcolare la massima potenza trasferita sul carico R_u quando alla rete lineare alla porta AB sia sostituito il modello equivalente di Norton.

6.3 Massimo trasferimento di potenza

Nella figura 6.13 è rappresentata una rete elettrica in regime stazionario costituita da tre resistori ideali (R_1, R_2, R_3) e da un generatore ideale di tensione E , racchiusa in una linea blu, alla cui porta AB è collegato un resistore di carico R_u . Sono noti i valori delle resistenze R_1, R_2, R_3 e la tensione E , mentre il valore del resistore di carico R_u è incognito.

1. Sapendo che la rete a sinistra dei morsetti A e B trasferisce al resistore di carico R_u la massima potenza possibile, determinare il valore di $R_{u_{max}}$ e il valore di tale potenza trasferita $P_{u_{max}}$.

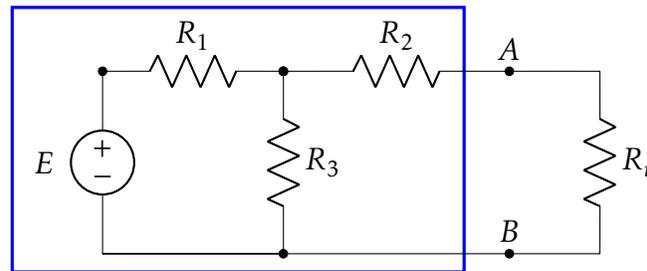


Figura 6.13: Rete di resistori e GIT

$$R_1 = 20 \, \Omega \quad R_2 = 45 \, \Omega \quad R_3 = 60 \, \Omega \quad E = 120 \, V$$

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che se colleghiamo a un circuito quale quello di figura 6.14 un resistore R_u , la massima potenza che è possibile portare ad esso si ha quando $R_u = R_{eq}$. Ciò è un fatto fisico e quindi vale anche se a R_u viene collegato non il circuito di figura 6.14 ma uno ad esso equivalente. Pertanto per risolvere il problema proposto si procede dapprima trasformando il circuito racchiuso dalla linea blu di figura 6.13 nel GAT equivalente di figura 6.14 e poi applicando ad esso la teoria del massimo trasferimento di potenza.

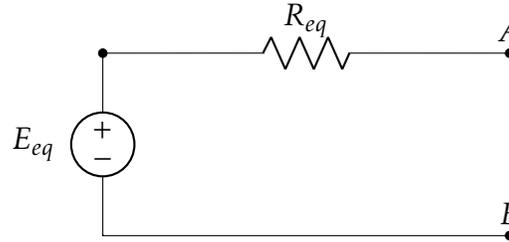


Figura 6.14: Seconda trasformazione GAC→GAT

La trasformazione appena descritta è svolta nell'esercizio proposto al capitolo 4.1 dove viene mostrato che, con i dati forniti, $E_{eq} = 90 \text{ V}$ e $R_{eq} = 60 \Omega$.

Allora il massimo trasferimento di potenza si ha per $R_{u_{max}} = R_{eq} = 60 \Omega$, per il quale $P_{u_{max}} = R_{u_{max}} (E_{eq} / (R_{eq} + R_{u_{max}}))^2 = E_{eq}^2 / (4R_{eq}) = 33.75 \text{ W}$.

7

Doppi bipoli

7.1 Doppi bipoli: rappresentazioni controllate in corrente e in tensione

Nella figura 7.1 è rappresentato un doppio bipolo con entrambe le porte convenzionate da utilizzatore.

1. Calcolare i parametri della rappresentazione controllata in corrente (matrice R)
2. Calcolare i parametri della rappresentazione controllata in tensione (matrice G)

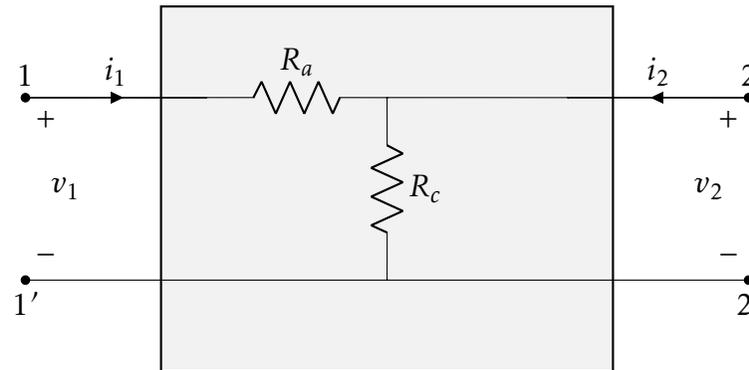


Figura 7.1: Doppio bipolo

$$R_a = 20 \Omega \quad R_c = 10 \Omega$$

Soluzione

Per calcolare i parametri della rappresentazione controllata in corrente, si lascia “a vuoto” una porta alla volta e si valuta il rapporto tra ciascuna tensione (v_1, v_2) e la corrente della porta che non è “a vuoto”.

Lasciando “a vuoto” la porta 2, come riportato in figura 7.2a, calcoliamo i parametri R_{11} e R_{21} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a + v_c$, $v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = i_a = i_c$, $i_2 = 0$)

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_a + v_c}{i_1} = \frac{R_a \cdot i_a + R_c \cdot i_c}{i_1} = R_a + R_c = 30 \Omega$$

$$R_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_c}{i_1} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_1} = R_c = 10 \Omega$$

Lasciando “a vuoto” la porta 1, come riportato in figura 7.2b, calcoliamo i parametri R_{22} e R_{12} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a + v_c$, $v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = i_a = 0$, $i_2 = i_c$)

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_a + v_c}{i_2} = \frac{R_a \cdot 0 + R_c \cdot i_c}{i_2} = R_c = 10 \Omega$$

$$R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_c}{i_2} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_2} = R_c = 10 \Omega$$

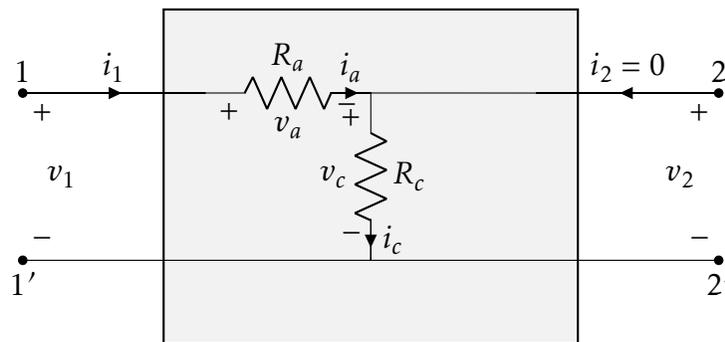
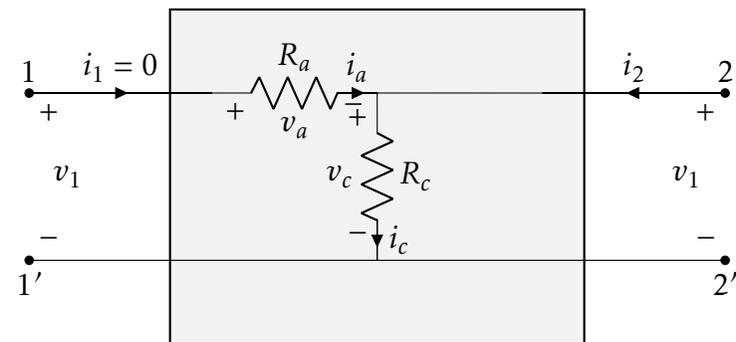
(a) porta 2 “a vuoto”: $i_2 = 0$ (b) porta 1 “a vuoto”: $i_1 = 0$

Figura 7.2: Doppio bipolo

Per calcolare i parametri della rappresentazione controllata in tensione, si “cortocircuita” una porta alla volta e si valuta il rapporto tra ciascuna corrente (i_1 , i_2) e la tensione della porta che non è “cortocircuitata”.

“Cortocircuitando” la porta 2, come riportato in figura 7.3a, calcoliamo i parametri G_{11} e G_{21} con i vincoli dati dalle LKC ($i_1 = i_a$, $i_2 = -i_1 = -i_a$) e dalle LKT ($v_a = v_1$, $v_c = v_2 = 0$)

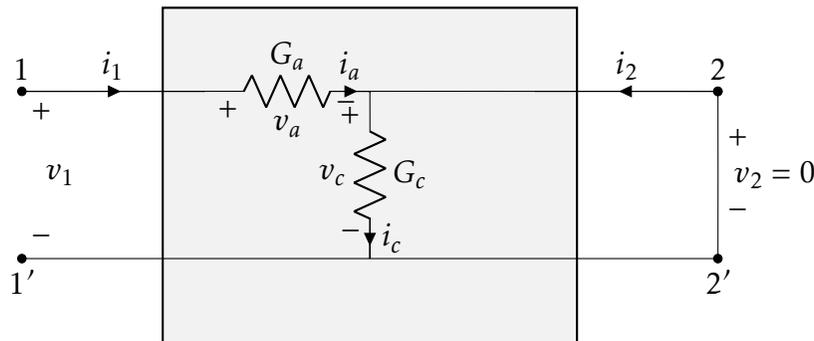
$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_a}{v_1} = \frac{G_a \cdot v_a}{v_1} = G_a = 50 \text{ mS}$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{-i_a}{v_1} = \frac{-G_a \cdot v_a}{v_1} = -G_a = -50 \text{ mS}$$

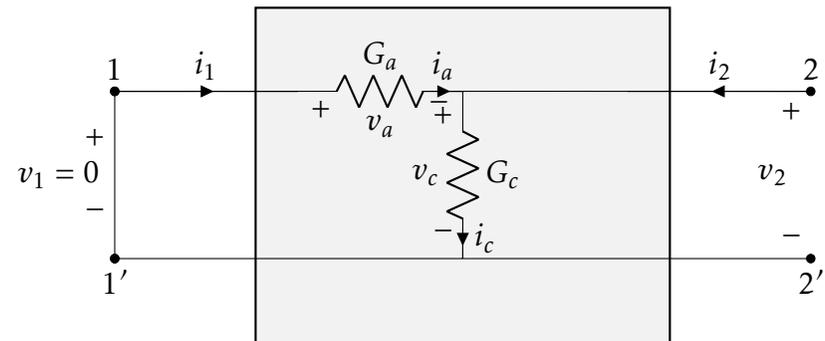
“Cortocircuitando” la porta 1, come riportato in figura 7.3b, calcoliamo i parametri G_{22} e G_{12} con i vincoli dati dalle LKC ($i_1 = i_a$, $i_2 = i_c - i_a$) e dalle LKT ($v_1 = 0$, $v_2 = v_c = -v_a$)

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_a}{v_2} = \frac{G_a \cdot v_a}{v_2} = -G_a = -50 \text{ mS}$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_c - i_a}{v_2} = \frac{G_c \cdot v_c - G_a \cdot v_a}{v_2} = G_c + G_a = 150 \text{ mS}$$



(a) porta 2 “cortocircuitata”: $v_2 = 0$



(b) porta 1 “cortocircuitata”: $v_1 = 0$

Figura 7.3: Doppio bipolo

Osservazioni

Si noti che vale la relazione $G = R^{-1}$ tra le matrici di resistenza R e di conduttanza G così definite

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad [\Omega]$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -50 \\ -50 & 150 \end{bmatrix} \quad [mS]$$

7.2 Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrici R, T

Nella figura 7.4 è rappresentato un doppio bipolo con entrambe le porte convenzionate da utilizzatore.

1. Calcolare i parametri della rappresentazione controllata in corrente (matrice R)
2. Calcolare i parametri della rappresentazione mediante matrice di trasmissione T

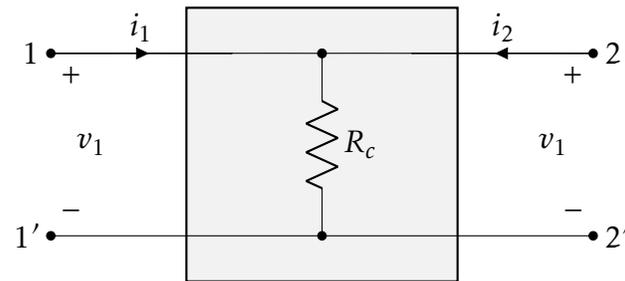


Figura 7.4: Doppio bipolo

$$R_c = 10 \Omega$$

Soluzione

Per calcolare i parametri della rappresentazione controllata in corrente, si lascia “a vuoto” una porta alla volta e si valuta il rapporto tra ciascuna tensione (v_1, v_2) e la corrente della porta che non è “a vuoto”.

Lasciando “a vuoto” la porta 2, come riportato in figura 7.5a, calcoliamo i parametri R_{11} e R_{21} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = i_c, i_2 = 0$)

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_c}{i_1} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_1} = R_c = 10\Omega$$

$$R_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_c}{i_1} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_1} = R_c = 10\Omega$$

Lasciando “a vuoto” la porta 1, come riportato in figura 7.5b, calcoliamo i parametri R_{22} e R_{12} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = 0, i_2 = i_c$)

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_c}{i_2} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_2} = R_c = 10\Omega$$

$$R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_c}{i_2} = \frac{R_c \cdot i_c}{i_2} = R_c = 10\Omega$$

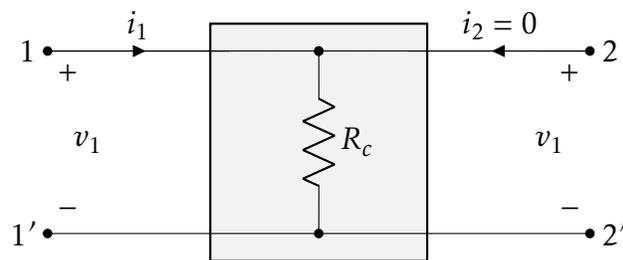
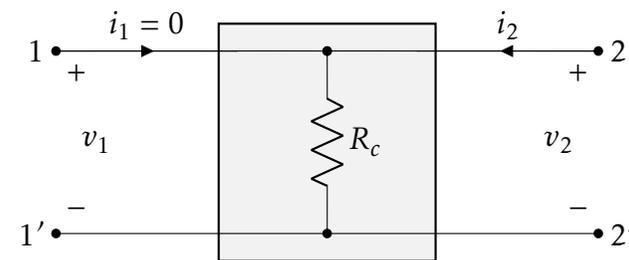
(a) porta 2 “a vuoto”: $i_2 = 0$ (b) porta 1 “a vuoto”: $i_1 = 0$

Figura 7.5: Doppio bipolo

Si noti che non è possibile definire la matrice di conduttanza $G = R^{-1}$ visto che R non ha “rango pieno” ($rank(R) = 1$)

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} [\Omega]$$

I parametri A e C della matrice di trasmissione si calcolano lasciando “a vuoto” la porta 2, come riportato in figura 7.6a, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = i_c, i_2 = 0$)

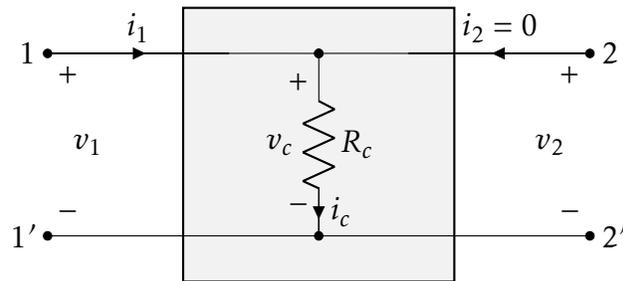
$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = \frac{v_c}{v_c} = 1$$

$$C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = \frac{i_c}{v_c} = \frac{1}{R_c} = 100 \text{ mS}$$

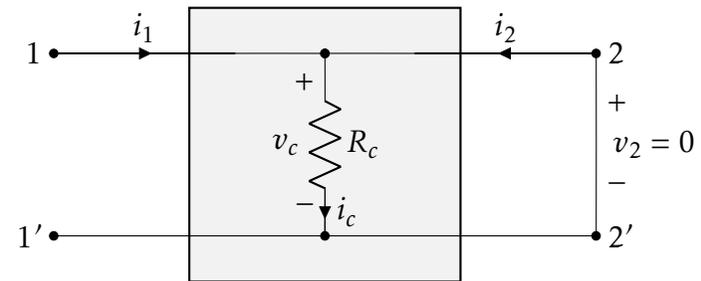
I parametri B e D della matrice di trasmissione si calcolano ponendo la porta 2 “in cortocircuito”, come riportato in figura 7.6b, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_2 = 0$) e dalle LKC ($i_1 + i_2 = 0$)

$$B = \left. \frac{v_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{0}{-i_2} = 0 \Omega$$

$$D = \left. \frac{i_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{-i_2}{-i_2} = 1$$



(a) porta 2 “a vuoto”: $i_2 = 0$



(b) porta 2 “in cortocircuito”: $v_2 = 0$

Figura 7.6: Doppio bipolo

7.3 Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrici G , T

Nella figura 7.7 è rappresentato un doppio bipolo con entrambe le porte convenzionate da utilizzatore.

1. Calcolare i parametri della rappresentazione controllata in tensione (matrice G)
2. Calcolare i parametri della rappresentazione mediante matrice di trasmissione T

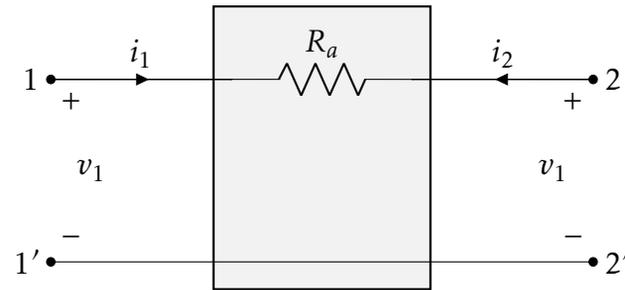


Figura 7.7: Doppio bipolo

$$R_a = 20 \Omega$$

Soluzione

Per calcolare i parametri della rappresentazione controllata in tensione, si pone “in cortocircuito” una porta alla volta e si valuta il rapporto tra ciascuna corrente (i_1, i_2) e la tensione della porta che non è “in cortocircuito”.

“Cortocircuitando” la porta 2, come riportato in figura 7.8a, calcoliamo i parametri G_{11} e G_{21} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a$, $v_2 = 0$) e dalle LKC ($i_1 = i_a$, $i_2 = -i_a = 0$)

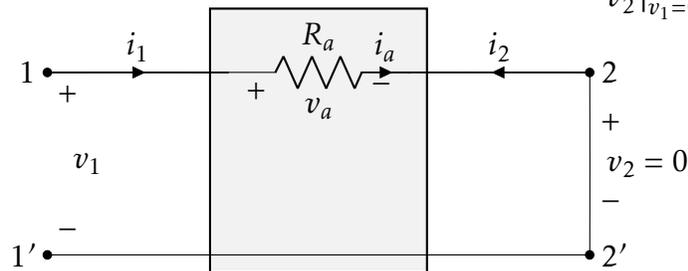
$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{G_a \cdot v_a}{v_1} = G_a = 50 \text{ ms}$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{-G_a \cdot v_a}{v_1} = -G_a = -50 \text{ ms}$$

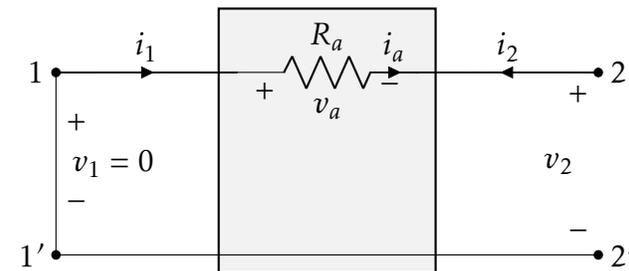
“Cortocircuitando” la porta 1, come riportato in figura 7.8b, calcoliamo i parametri R_{22} e R_{12} con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = 0$, $v_2 = -v_a$) e dalle LKC ($i_1 = i_a$, $i_2 = -i_a = 0$)

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{-G_a \cdot v_a}{-v_a} = G_a = 50 \text{ ms}$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{G_a \cdot v_a}{-v_a} = -G_a = -50 \text{ ms}$$



(a) porta 2 “in cortocircuito”: $v_2 = 0$



(b) porta 1 “in cortocircuito”: $v_1 = 0$

Figura 7.8: Doppio bipolo

Si noti che non è possibile definire la matrice di conduttanza $R = G^{-1}$ visto che G non ha “rango pieno” ($\text{rank}(G) = 1$)

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} [mS]$$

I parametri A e C della matrice di trasmissione si calcolano lasciando “a vuoto” la porta 2, come riportato in figura 7.9a, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_2$) e dalle LKC ($i_1 = i_2 = 0$)

$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = 1$$

$$C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = \frac{0}{v_2} = 0 \text{ mS}$$

I parametri B e D della matrice di trasmissione si calcolano ponendo la porta 2 “in cortocircuito”, come riportato in figura 7.9b, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a$, $v_2 = 0$) e dalle LKC ($i_1 = i_a = -i_2$)

$$B = \left. \frac{v_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{R_a \cdot i_a}{-i_2} = R_a = 20 \Omega$$

$$D = \left. \frac{i_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{-i_2}{-i_2} = 1$$

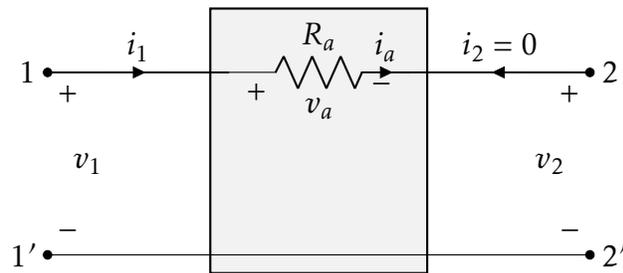
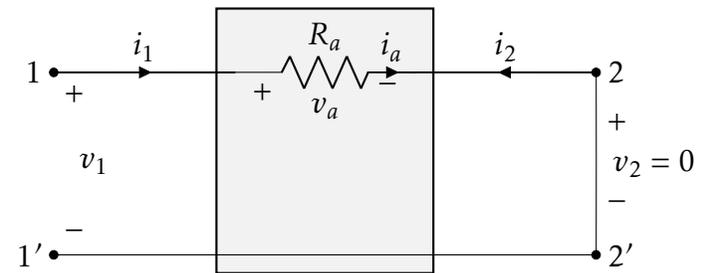
(a) porta 2 “a vuoto”: $i_2 = 0$ (b) porta 2 “in cortocircuito”: $v_2 = 0$

Figura 7.9: Doppio bipolo

7.4 Doppi bipoli: rappresentazione mediante matrice di trasmissione T

Nella figura 7.10 è rappresentato un doppio bipolo con entrambe le porte convenzionate da utilizzatore. Calcolare i parametri della matrice di trasmissione T

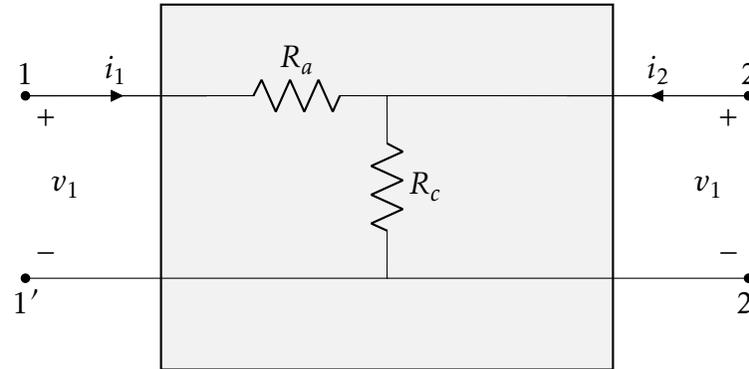


Figura 7.10: Doppio bipolo

$$R_a = 20 \Omega \quad R_c = 10 \Omega$$

Soluzione

I parametri A e C della matrice di trasmissione si calcolano lasciando “a vuoto” la porta 2, come riportato in figura 7.11a, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a + v_c$, $v_2 = v_c$) e dalle LKC ($i_1 = i_a = i_c$, $i_2 = 0$)

$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = \frac{v_a + v_c}{v_c} = \frac{R_a \cdot i_a + R_c \cdot i_c}{R_c \cdot i_c} = \frac{R_a + R_c}{R_c} = 3$$

$$C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{(-i_2)=0} = \frac{i_a}{v_c} = \frac{i_a}{R_c \cdot i_c} = \frac{1}{R_c} = 100 \text{ mS}$$

I parametri B e D della matrice di trasmissione si calcolano ponendo la porta 2 “in cortocircuito”, come riportato in figura 7.11b, con i vincoli dati dalla LKT ($v_1 = v_a$, $v_2 = 0$) e dalle LKC ($i_1 = i_a = -i_2$)

$$B = \left. \frac{v_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{v_a}{-i_2} = \frac{R_a \cdot i_a}{i_a} = R_a = 20 \Omega$$

$$D = \left. \frac{i_1}{(-i_2)} \right|_{v_2=0} = \frac{-i_2}{-i_2} = 1$$

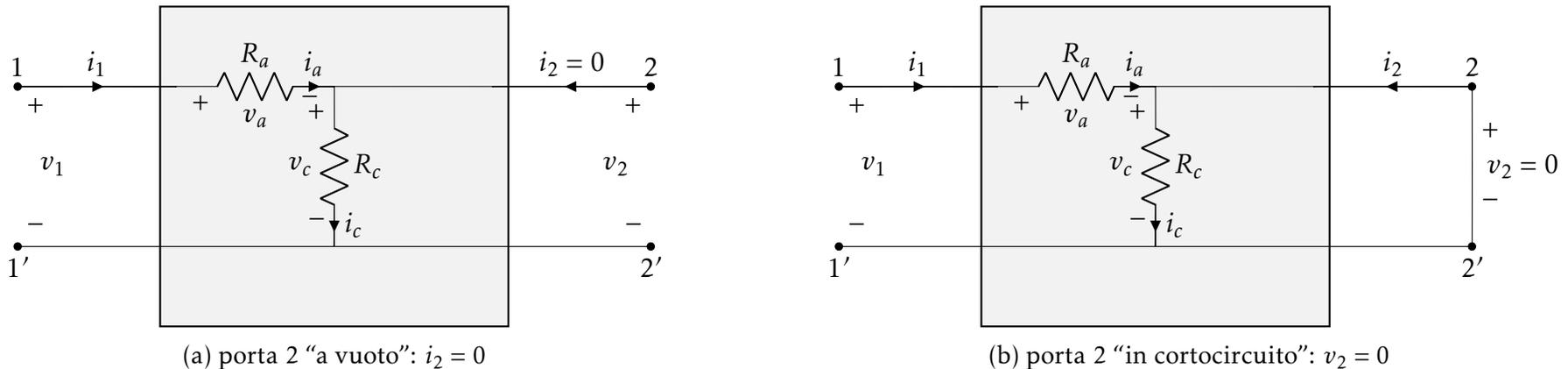


Figura 7.11: Doppio bipolo

Osservazioni

La matrice di trasmissione risulta dunque

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_a + R_c}{R_c} & R_a \\ \frac{1}{R_c} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che si può arrivare allo stesso risultato calcolando la matrice di trasmissione corrispondente alla cascata dei due doppi visti negli esercizi 7.2 e 7.3.

Per il doppio bipolo analizzato nell'esercizio 7.3 la matrice di trasmissione risulta

$$T_a = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il doppio bipolo analizzato nell'esercizio 7.2 la matrice di trasmissione risulta

$$T_c = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_c} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto la matrice di trasmissione corrispondente alla cascata dei due doppi bipoli risulta

$$T = T_a \cdot T_c = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_c} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.5 Analisi di rete lineare con doppio bipolo resistivo

Nella figura 7.12 è rappresentato un doppio bipolo resistivo con entrambe le porte convenzionate da utilizzatore. I parametri R_{11} , R_{22} , R_{12} della sua rappresentazione controllata in corrente sono riportati in tabella. Alla porta 1 è collegato un generatore affine di tensione (GAT) con parametri E e R_i . Alla porta 2 è collegato un resistore R_u .

1. Effettuare la sintesi a stella del doppio bipolo resistivo
2. Calcolare i parametri (E_{eq} e R_{eq}) del generatore equivalente di tensione ai morsetti CD
3. Calcolare la potenza assorbita dal carico R_u
4. Calcolare il valore del rapporto di trasformazione n di un trasformatore ideale da collegare tra i morsetti CD e il carico R_u per adattare il carico

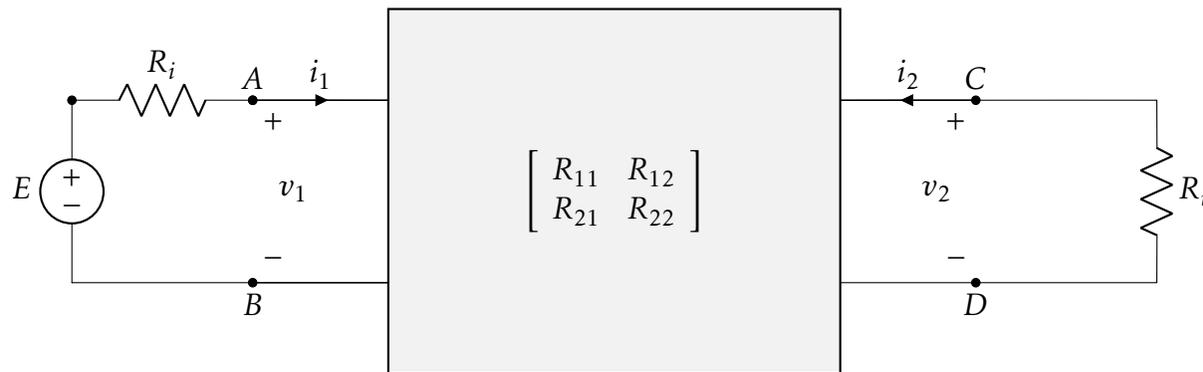


Figura 7.12: Doppio bipolo

$$E = 1000 \text{ V} \quad R_i = 10 \, \Omega \quad R_u = 82 \, \Omega \quad R_{11} = 40 \, \Omega \quad R_{22} = 20 \, \Omega \quad R_{12} = 10 \, \Omega$$

Soluzione

Effettuare la sintesi a stella significa calcolare i valori dei resistori R_a , R_b ed R_c collegati come in figura 7.13 che stabiliscono gli stessi legami tra tensioni e correnti alle porte del doppio bipolo rappresentato dalla matrice di resistenza R .

$$\begin{cases} R_a = R_{11} - R_{12} = 30\Omega \\ R_b = R_{22} - R_{12} = 10\Omega \\ R_c = R_{12} = 10\Omega \end{cases}$$

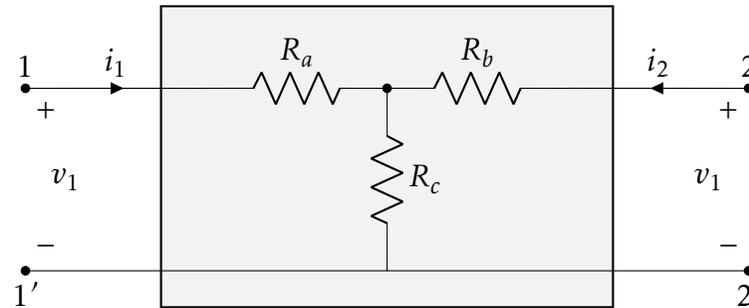


Figura 7.13: Sintesi a stella del doppio bipolo

Sostituendo i resistori di figura 7.13 nella rete iniziale, si ottiene la rete di bipoli lineari rappresentata in figura 7.14.

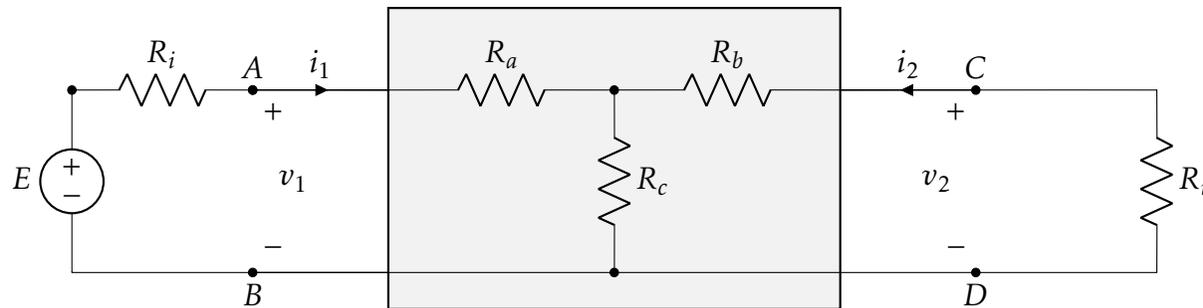


Figura 7.14: Rete di bipoli lineari di cui si vuole determinare il generatore equivalente di tensione alla porta CD

Per calcolare la resistenza del generatore equivalente di Thevenin alla porta CD (R_{eq}) consideriamo la rete “inerte” di figura 7.15. Definendo $R_p = (R_i + R_a) // R_c = 8\Omega$, la resistenza equivalente vale

$$R_{eq} = R_b + R_p = 10 + 8 = 18\Omega$$

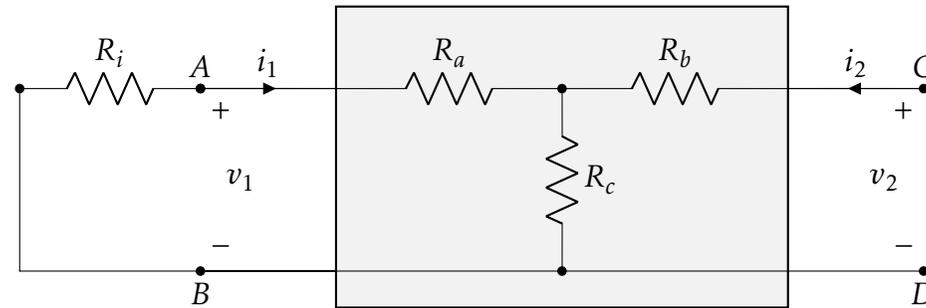


Figura 7.15: Rete di bipoli lineari resa inerte.

Per calcolare la tensione del generatore equivalente di Thevenin alla porta CD ($E_{eq} = V_{CD0}$) consideriamo la rete di figura 7.16, in cui la porta CD è lasciata “a vuoto”. Applicando la formula del partitore di tensione si ottiene

$$E_{eq} = V_{CD0} = V_c = E \cdot \frac{R_c}{R_c + R_a + R_i} = 200V$$

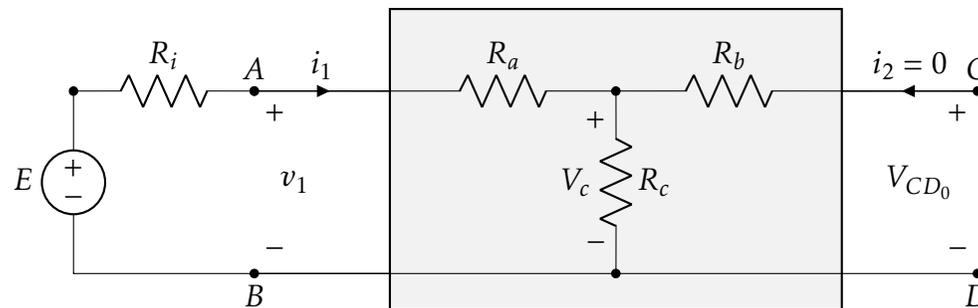


Figura 7.16: Rete di bipoli lineari con porta CD “a vuoto”

Per calcolare la potenza assorbita dal carico R_u , ricaviamo la corrente I_u applicando la LKT all'unica maglia di figura 7.17.

$$I_u = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_u} = \frac{200}{18 + 82} = 2 \text{ A} \quad \rightarrow \quad P_u = R_u \cdot I_u^2 = 82 \cdot 2^2 = 328 \text{ W}$$

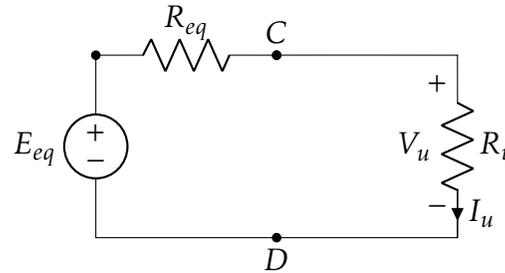


Figura 7.17: Generatore equivalente di Thevenin alla porta CD collegato al carico R_u

Inserendo un trasformatore ideale con rapporto di trasformazione n tra i morsetti CD e il carico R_u , la resistenza equivalente alla porta 1 del trasformatore ideale risulta $R_1 = n^2 \cdot R_u$.

Per il teorema del massimo trasferimento di potenza, quando $R_1 = R_{eq}$ si ha la massima potenza trasferita su R_1 e tale potenza coincide con quella assorbita da R_u dato che il trasformatore è "trasparente" alla potenza. Per adattare il carico, basta quindi scegliere

$$n = \sqrt{\frac{R_{eq}}{R_u}} = \sqrt{\frac{18}{82}} = 0.485$$

In tali condizioni la potenza assorbita da R_u risulta

$$P_u^{mt} = P_1 = \frac{E_{eq}^2}{4 \cdot R_{eq}} = \frac{200^2}{4 \cdot 18} = 555.5 \text{ W}$$

7.6 Analisi di rete lineare con GTPC

Nella figura 7.18 è rappresentata una rete lineare costituita da due resistori ideali (R_1 , R_2) un generatore ideale di tensione E_1 e un generatore ideale di tensione pilotato in corrente (GTPC) E_2 .

1. Calcolare la potenza erogata da E_2
2. Calcolare la potenza assorbita da R_1 ed R_3
3. Verificare il bilancio delle potenze

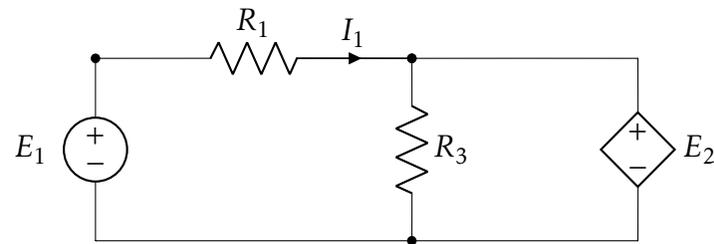


Figura 7.18: Rete di resistori, GIT, GTPC

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_3 = 1 \Omega \quad E_1 = 4 V \quad E_2 = r \cdot I_1 \quad r = 6 \Omega$$

Soluzione

Scrivendo la LKT per la maglia che comprende E_1 , R_1 e E_2 con i riferimenti di figura si ottiene

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2 = -E_1 + R_1 \cdot I_1 + r \cdot I_1 = 0$$

da cui

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + r} = \frac{4}{2 + 6} = 0.5 \text{ A} \quad \rightarrow \quad E_2 = r \cdot I_1 = 6 \cdot 0.5 = 3 \text{ V}$$

Tenendo conto che $V_3 = E_2$ si può calcolare la corrente I_3

$$I_3 = \frac{E_2}{R_3} = 3 \text{ A}$$

e infine si può calcolare la I_2 applicando la LKC al nodo 2

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_3 - I_1 = 3 - (0.5) = 2.5 \text{ A}$$

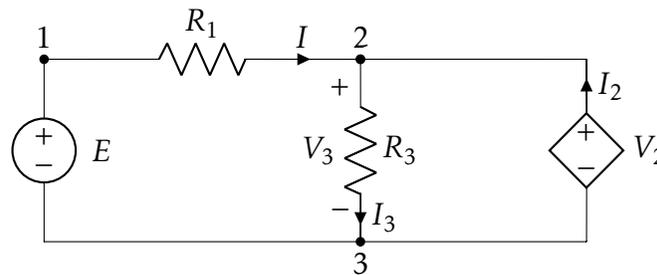


Figura 7.19: Rete di resistori, GIT, GTPC

Le potenze assorbite dai resistori valgono $P_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 2 \cdot 0.5^2 = 0.5 \text{ W}$ e $P_3 = R_3 \cdot I_3^2 = 1 \cdot 3^2 = 9 \text{ W}$

La potenza erogata dal GTPC E_2 , convenzionato da generatore, vale $P_{E_2} = E_2 \cdot I_2 = 3 \cdot 2.5 = 7.5 \text{ W}$

La potenza erogata dal generatore ideale E_1 , convenzionato da generatore, vale $P_{E_1} = E_1 \cdot I_1 = 4 \cdot 0.5 = 2 \text{ W}$

E' dunque verificato il bilancio delle potenze dato che la totale potenza erogata da E_1 e E_2 ($P_e = 9.5 \text{ W}$) è pari alla totale potenza assorbita dai resistori ($P_a = 9.5 \text{ W}$).

7.7 Generatore equivalente di tensione ai morsetti di una rete lineare con GTPT

Nella figura 7.20 è rappresentata una rete lineare costituita da quattro resistori ideali (R_1, R_2, R_3, R_4), un generatore ideale di corrente J_1 e un generatore ideale di tensione pilotato in tensione (GTPT) E_2 .

Determinare i parametri E_{eq} ed R_{eq} dello schema di Thevenin equivalente alla rete lineare ai morsetti AB

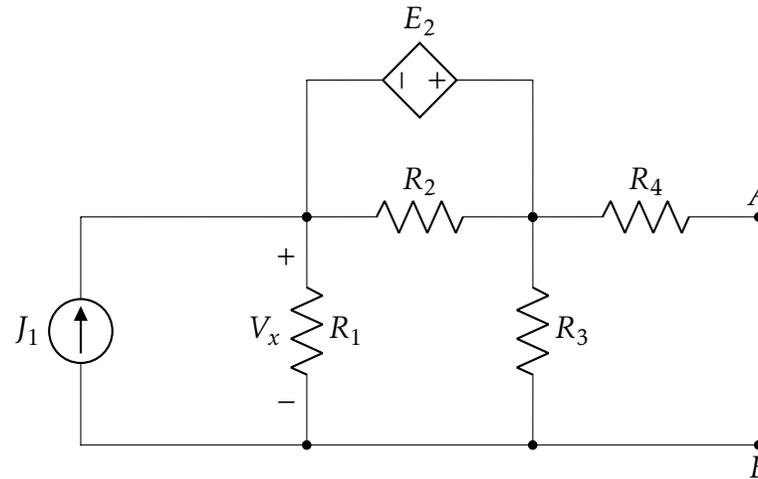


Figura 7.20: Rete di resistori, GIT, GTPC

$$R_1 = 4 \Omega \quad R_2 = 2 \Omega \quad R_3 = 6 \Omega \quad R_4 = 2 \Omega \quad J = 5 A \quad E_2 = \alpha \cdot V_x \quad \alpha = 2$$

Soluzione

Come primo passo conviene trasformare il GAC (J_1, R_1) nel corrispondente GAT (E_1, R_1) come riportato in figura 7.21 con $E_1 = R_1 \cdot J_1 = 20 \text{ V}$.

Calcolo di V_{AB_0} (tensione “a vuoto” alla porta AB)

Si può quindi scrivere la LKC per la maglia che comprende E_1, R_1, E_2 e R_3 e la LKC per il nodo 3 (non compare la I_4 dato che $I_4 = 0$, essendo la porta AB “a vuoto”). Con i riferimenti di figura si ottiene

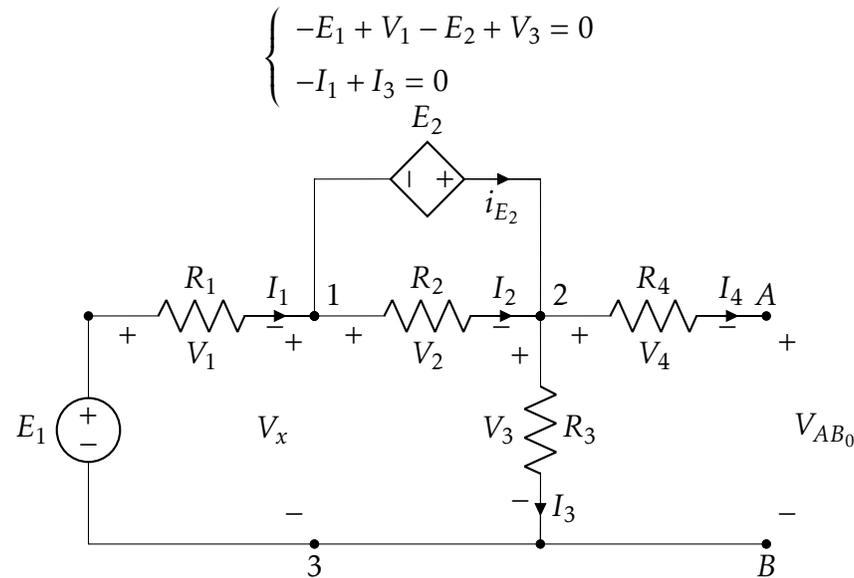


Figura 7.21: Rete di resistori, GIT, GTPT con porta AB “a vuoto”

Sostituendo le equazioni dei bipoli $V_1 = R_1 \cdot I_1$ e $V_3 = R_3 \cdot I_1$ nella LKT, si ottiene

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - \alpha \cdot V_x + R_3 \cdot I_1 = 0$$

Dato che $V_x = E_1 - R_1 \cdot I_1$ si ottiene infine la seguente relazione nella sola incognita I_1

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - \alpha \cdot (E_1 - R_1 \cdot I_1) + R_3 \cdot I_1 = 0$$

da cui

$$I_1 = E_1 \cdot \frac{1 + \alpha}{R_1 \cdot (1 + \alpha) + R_3} = 20 \cdot \frac{3}{12 + 6} = \frac{10}{3} A = 3.\bar{3} A$$

E' ora immediato calcolare la E_{eq} , tenendo conto che $V_4 = R_4 \cdot I_4 = 0$, come

$$E_{eq} = V_{AB_0} = V_3 - V_4 = R_3 \cdot I_3 - 0 = 6 \cdot \frac{10}{3} = 20 V$$

Calcolo di I_{cc} (corrente di cortocircuito alla porta AB)

Considerando la rete in figura 7.22, si può scrivere la LKC per la maglia che comprende E_1 , R_1 , E_2 e R_3 e la LKC per il nodo 3. Con i riferimenti di figura si ottiene

$$\begin{cases} -E_1 + V_1 - E_2 + V_3 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_4 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni dei bipoli $V_1 = R_1 \cdot I_1$ e $V_3 = R_p \cdot I_1$, con $R_p = R_3 // R_4 = 1.5 \Omega$ si ottiene

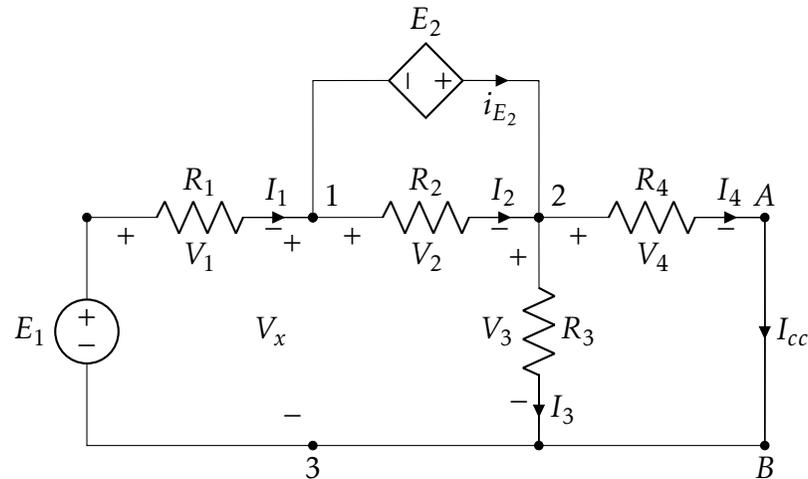


Figura 7.22: Rete di resistori, GIT, GTPT con porta AB in cortocircuito

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - \alpha \cdot V_x + R_p \cdot I_1 = 0$$

Dato che $V_x = E_1 - R_1 \cdot I_1$ si ottiene infine la seguente relazione nella sola incognita I_1

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - \alpha \cdot (E_1 - R_1 \cdot I_1) + R_p \cdot I_1 = 0$$

da cui

$$I_1 = E_1 \cdot \frac{1 + \alpha}{R_1 \cdot (1 + \alpha) + R_p} = 20 \cdot \frac{3}{12 + 1.5} = \frac{40}{9} A = 4.\bar{4} A$$

E' ora immediato calcolare la I_{cc} , con la formula del partitore di corrente

$$I_{cc} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot I_1 = \frac{10}{3} = 3.\bar{3} A$$

Infine, si ricava il valore della resistenza R_{eq}

$$R_{eq} \triangleq \frac{V_{AB0}}{I_{cc}} = 6 \Omega$$

7.8 Calcolo della resistenza interna ai morsetti AB di una rete lineare con GCPC

Nella figura 7.23 è rappresentata una rete lineare costituita da due resistori ideali (R_1 , R_2), un generatore ideale di tensione E e un generatore ideale di corrente pilotato in corrente (GCPC) J .

Determinare il valore della resistenza interna della rete ai morsetti AB .

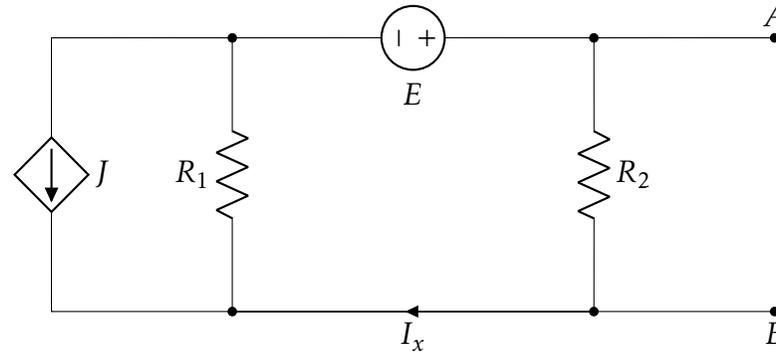


Figura 7.23: Rete di resistori, GIT, GCPC

$$R_1 = 8 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad E = 200 V \quad J = \beta \cdot I_x \quad \beta = 4$$

Soluzione

Per determinare il valore della resistenza interna della rete ai morsetti AB , sfruttiamo il fatto che la rete può funzionare sia “a vuoto” che “in cortocircuito” ai morsetti AB ed utilizziamo la relazione:

$$R_i = \frac{V_0}{I_{cc}}$$

Calcolo di V_0 (tensione “a vuoto” alla porta AB)

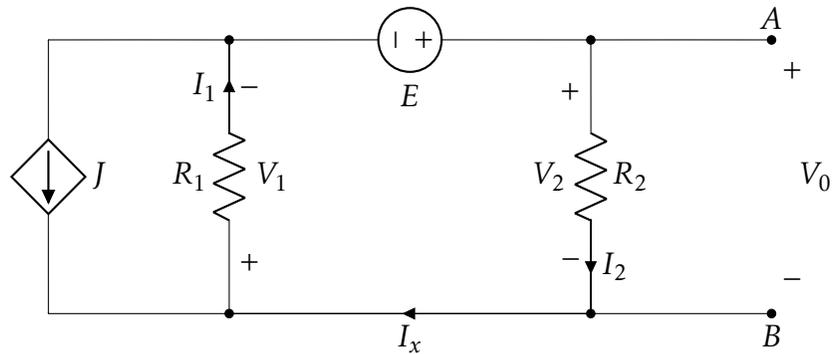


Figura 7.24: Rete a vuoto ai morsetti AB

Con i riferimenti indicati (resistori convenzionati come utilizzatori), si può quindi scrivere la seguente LKT:

$$E - V_1 - V_2 = 0$$

e le seguenti LKC:

$$I_2 = I_x, \quad I_1 = I_x + J$$

Combinando tali equazioni, con le equazioni di bipolo $V_k = R_k \cdot I_k$ e con quella del GCPC, si ottiene:

$$E = V_1 + V_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = R_1 \cdot (I_x + \beta \cdot I_x) + R_2 \cdot I_x = [(1 + \beta)R_1 + R_2] \cdot I_x$$

Da cui

$$I_x = \frac{E}{(1 + \beta)R_1 + R_2} = \frac{200}{5 \cdot 8 + 10} = 4A$$

E' ora immediato calcolare la tensione a "a vuoto":

$$V_0 = V_2 = R_2 \cdot I_x = 10 \cdot 4 = 40V$$

Calcolo di I_{cc} (corrente di cortocircuito alla porta AB)

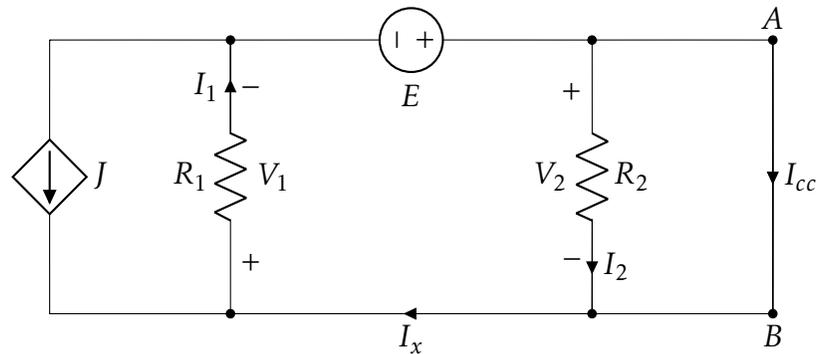


Figura 7.25: Rete in cortocircuito ai morsetti AB

Con i riferimenti indicati (resistori convenzionati come utilizzatori), si può quindi scrivere la seguente LKT:

$$E = V_1$$

e le seguenti LKC (si noti che R_2 è in parallelo al cortocircuito, per cui $V_2 = 0 \rightarrow I_2 = 0$):

$$I_{cc} = I_x - I_2 = I_x, \quad I_1 = I_x + J$$

Combinando tali equazioni, con le equazioni di bipolo $V_k = R_k \cdot I_k$ e con quella del GCPC, si ottiene:

$$E = V_1 = R_1 \cdot I_1 = R_1 \cdot (I_x + \beta \cdot I_x)$$

Da cui

$$I_{cc} = I_x = \frac{E}{(1 + \beta)R_1} = \frac{200}{5 \cdot 8} = 5 A$$

Calcolo di R_i

Infine, si ricava il valore della resistenza R_i

$$R_i \triangleq \frac{V_0}{I_{cc}} = \frac{40}{5} = 8 \Omega$$

Osservazioni

La resistenza interna può essere calcolata anche come rapporto tra tensione V^* e corrente I^* ai morsetti AB della rete resa inerte (cioè spegnendo i generatori ideali indipendenti, in questo caso E sostituito con un cortocircuito ideale).

Si noti che ai morsetti AB può essere collegato indifferentemente un generatore ideale di tensione $E^* = V^*$ o un generatore ideale di corrente $J^* = I^*$. Scegliendo un generatore ideale di tensione $E^* = V^*$, la rete si modifica come in figura 7.26.

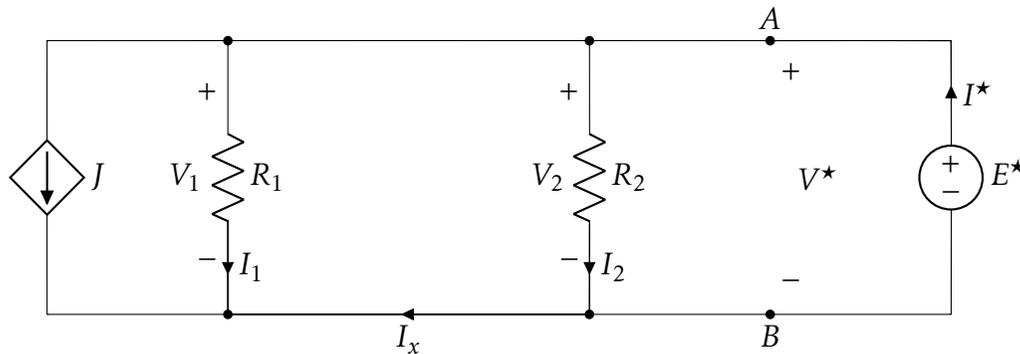


Figura 7.26: Rete resa inerte, con GIC collegato ai morsetti AB

Con i riferimenti indicati possiamo esprimere le correnti dei resistori in funzione della tensione impressa E^* :

$$I_1 = \frac{E^*}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E^*}{R_2}$$

Inoltre possiamo scrivere le seguenti LKC

$$I_x + I_1 + J = 0, \quad I^* - I_2 + I_x = 0$$

Dalla prima, sostituendo $I_1 = E^*/R_1$ e $J = \beta \cdot I_x$, si ricava:

$$I_x = -\frac{E^*}{(1 + \beta)R_1}$$

Dalla seconda, sostituendo $I_2 = E^*/R_2$ e l'espressione appena trovata per I_x , si ottiene;

$$I^* = I_2 - I_x = \frac{E^*}{R_2} + \frac{E^*}{(1 + \beta)R_1} = \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{(1 + \beta)R_1} \right] E^*$$

Infine, si può calcolare la resistenza R_i come:

$$R_i = \frac{V^*}{I^*} = \frac{E^*}{I^*} = \frac{(1 + \beta)R_1 \cdot R_2}{(1 + \beta)R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 8 + 10} = 8 \Omega$$

7.9 Analisi di rete lineare con GTPT e GTPC mediante metodo delle correnti di anello

Nella figura 7.27 è rappresentata una rete lineare costituita da cinque resistori ideali (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5), un generatore ideale di corrente J_1 , un generatore ideale di tensione E_2 , un generatore ideale di tensione pilotato in corrente E_3 e un generatore ideale di tensione pilotato in tensione E_4 .

Calcolare il valore della tensione V_1 applicando il metodo delle correnti di anello.

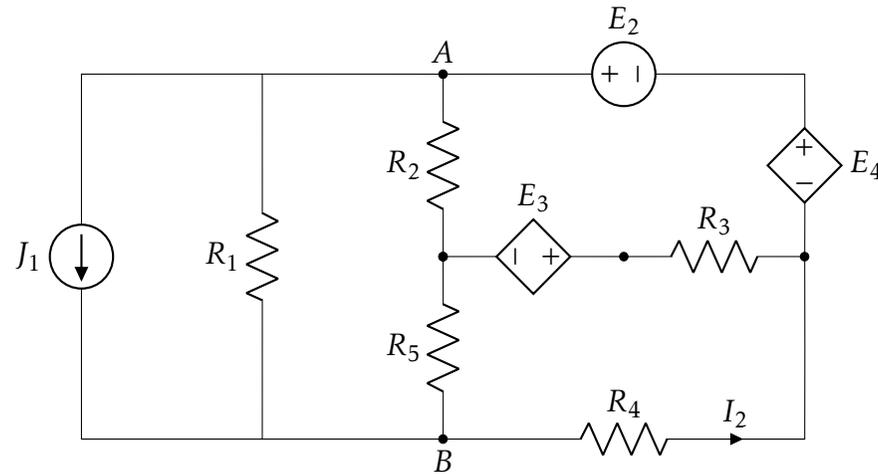


Figura 7.27: Rete di resistori con GTPC e GCPT

$R_1 = 10 \Omega$	$R_2 = 40 \Omega$	$R_3 = 20 \Omega$	$R_4 = 50 \Omega$	$R_5 = 30 \Omega$	$J_1 = 3 A$	$E_2 = 10 V$
$E_3 = r \cdot I_2$	$E_4 = \alpha \cdot V_{AB}$	$r = 20 \Omega$	$\alpha = 3$			

Soluzione

Per applicare il metodo delle correnti di anello, conviene trasformare il GAC (J_1, R_1) nel corrispondente GAT (E_1, R_1), con tensione impressa $E_1 = J_1 \cdot R_1 = 30 \text{ V}$. Nella rete così modificata, riportata in figura 7.28, viene fissato lo stesso verso di percorrenza (orario) nei tre anelli.

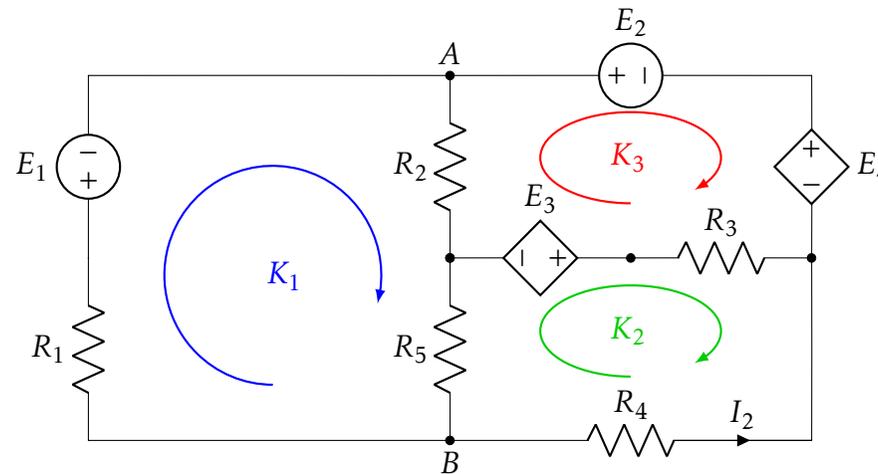


Figura 7.28: Rete di resistori ideali, generatori ideali indipendenti di tensione (E_1, E_2) e generatori pilotati (E_3, E_4).

Con i riferimenti indicati per le correnti di anello, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)K_1 - R_5K_2 - R_2K_3 & = -E_1 \\ -R_5K_1 + (R_3 + R_4 + R_5)K_2 - R_3K_3 & = E_3 \\ -R_2K_1 - R_3K_2 + (R_2 + R_3)K_3 & = -E_2 - E_3 - E_4 \end{cases}$$

A destra dell'uguale sono riportate in rosso le tensioni impresse dai generatori pilotati, che possono essere espresse in funzione delle correnti di anello come segue:

$$\begin{cases} E_3 = r \cdot I_2 = r \cdot (-K_2) \\ E_4 = \alpha \cdot V_{AB} = \alpha [R_2(K_1 - K_3) + R_5(K_1 - K_2)] \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni di E_3 ed E_4 nelle equazioni precedenti, si ottiene:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)K_1 - R_5K_2 - R_2K_3 & = -E_1 \\ -R_5K_1 + (R_3 + r + R_4 + R_5)K_2 - R_3K_3 & = 0 \\ -[(1 - \alpha)R_2 - \alpha R_5]K_1 - (\alpha R_5 + R_3 + r)K_2 + [(1 - \alpha)R_2 + R_3]K_3 & = -E_2 \end{cases}$$

Si noti come i coefficienti che moltiplicano le incognite (K_r , $r = 1 \dots 3$) ai primi membri delle equazioni sono combinazioni lineari dei valori delle resistenze e dei parametri α e r dei generatori pilotati. A secondo membro sono presenti solo le tensioni impresse dei generatori ideali di tensione E_1 ed E_2 .

La terza equazione può essere scritta in modo alternativo e più semplice utilizzando la seguente relazione per E_4 :

$$E_4 = \alpha \cdot V_1 = \alpha(-E_1 - R_1K_1)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)K_1 - R_5K_2 - R_2K_3 & = -E_1 \\ -R_5K_1 + (R_3 + r + R_4 + R_5)K_2 - R_3K_3 & = 0 \\ -(\alpha R_1 + R_2)K_1 - (R_3 + r)K_2 + (R_2 + R_3)K_3 & = \alpha E_1 - E_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i seguenti valori delle correnti di anello:

$$\begin{cases} K_1 = 68 \text{ A} \\ K_2 = 47 \text{ A} \\ K_3 = 112 \text{ A} \end{cases}$$

Infine si può calcolare la tensione V_{AB} come:

$$V_{AB} = [R_2(K_1 - K_3) + R_5(K_1 - K_2)] = [40 \cdot (68 - 112) + 50 \cdot (68 - 47)] = -710 \text{ V}$$

o, in alternativa, come:

$$V_{AB} = -E_1 - R_1 \cdot K_1 = 3 \cdot (-30 - 10 \cdot 68) = -710 \text{ V}$$

7.10 Analisi di rete lineare con GTPC e GCPT mediante sovrapposizione degli effetti

Nella figura 7.29 è rappresentata una rete lineare costituita da due resistori ideali (R_1 , R_2), un generatore ideale di tensione E_1 , un generatore ideale di corrente J_1 , un generatore ideale di tensione pilotato in corrente E_2 e un generatore ideale di corrente pilotato in tensione J_2 .

Calcolare il valore della tensione V_1 , applicando il metodo di sovrapposizione degli effetti.

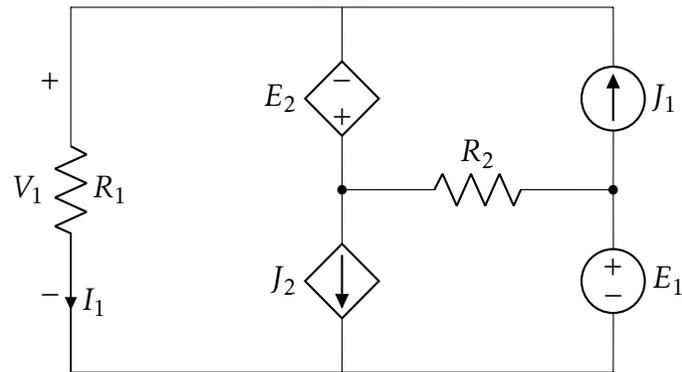


Figura 7.29: Rete di resistori con GTPC e GCPT

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega \quad E_1 = 100 V \quad J_1 = 10 A \quad E_2 = r \cdot I_1 \quad J_2 = g \cdot V_1 \quad r = 5 \Omega \quad g = 0.1 S$$

Soluzione

Applicando il metodo di sovrapposizione degli effetti, si fa agire una alla volta ciascun generatore ideale indipendente (E_1, J_1). Nelle singole reti, con un solo generatore ideale indipendente «acceso», i generatori pilotati sono lasciati sempre agire, con la grandezza di comando (tensione o corrente) che assume di volta in volta il valore (effetto) corrispondente allo specifico generatore ideale indipendente in azione.

Rete con solo E_1

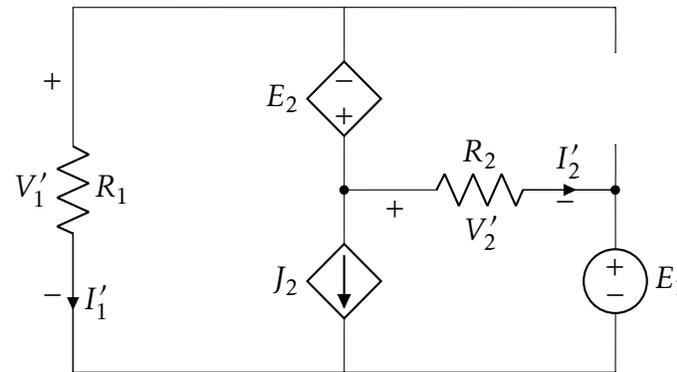


Figura 7.30: Rete di resistori con GTPC e GCPT e un solo generatore ideale indipendente (E_1).

Con i riferimenti indicati (resistori convenzionati come utilizzatori), si può scrivere la seguente LKT:

$$E_1 - V_1' - E_2 + V_2' = 0$$

e la seguente LKC:

$$I_2' + J_2 + I_1' = 0$$

Sostituendo le equazioni dei bipoli, dalla prima si ottiene:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1' - r \cdot I_1' + R_2 \cdot I_2' = E_1 - (R_1 + r) \cdot I_1' + R_2 \cdot I_2' = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 = (R_1 + r) \cdot I_1' - R_2 \cdot I_2'$$

e dalla seconda si ottiene:

$$I_2' + g \cdot V_1' + I_1' = I_2' + g \cdot R_1 \cdot I_1' + I_1' = I_2' + (g \cdot R_1 + 1) \cdot I_1' = 0 \quad \rightarrow \quad I_2' = -(g \cdot R_1 + 1) \cdot I_1'$$

Sostituendo l'espressione di I_2' nella relazione precedente si trova:

$$E_1 = (R_1 + r) \cdot I_1' - R_2 \cdot [-(g \cdot R_1 + 1) \cdot I_1'] = [(R_1 + r) + R_2 \cdot (g \cdot R_1 + 1)] \cdot I_1'$$

ovvero

$$I_1' = \frac{E_1}{[R_1 + R_2 + r + g \cdot R_1 \cdot R_2]} = \frac{100}{10 + 5 + 5 + 0.1 \cdot 10 \cdot 5} = 4 A$$

$$V_1' = R_1 \cdot I_1' = 40 V$$

Le grandezze impresse dai generatori pilotati sono:

$$E_2' = r \cdot I_1' = 20 V$$

$$J_2' = g \cdot V_1' = 4 A$$

Rete con solo J_1

Con i riferimenti indicati (resistori convenzionati come utilizzatori), si può scrivere la seguente LKT:

$$-V_1'' - E_2 + V_2'' = 0$$

e le seguenti LKC:

$$I_2'' + J_2 - I_{E_2}'' = 0, \quad I_{E_2}'' + I_1'' - J_1 = 0$$

Sostituendo le equazioni dei bipoli, dalla prima si ottiene:

$$-R_1 \cdot I_1'' - r \cdot I_1'' + R_2 \cdot I_2'' = -(R_1 + r) \cdot I_1'' + R_2 \cdot I_2'' = 0 \quad \rightarrow \quad I_2'' = \frac{R_1 + r}{R_2} \cdot I_1''$$

Combinando le LKC e sostituendo le espressioni del GCPT si ottiene:

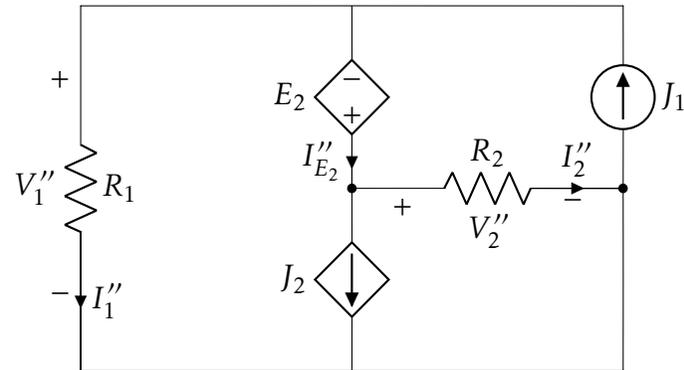


Figura 7.31: Rete di resistori con GTPC e GCPT e un solo generatore ideale indipendente (J_1).

$$I_2'' + J_2 + I_1'' - J_1 = I_2'' + g \cdot V_1'' + I_1'' - J_1 = I_2'' + g \cdot R_1 \cdot I_1'' + I_1'' - J_1 = 0$$

Sostituendo l'espressione di I_2'' e riordinando si ottiene:

$$\frac{R_1 + r}{R_2} \cdot I_1'' + g \cdot R_1 \cdot I_1'' + I_1'' - J_1 = 0 \quad \rightarrow \quad J_1 = \frac{R_1 + r + R_2 + g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_2} \cdot I_1''$$

ovvero

$$I_1'' = \frac{R_2 \cdot J_1}{R_1 + r + R_2 + g \cdot R_1 \cdot R_2} = \frac{5 \cdot 10}{10 + 5 + 5 + 0.1 \cdot 10 \cdot 5} = 2 \text{ A}$$

$$V_1'' = R_2 \cdot I_1'' = 20 \text{ V}$$

Le grandezze impresse dai generatori pilotati sono:

$$E_2'' = r \cdot I_1'' = 10 \text{ V}$$

$$J_2'' = g \cdot V_1'' = 2 \text{ A}$$

Soluzione della rete completa

Sommando i contributi (effetti) calcolati quando agiscono E_1 e J_1 da soli, si ottiene:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 4 + 2 = 6 A$$

$$V_1 = V_1' + V_1'' = 40 + 20 = 60 V$$

Ovviamente, si può ottenere la V_1 anche come:

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 10 \cdot 6 = 60 V$$

Le grandezze impresse dai generatori pilotati nella rete “completa” sono:

$$E_2 = E_2' + E_2'' = 20 + 10 = 30 V$$

$$J_2 = J_2' + J_2'' = 4 + 2 = 6 A$$

8

Reti elettriche in regime sinusoidale

8.1 Metodo simbolico: da sinusoidi a fasori

Rappresentare le seguenti funzioni sinusoidali, utilizzando il metodo simbolico:

1. $e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t)$

2. $e_2(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(1000t - \frac{\pi}{3}\right)$

3. $e_3(t) = 100\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$

4. $e_4(t) = 20 \sin\left(100t + \frac{3}{4}\pi\right)$

5. $e_5(t) = 100\sqrt{2} \cos(10t)$

Soluzione

Ogni funzione sinusoidale $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$ appartenente all'insieme delle sinusoidi isofrequenziali con pulsazione ω è individuata dai due parametri

- l'ampiezza A_M (ovvero il valore efficace $A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$)
- la fase iniziale α .

Tali due parametri definiscono anche uno ed un solo numero complesso (fasore) avente modulo uguale ad A^1 ed argomento uguale ad α : $\bar{A} = A e^{j\alpha}$

Sfruttando tale corrispondenza biunivoca, i fasori che corrispondono alle sinusoidi assegnate sono:

$$1. \bar{E}_1 = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0} = 100$$

$$2. \bar{E}_2 = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(-\frac{\pi}{3})} = 10 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = 10 \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5 - j5\sqrt{3}$$

$$3. \bar{E}_3 = 100 e^{j(\frac{\pi}{6})} = 100 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = 100 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = 50\sqrt{3} + j50$$

$$4. \bar{E}_4 = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j(-\frac{3}{4}\pi)} = \frac{20}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right] = \frac{20}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -10 + j10$$

$$5. \bar{E}_5 = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{2})} = 100 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 100(0 + j1) = 0 + j100$$

¹L'utilità di utilizzare il valore efficace A nella definizione del fasore, anziché l'ampiezza A_M sarà evidente più avanti, quando considereremo la potenza scambiata da bipoli o alle porte di m-bipoli in regime sinusoidale.

8.2 Metodo simbolico: da fasori a sinusoidi

Ricavare le espressioni temporali delle sinusoidi isofrequenziali alla pulsazione $\omega = 100 \text{ rad/s}$, che corrispondono ai seguenti fasori:

1. $\bar{E}_1 = 10(1 + j\sqrt{3})$

2. $\bar{E}_2 = 30 + j40$

3. $\bar{E}_3 = j\frac{100}{\sqrt{2}}$

4. $\bar{E}_4 = \frac{100}{\sqrt{2}}(1 + j)$

5. $\bar{E}_5 = 10$

6. $\bar{E}_6 = \frac{40}{\sqrt{2}}(-1 + j)$

Soluzione

Ad ogni numero complesso (fasore) $\bar{A} = A e^{j\alpha}$, può essere associata una ed una sola sinusoidale di frequenza f (pulsazione ω) nota, nella forma $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$, dove $a_M = A \sqrt{2}$.

Sfruttando tale corrispondenza biunivoca, le sinusoidi che corrispondono ai fasori assegnati si ricavano nel modo seguente

Per il fasore $\bar{E}_1 = 10(1 + j\sqrt{3})$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{10^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{10\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{\pi}{3}$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_1(t)$

$$e_1(t) = 20\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Per il fasore $\bar{E}_2 = 30 + j40$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{40}{30}\right) \cong 0.927$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_2(t)$

$$e_2(t) = 50\sqrt{2} \sin(100t + 0.927)$$

Per il fasore $\bar{E}_3 = j\frac{100}{\sqrt{2}}$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{0^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{100}{\sqrt{2}} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{100/\sqrt{2}}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_3(t)$

$$e_3(t) = 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 100 \cos(100t)$$

Per il fasore $\bar{E}_4 = \frac{100}{\sqrt{2}}(1 + j)$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = 100 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{100\sqrt{2}}{100\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_4(t)$

$$e_4(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Per il fasore $\bar{E}_5 = 10$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{0}{10}\right) = 0$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_5(t)$

$$e_5(t) = 10\sqrt{2}\sin(100t)$$

Per il fasore $\bar{E}_6 = \frac{40}{\sqrt{2}}(-1 + j)$, modulo ed argomento valgono

$$E = \sqrt{\left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2} = 40 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{40\sqrt{2}}{-40\sqrt{2}}\right) + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

da cui si ricava l'espressione temporale della $e_6(t)$

$$e_6(t) = 40\sqrt{2}\sin\left(100t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

Osservazioni conclusive ed errori frequenti

L'argomento dei fasori, cui corrisponde la fase iniziale nelle espressioni temporali delle sinusodi, va calcolato con attenzione.

Si ricorda, infatti, che il risultato dell'operazione di *arcotangente*, così come viene eseguita con la calcolatrice, è sempre compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. I numeri complessi (fasori) con parte reale negativa, invece, hanno argomento compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$: in questo caso, pertanto, al risultato fornito dalla calcolatrice va sommato π , come nell'ultimo caso esaminato (\bar{E}_6).

8.3 Legge di Kirchhoff delle tensioni in forma simbolica (LKTS)

Determinare la tensione $v(t)$ con i riferimenti di figura 8.1, applicando la LKT in forma simbolica ai fasori corrispondenti alle tensioni isofrequenziali $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, con $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

$$\begin{cases} v_1(t) = \sqrt{2} 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ v_2(t) = \sqrt{2} 20 \sin\left(\omega t - \frac{5}{6}\pi\right) \\ v_3(t) = \sqrt{2} 10 \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$$

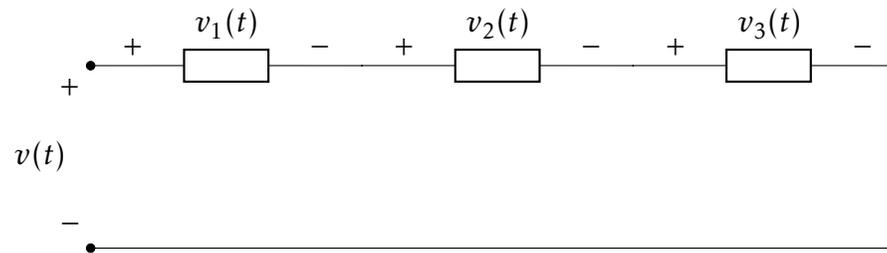


Figura 8.1: Bipoli in regime sinusoidale.

Soluzione

Anzichè eseguire la somma direttamente nel dominio del tempo, conviene trasformare le funzioni sinusoidali utilizzando il metodo simbolico, eseguire la somma sui relativi fasori rappresentati in figura 8.2 e ricavare poi la tensione $v(t)$ mediante antitrasformazione.

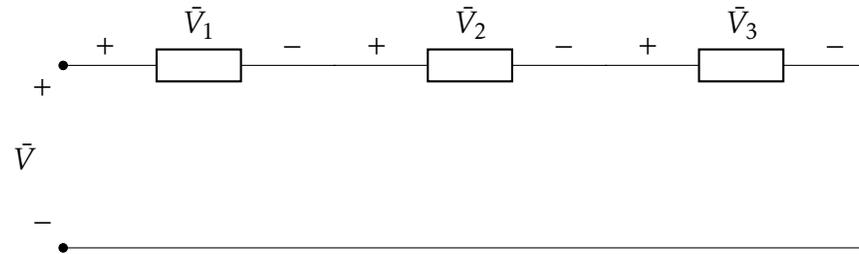


Figura 8.2: Rete simbolica

I fasori con modulo pari al valore efficace e argomento pari alla fase iniziale sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_1 = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(\pi/6)} = 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = 5\sqrt{3} + j5 \\ \bar{V}_2 = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(-5\pi/6)} = 20 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = -10\sqrt{3} - j10 \\ \bar{V}_3 = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(2\pi/3)} = 10 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5 + j5\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni in forma simbolica (LKTS) ai fasori di figura 8.2 si ottiene

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = -5(1 + \sqrt{3}) + j5(-1 + \sqrt{3})$$

il cui modulo e argomento valgono, rispettivamente:

$$\begin{cases} |\vec{V}| = 5 \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 10 \sqrt{2} \\ \arg(\vec{V}) = \arctan \frac{5(-1 + \sqrt{3})}{-5(1 + \sqrt{3})} + \pi = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11}{12} \pi \end{cases}$$

e l'espressione temporale di $v(t)$ risulta

$$v(t) = 20 \sin\left(100t + \frac{11}{12} \pi\right)$$

In figura 8.3 è ripotato il diagramma fasoriale corrispondente.

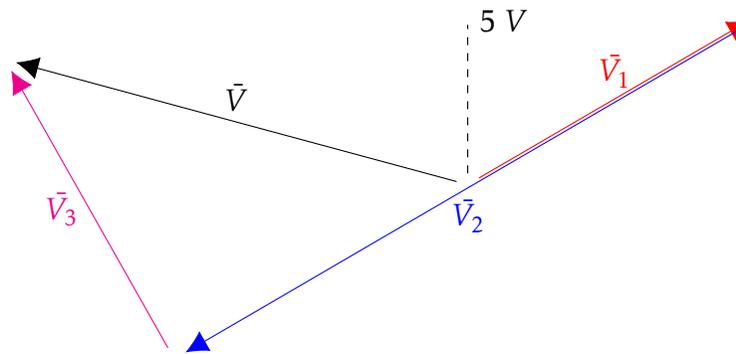


Figura 8.3: Diagramma fasoriale

Osservazioni conclusive ed errori frequenti

L'argomento dei fasori, cui corrisponde la fase iniziale nelle espressioni temporali delle sinusodi, va calcolato con attenzione. Si ricorda, infatti, che il risultato dell'operazione di *arcotangente*, così come viene eseguita con la calcolatrice, è compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

I numeri complessi (fasori) con parte reale negativa, invece, hanno argomento compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$: al risultato fornito dalla calcolatrice va sommato π , come nel caso in esame.

8.4 Legge di kirchhoff delle correnti in forma simbolica (LKCS)

Determinare la corrente $i(t)$ con i riferimenti di figura 8.4, applicando la LKC in forma simbolica ai fasori corrispondenti alle correnti isofrequenziali $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, con $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

$$\begin{cases} i_1(t) = 5 \sin(\omega t) \\ i_2(t) = 5 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right) \\ i_3(t) = 5 \cos(\omega t) \end{cases}$$

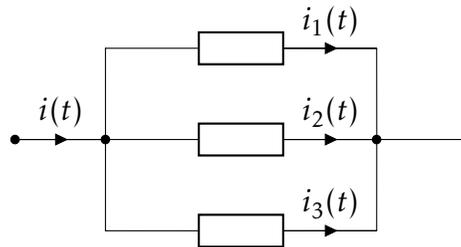


Figura 8.4: Bipoli in regime sinusoidale

Soluzione

Anzichè eseguire la somma direttamente nel dominio del tempo, conviene trasformare le funzioni sinusoidali utilizzando il metodo simbolico, eseguire la somma sui relativi fasori rappresentati in figura 8.5 e ricavare poi la corrente $i(t)$ mediante antitrasformazione.

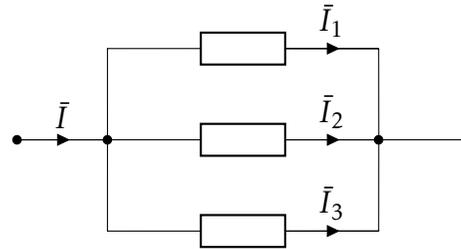


Figura 8.5: Rete simbolica

I fasori rappresentativi delle sinusoidi $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, con modulo pari al valore efficace e argomento pari alla fase iniziale, valgono

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} (1 + j0) = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \bar{I}_2 = 5 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{\sqrt{2}} (-1 + j) \\ \bar{I}_3 = \frac{5}{\sqrt{2}} (0 + j1) = j \frac{5}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Applicando la legge di Kirchhoff delle correnti in forma simbolica (LKCS) ai fasori di figura 8.5 si ottiene

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{5}{\sqrt{2}} (0 + j2) = j5 \sqrt{2}$$

il cui modulo e argomento valgono, rispettivamente

$$|\bar{I}| = 5 \sqrt{2}$$

$$\arg(\bar{I}) = \arctan \frac{5 \sqrt{2}}{0} = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

a cui corrisponde la seguente espressione temporale

$$i(t) = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cos(\omega t)$$

In figura 8.6 è ripotato il diagramma fasoriale per i fasori \bar{I}_1 , \bar{I}_2 , \bar{I}_3 e \bar{I} .

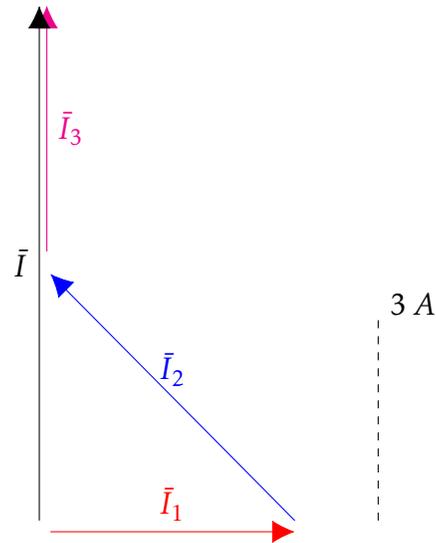


Figura 8.6: Diagramma fasoriale

Osservazioni conclusive ed errori frequenti

L'argomento dei fasori, cui corrisponde la fase iniziale nelle espressioni temporali delle sinusodi, va calcolato con attenzione. Si ricorda, infatti, che il risultato dell'operazione di *arcotangente*, così come viene eseguita con la calcolatrice, è compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

I numeri complessi (fasori) con parte reale negativa, invece, hanno argomento compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$: al risultato fornito dalla calcolatrice va sommato π , come nel caso in esame.

8.5 Metodo simbolico

La rete di figura 8.7 è in regime sinusoidale. E' nota la tensione impressa $e(t)$ e sono noti i valori di R , L e C riportati in tabella.

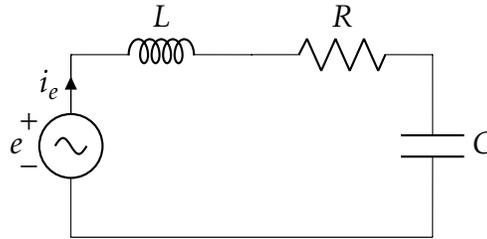


Figura 8.7: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$$e(t) = 400 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \quad R = 10 \, \Omega \quad L = 10 \, \text{mH} \quad C = 50 \, \mu\text{F}$$

Determinare:

- L'espressione temporale della corrente $i_e(t)$
- Il valore efficace della tensione di ciascuno dei bipoli passivi

Soluzione

L'esercizio viene risolto utilizzando la rappresentazione simbolica.

Il fasore corrispondente alla tensione impressa $e(t)$ è

$$\bar{E} = \frac{400}{\sqrt{2}} e^{j(\pi/4)} = \frac{400}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 200 + j200$$

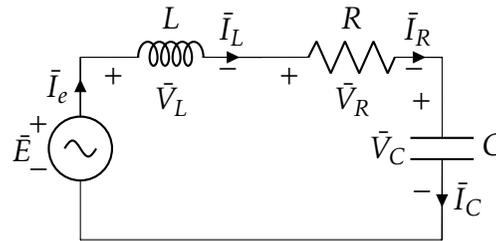


Figura 8.8: Rete simbolica

La legge di Kirchhoff per le tensioni in forma simbolica (LKTS) per l'unica maglia di figura 8.8 risulta

$$-\bar{E} + \bar{V}_L + \bar{V}_R + \bar{V}_C = 0$$

Esprimendo le tensioni dei bipoli per mezzo delle impedenze, la LKTS può essere riscritta come

$$-\bar{E} + \dot{Z}_L \cdot \bar{I}_L + \dot{Z}_R \cdot \bar{I}_R + \dot{Z}_C \cdot \bar{I}_C = 0$$

I bipoli sono in serie, per cui hanno la stessa corrente $\bar{I}_e = \bar{I}_L = \bar{I}_R = \bar{I}_C$, e quindi si ottiene

$$-\bar{E} + (\dot{Z}_L + \dot{Z}_R + \dot{Z}_C) \cdot \bar{I}_e = 0$$

Le reattanze induttiva e capacitiva valgono

$$X_L = \omega L = 10 \, \Omega \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = -20 \, \Omega$$

e quindi l'impedenza corrispondente alla serie di L , R e C risulta

$$\dot{Z}_s = R + jX_L + jX_C = 10 + j(10) + j(-20) = 10 - j10$$

La corrente \bar{I}_e risulta

$$\bar{I}_e = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_s} = \frac{200 + j200}{10 - j10} = 0 + j20 \quad I_e = |\bar{I}_e| = 20 \text{ A} \quad \alpha = \arg(\bar{I}_e) = \frac{\pi}{2} \quad [\alpha = 90^\circ]$$

a cui corrisponde l'espressione temporale

$$i_e(t) = I_e \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) = 20 \sqrt{2} \sin(1000 t + \pi/2) = 20 \sqrt{2} \cos(1000 t)$$

I fasori delle tensioni dei bipoli L , R e C ed i corrispondenti valori efficaci di seguito calcolato, sono riportati in figura 8.9.

$$\begin{aligned} \bar{V}_L &= \dot{Z}_L \cdot \bar{I}_e = jX_L \bar{I}_e = -200 + j0 & V_L &= 200 \text{ V} \\ \bar{V}_R &= \dot{Z}_R \cdot \bar{I}_e = R \bar{I}_e = 0 + j200 & V_R &= 200 \text{ V} \\ \bar{V}_C &= \dot{Z}_C \cdot \bar{I}_e = jX_C \bar{I}_e = 400 + j0 & V_C &= 400 \text{ V} \end{aligned}$$

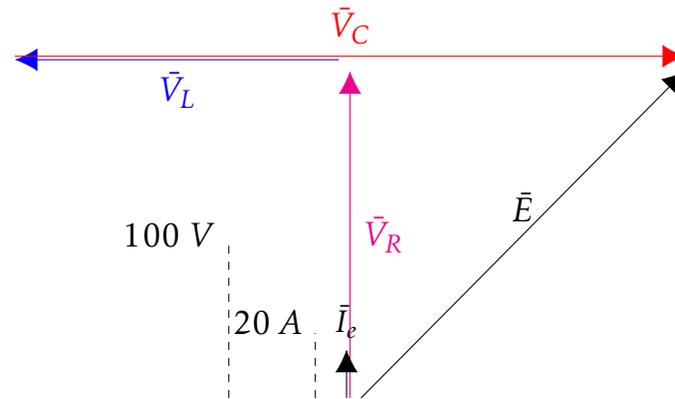


Figura 8.9: Diagramma fasoriale

Osservazioni

La corrente $i_e(t)$ può essere calcolata senza ricorrere alla rappresentazione simbolica, partendo dall'espressione di

$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha)$$

e dal calcolo del modulo e dell'argomento dell'impedenza $\dot{Z}_s = Z_s e^{j\varphi}$ dove

- $Z_s = |\dot{Z}_s|$ è il rapporto tra i moduli della tensione e della corrente
- $\varphi = \arg(\dot{Z}_s)$ è lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione

Si può quindi ricavare direttamente l'espressione della corrente come

$$i_e(t) = \frac{E_M}{Z_s} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Si noti che non c'è un solo modo per costruire il diagramma fasoriale. In figura 8.9 i fasori delle tensioni dei bipoli L , R e C sono riportati in ordine differente rispetto a prima. Ciò che ovviamente non cambia è lo sfasamento tra \bar{E} ed \bar{I}_e .

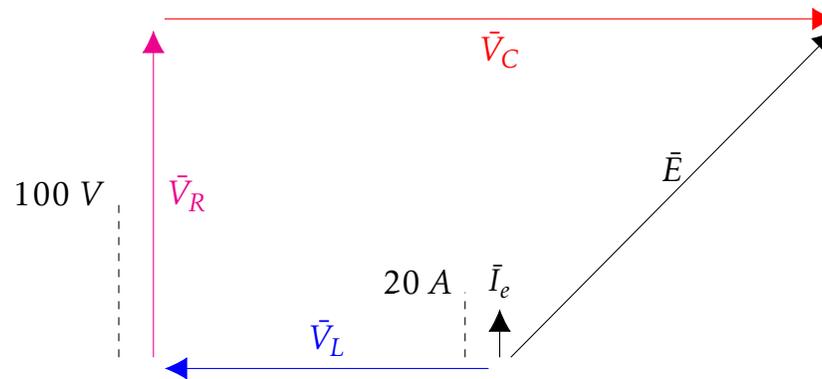


Figura 8.10: Diagramma fasoriale (seconda rappresentazione)

8.6 Metodo simbolico

La rete di figura 8.11 è in regime sinusoidale. Sono noti i valori della resistenza R , della capacità C e della corrente impressa $j(t)$.
Determinare le espressioni temporali delle correnti $i_R(t)$ ed $i_C(t)$.

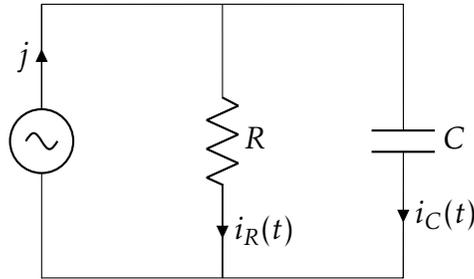


Figura 8.11: Rete elettrica in regime sinusoidale

$$j(t) = 10\sqrt{2}\sin(400t) \quad R = 25\Omega \quad C = 100\mu F$$

Soluzione

L'esercizio viene risolto utilizzando il metodo simbolico con riferimento alla rete rappresentata in figura 8.13

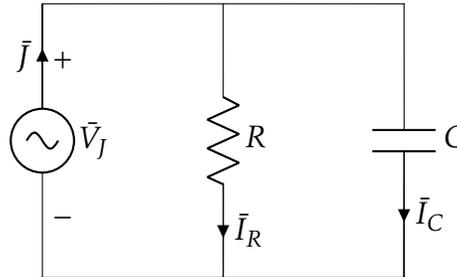


Figura 8.12: Rete simbolica

Si calcolano, innanzitutto, le ammettenze del condensatore e del resistore

$$\dot{Y}_C = jB_C = j\omega C = j0.04 \quad \dot{Y}_R = G = \frac{1}{R} = 0.04$$

L'ammettenza \dot{Y}_p corrispondente al parallelo di R e C è

$$\dot{Y}_p = G + jB_C = 0.04 + j0.04$$

con modulo ed argomento

$$Y_p = \sqrt{G^2 + B_C^2} = 0.04\sqrt{2} \quad \varphi' = \arctan\left(\frac{0.04}{0.04}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [\varphi' = 45^\circ]$$

Il fasore corrispondente alla corrente $j(t)$ vale

$$\bar{J} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0} = 10$$

Si possono ora ricavare i fasori delle correnti \bar{I}_R e \bar{I}_C applicando la formula del partitore di corrente alla rete simbolica di figura 8.13

$$\bar{I}_R = \frac{G}{\dot{Y}_p} \cdot \bar{J} = \frac{0.04}{0.04 + j0.04} \cdot 10 = 5 - j5 \quad I_R = 5\sqrt{2} \quad \beta_R = -\pi/4 \quad [\beta_R = -45^\circ]$$

$$\bar{I}_C = \frac{\dot{Y}_C}{\dot{Y}_p} \cdot \bar{J} = \frac{j0.04}{0.04 + j0.04} \cdot 10 = 5 + j5 \quad I_C = 5\sqrt{2} \quad \beta_C = +\pi/4 \quad [\beta_C = +45^\circ]$$

a cui corrispondono le espressioni temporali

$$i_R(t) = I_R \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_R) = 10 \sin(400t - \pi/4)$$

$$i_C(t) = I_C \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_C) = 10 \sin(400t + \pi/4)$$

Si può infine ricavare anche il fasore della tensione \bar{V}_J ai capi del generatore di corrente

$$\bar{V}_J = \frac{\bar{J}}{\dot{Y}_p} = \frac{10}{0.04 + j0.04} = 125 - j125 \quad V_J = 125\sqrt{2} \quad \alpha_J = -\pi/4 \quad [\alpha_J = -45^\circ]$$

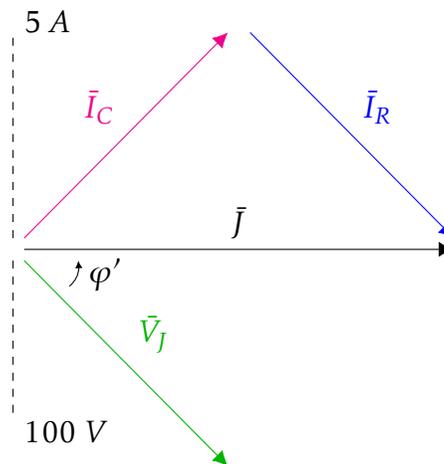


Figura 8.13: Diagramma fasoriale

8.7 Metodo simbolico: strumenti di misura ideali

La rete di figura 8.14 è in regime sinusoidale e di essa sono noti il valore della frequenza f del generatore ideale di tensione e le indicazioni degli strumenti ideali di misura

- amperometro a valore efficace: I_A
- voltmetro a valore efficace: V_V
- wattmetro a valore medio: P_W

1. Determinare i valori della resistenza R e dell'induttanza L .
2. Effettuare la sintesi dell'impedenza equivalente ai morsetti MN con uno schema serie $\dot{Z}_s = R_s + jX_s$.

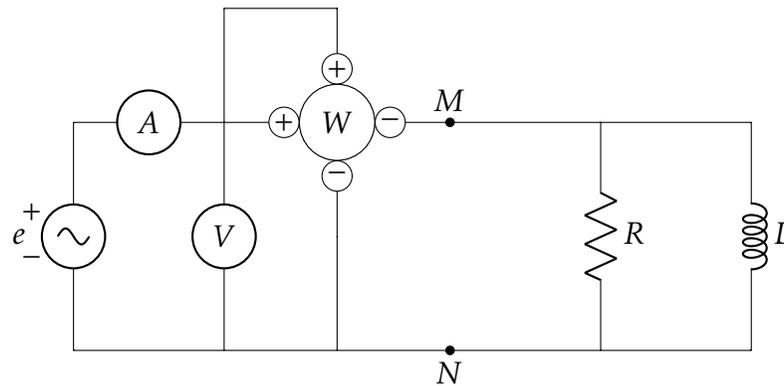


Figura 8.14: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$$f = 50 \text{ Hz} \quad I_A = 35 \text{ A} \quad V_V = 220 \text{ V} \quad P_W = 5 \text{ kW}$$

Soluzione

Si può quindi definire la rete simbolica di figura 8.15, opportunamente semplificata tenendo presente che gli strumenti di misura ideali rappresentano un'astrazione degli strumenti reali ed hanno le seguenti caratteristiche:

- voltmetro ideale: non assorbe corrente dai cordoni. Può essere sostituito con un lato aperto
- amperometro ideale: ha tensione nulla ai morsetti. Può essere sostituito con un cortocircuito
- wattmetro ideale: ha tensione nulla ai morsetti amperometrici e non assorbe corrente dai cordoni voltmetrici. Può essere sostituito con un cortocircuito in corrispondenza della misura amperometrica e un lato aperto in corrispondenza della misura voltmetrica

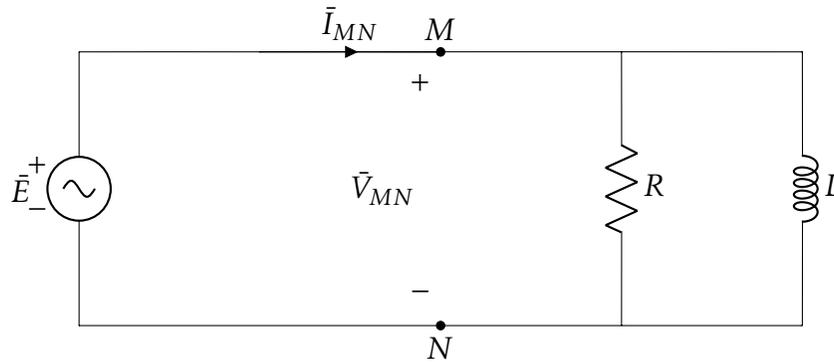


Figura 8.15: Rete simbolica

Combinando le misure degli strumenti ideali si ricavano la potenza apparente S_{MN} scambiata dall'impedenza collegata ai morsetti MN , la potenza attiva P_{MN} entrante nell'impedenza e il modulo dell'impedenza equivalente Z_{MN}

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{MN} = V_{MN} \cdot I_{MN} = V_V \cdot I_A = 7700 \text{ VA} \\ P_{MN} = P_W = 5 \text{ kW} \\ Z_{MN} = \frac{V_V}{I_A} = \frac{220}{35} = 6.285 \Omega \end{array} \right.$$

Si può quindi ricavare il modulo della potenza reattiva entrante nell'impedenza

$$|Q_{MN}| = \sqrt{S_{MN}^2 - P_{MN}^2} = \sqrt{7700^2 - 5000^2} = 5855.7 \text{ VAR}$$

In generale questa relazione non consente di conoscere il segno della potenza reattiva, ma in questo caso questo caso è nota la natura "ohmico-induttiva" dell'impedenza collegata ai morsetti MN e si ha dunque

$$Q_{MN} = +|Q_{MN}| = 5855.7 \text{ VAR}$$

La potenza attiva assorbita alla porta MN è interamente assorbita dal resistore R , mentre la potenza reattiva è interamente assorbita dall'induttore L , che hanno la stessa tensione (in valore efficace, $V_{MN} = V_V$)

$$P_R = P_{MN} = \frac{V_V^2}{R} \quad Q_L = Q_{MN} = \frac{V_V^2}{X_L}$$

e quindi

$$R = \frac{V_V^2}{P_{MN}} = 9.68 \Omega \quad X_L = \frac{V_V^2}{Q_{MN}} = 8.266$$

Essendo noto il valore della reattanza induttiva $X_L = \omega L$ e della frequenza f , si può calcolare il valore dell'induttanza

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = 26.31 \text{ mH}$$

Per effettuare la sintesi di impedenza, ovvero rappresentare l'impedenza equivalente ai morsetti MN con $\dot{Z}_s = R_s + jX_s$, può essere utile passare per la definizione di potenza complessa

$$\dot{S}_{MN} = P_{MN} + jQ_{MN} = \bar{V}_{MN} \cdot (\bar{I}_{MN})^* = (\dot{Z}_s \cdot \bar{I}_{MN}) \cdot (\bar{I}_{MN})^* = \dot{Z}_s \cdot I_{MN}^2 = (R_s + jX_s) \cdot I_{MN}^2$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria nella seconda ed ultima espressione, si ottiene

$$\begin{cases} R_s = \frac{P_{MN}}{I_{MN}^2} = \frac{P_{MN}}{I_A^2} = \frac{5000}{35^2} = 4.081 \Omega \\ X_s = \frac{Q_{MN}}{I_{MN}^2} = \frac{Q_{MN}}{I_A^2} = \frac{5855.7}{35^2} = 4.78 \Omega \end{cases}$$

8.8 Metodo simbolico: risonanza parallelo

La rete è in regime sinusoidale e di essa sono noti i valori di L_1 , L_2 e C_1 e la tensione impressa impressa $e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)$.
Calcolare la potenza reattiva entrante in L_1 e C_1 .

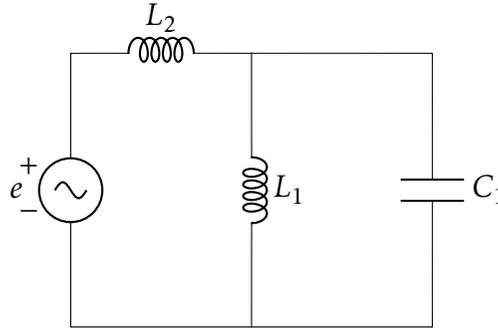


Figura 8.16: Rete elettrica in regime sinusoidale

$$E_M = 400 \text{ V} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \omega = 10^3 \text{ rad/s} \quad L_1 = 100 \text{ mH} \quad L_2 = 25 \text{ mH} \quad C_1 = 10 \text{ } \mu\text{F}$$

Soluzione

L'esercizio viene risolto utilizzando il metodo simbolico con riferimento alla rete rappresentata in figura 8.17

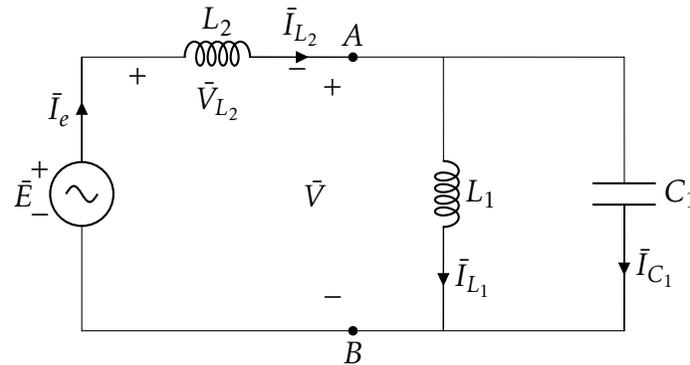


Figura 8.17: Rete elettrica in regime sinusoidale

Innanzitutto viene ricavato il fasore corrispondente alla tensione impressa $e(t)$

$$\bar{E} = \frac{400}{\sqrt{2}} e^{j(\pi/4 + \pi/2)} = \frac{400}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -200 + j200$$

e i valori delle reattanze

$$X_{L2} = \omega L_2 = 25 \Omega \quad X_{L1} = \omega L_1 = 100 \Omega \quad X_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} = -100 \Omega$$

Si noti come alla pulsazione $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ si ha una risonanza parallelo, con $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, per cui risulta

$$\dot{Y}_p = \dot{Y}_{L1} + \dot{Y}_{C1} = jB_{L1} + jB_{C1} = j\left(-\frac{1}{X_{L1}}\right) + j\left(-\frac{1}{X_{C1}}\right) = 0$$

Questa condizione impone che sia nulla la corrente \bar{I}_{L2} , dato che per qualunque valore di tensione \bar{V} si ha

$$\bar{I}_{L2} = \bar{V} \cdot \dot{Y}_p = 0$$

da cui si ottiene

$$\vec{V} = \vec{E} - \vec{V}_{L_2} = \vec{E} - \dot{Z}_{L_2} \cdot \vec{I}_{L_2} = \vec{E} = -200 + j200$$

Si possono ora ricavare i fasori delle correnti I_{L_1} e I_{C_1} (uguali ed opposte, vista la condizione di risonanza parallelo)

$$\vec{I}_{L_1} = \frac{\vec{V}}{\dot{Z}_{L_1}} = \frac{-200 + j200}{j100} = 2 + j2 \quad I_{L_1} = 2\sqrt{2} \quad \beta_{L_1} = \pi/4 \quad [\beta_{L_1} = +45^\circ]$$

$$\vec{I}_{C_1} = \frac{\vec{V}}{\dot{Z}_{C_1}} = \frac{-200 + j200}{-j100} = -2 - j2 \quad I_{C_1} = 2\sqrt{2} \quad \beta_{C_1} = 3\pi/4 \quad [\beta_{C_1} = 135^\circ]$$

In figura 8.18 è riportato il corrispondente diagramma fasoriale, da cui risulta evidente che la corrente del condensatore \vec{I}_{C_1} è in quadratura in anticipo sulla tensione \vec{E} e la corrente dell'induttore \vec{I}_{L_1} è in quadratura in ritardo.

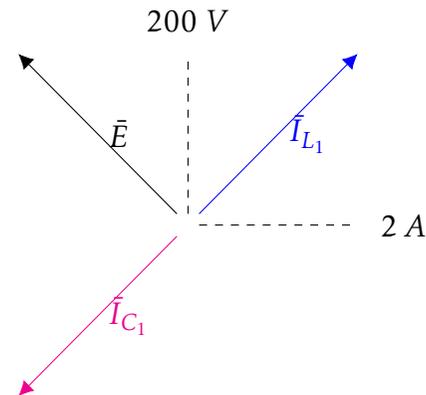


Figura 8.18: Diagramma fasoriale

Infine si possono calcolare le potenze reattive Q_{L_1} e Q_{C_1} (uguali ed opposte, vista la condizione di risonanza parallelo)

$$Q_{L_1} = X_{L_1} \cdot I_{L_1}^2 = 100 \cdot (2\sqrt{2})^2 = 800 \text{ VAR}$$

$$Q_{C_1} = X_{C_1} \cdot I_{C_1}^2 = -100 \cdot (2\sqrt{2})^2 = -800 \text{ VAR}$$

8.9 Rifasamento del carico

La rete di figura 8.19 è in regime sinusoidale. Sono noti il valore della pulsazione ω della tensione impressa e le indicazioni degli strumenti ideali (amperometro a valore efficace, voltmetro a valore efficace, wattmetro a valore medio).

È noto inoltre che il carico, rappresentato dal bipolo collegato ai morsetti MN , è di tipo ohmico-induttivo.

1. Rappresentare l'impedenza equivalente ai morsetti MN con uno schema serie $\dot{Z}_L = R_L + jX_L$
2. Calcolare il valore della capacità del condensatore di rifasamento da porre in parallelo al carico per ottenere un fattore di potenza pari a 0.9
3. Calcolare il valore della capacità del condensatore di rifasamento da porre in parallelo al carico per per ottenere un fattore di potenza pari a 1 (rifasamento "completo")

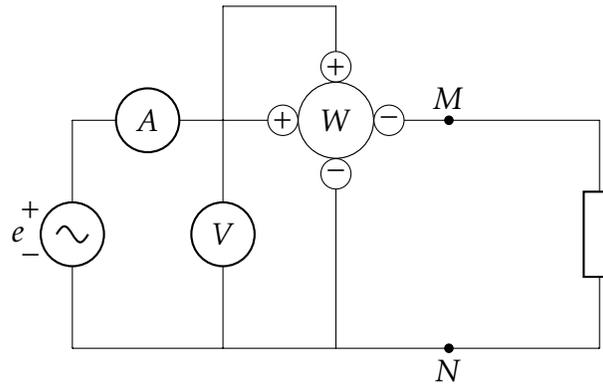


Figura 8.19: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$$\omega = 100 \text{ rad/s} \quad I_A = 10 \text{ A} \quad U_V = 500 \text{ V} \quad P_W = 3 \text{ kW}$$

Soluzione

Dall'indicazione del voltmetro e dell'amperometro si ricavano la potenza apparente S_{MN} scambiata alla porta MN e il modulo dell'impedenza Z_L

$$S_{MN} = U_V \cdot I_A = 5000 \text{ VA}$$

$$Z_L = \frac{U_V}{I_A} = \frac{500}{10} = 50 \Omega$$

Dalla potenza apparente S_{MN} e dalla potenza attiva ($P_{MN} = P_W$) si possono ricavare il fattore di potenza del carico

$$\cos \varphi = \frac{P_{MN}}{S_{MN}} = \frac{3000}{5000} = 0.6$$

ed il modulo della potenza reattiva Q_{MN} scambiata alla porta MN

$$|Q_{MN}| = \sqrt{S_{MN}^2 - P_{MN}^2} = \sqrt{5000^2 - 3000^2} = 4000 \text{ VAR}$$

Essendo il carico ohmico-induttivo si ha

$$Q_{MN} = +|Q_{MN}| = +4000 \text{ VAR}$$

La sintesi serie dell'impedenza \dot{Z}_s porta a

$$\begin{cases} R_L = Z_L \cdot \cos \varphi = 50 \cdot 0.6 = 30 \Omega \\ X_L = Z_L \cdot \sin \varphi = 50 \cdot 0.8 = 40 \Omega \end{cases}$$

$$\text{essendo } \sin \varphi = \frac{Q_{MN}}{S_{MN}} = \frac{4000}{5000} = 0.8$$

Per rifasare il carico, si pone in parallelo un condensatore come in figura 8.20). Per determinare il valore della capacità C , basta considerare che l'impedenza \dot{Z}_C assorbe solo potenza reattiva $Q_C = V_{MN}^2/X_C$ e, quindi, la totale potenza attiva P' e reattiva sono Q' entranti nel bipolo costituito dal parallelo di \dot{Z}_L e \dot{Z}_C sono

$$\begin{cases} P' = P \\ Q' = Q + Q_C \end{cases}$$

Sapendo che il carico va rifasato a $\cos \varphi' = 0.9$, si ricava il valore di potenza reattiva Q' corrispondente, secondo la relazione

$$Q' = P' \cdot \tan \varphi' = P \cdot \tan(\arccos(0.9)) = 3000 \cdot 0.4843 = 1.453 \text{ kVAR}$$

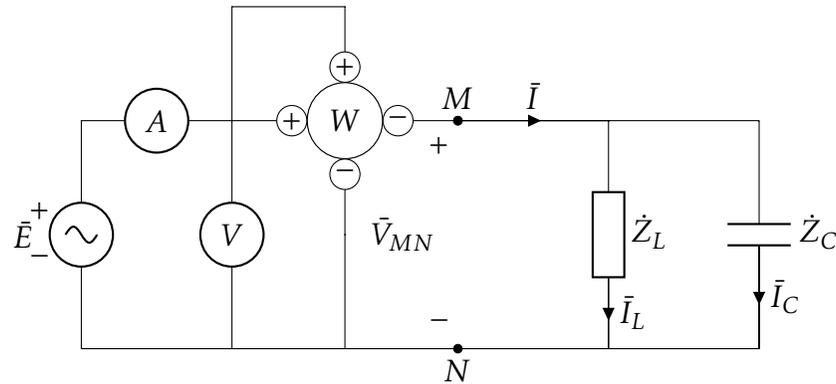


Figura 8.20: Rete simbolica: rifasamento del carico

La potenza reattiva Q_C assorbita dal condensatore vale, dunque

$$Q_C = Q' - Q = 1453 - 4000 = -2547 \text{ VAR}$$

ed il valore della rettanza capacitiva X_C è

$$X_C = \frac{V_V^2}{Q_C} = \frac{500^2}{-2548} = -98.16 \Omega$$

da cui si ottiene, infine, il valore della capacità

$$C = -\frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{100 \cdot 98.16} = 101.89 \mu\text{F}$$

Si possono quindi ricavare i fasori \bar{V}_{MN} , \bar{I}_A , \bar{I}_L , \bar{I}_C riportati nel diagramma fasoriale di figura 8.21. Dato che non è nota la fase iniziale della tensione $e(t)$, possiamo assumerla arbitrariamente pari a zero ($\alpha = 0$) e ricavare di conseguenza tutti i fasori:

$$\bar{V}_{MN} = \bar{E} = Ee^{j\alpha} = V_V e^{j0} = 500 + j0$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_{MN}}{\bar{Z}_L} = 6 - j8$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{MN}}{\bar{Z}_C} = j5.096$$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_L + \bar{I}_C = 6 - j2.904$$

Per ottenere $\cos \varphi' = 1$ (rifasamento “completo”) la potenza reattiva Q_C assorbita dal condensatore deve eguagliare, in modulo, la potenza reattiva assorbita dal carico

$$Q_C = -Q = -4000 \text{ VAR}$$

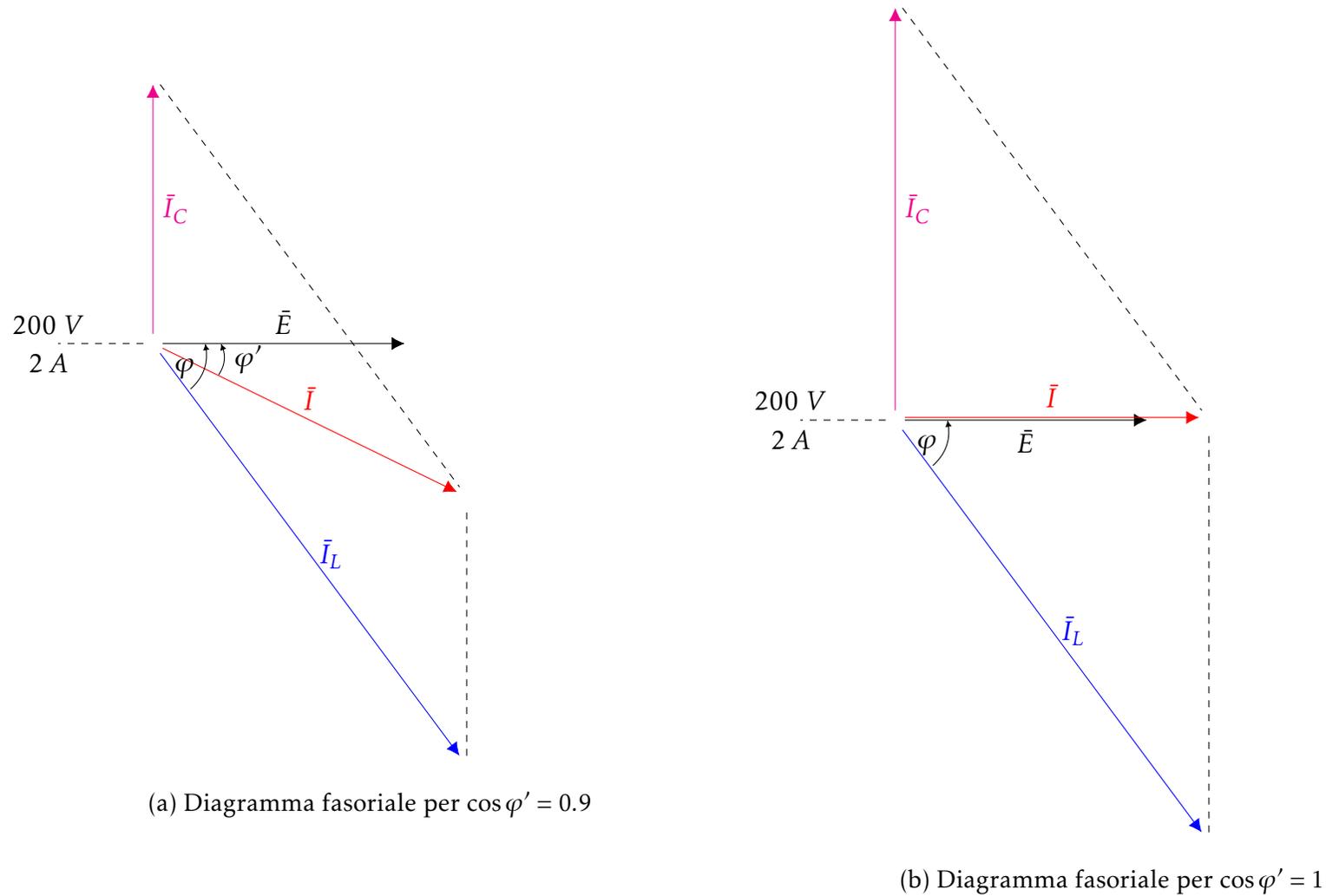
In questo caso la rettanza capacitiva X_C e la capacità C valgono, rispettivamente

$$X_C = \frac{V_V^2}{Q_C} = -62.5 \Omega \quad C = -\frac{1}{\omega X_C} = 160 \mu\text{F}$$

I fasori \bar{E} e \bar{I}_L restano immutati, mentre \bar{I}_C ed \bar{I} divengono

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_C} = 0 + j8$$

$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_C = 6 + j0$$

Figura 8.21: Diagramma fasoriale di \vec{E} , \vec{I} , \vec{I}_L , \vec{I}_C

8.10 Generatori equivalenti simbolici

La rete di figura 8.22 è in regime sinusoidale. E' nota la tensione impressa $e(t)$ ed i valori di tutti i parametri riportati in tabella.

Calcolare i parametri dei generatori equivalenti simbolici ai morsetti AB

1. Thèvenin: $\bar{E}_{eq}, \dot{Z}_{eq}$
2. Norton: $\bar{J}_{eq}, \dot{Y}_{eq}$

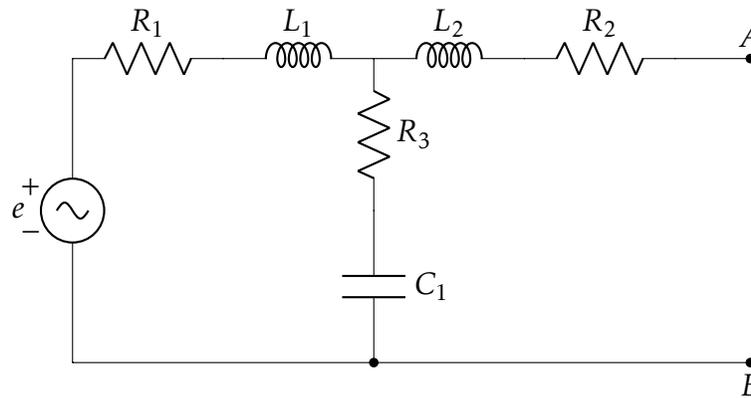


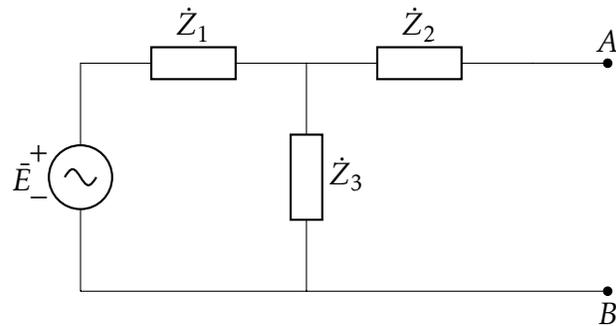
Figura 8.22: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$$e(t) = 200 \sin(1000t + \pi/4) \quad R_1 = 20 \, \Omega \quad R_2 = 5 \, \Omega \quad R_3 = 10 \, \Omega \quad L_1 = 10 \, \text{mH} \quad L_2 = 25 \, \text{mH} \quad C_1 = 50 \, \mu\text{F}$$

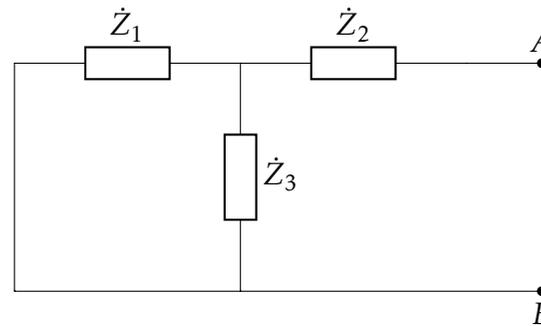
Soluzione

Ala rete di figura 8.22 viene associata la rete simbolica di figura 8.23a dove il fasore \bar{E} e le impedenze valgono

$$\bar{E} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = \frac{200}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 100 + j100 \quad \begin{cases} \dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} = 20 + j10 \\ \dot{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2} = 5 + j25 \\ \dot{Z}_3 = R_3 + jX_{C_1} = 10 - j20 \end{cases}$$



(a) Rete simbolica



(b) Rete simbolica inerte

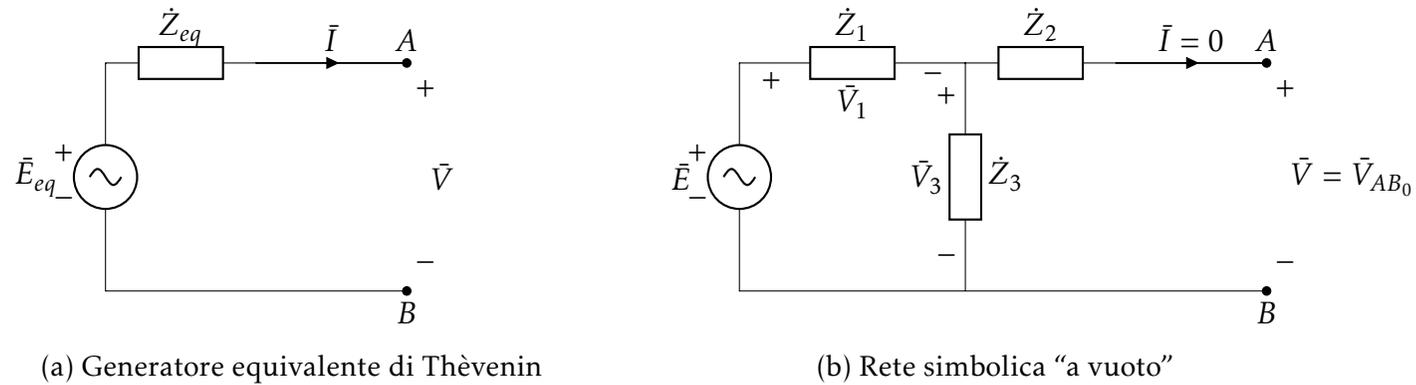
Figura 8.23

Per determinare l'impedenza \dot{Z}_{eq} del generatore equivalente di Thevenin (ammettenza \dot{Y}_{eq} del generatore equivalente di Norton) è necessario rendere inerte la rete simbolica, sostituendo il generatore ideale di tensione con un cortocircuito come in figura 8.23b.

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = 20 + j20 \quad \dot{Y}_{eq} = \frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{20 + j20} = (25 - j25) \cdot 10^{-3}$$

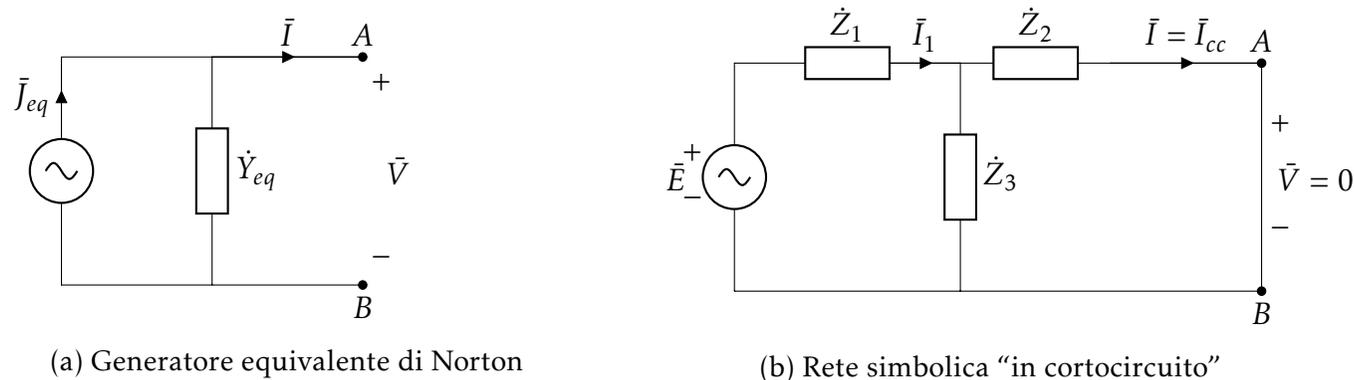
La tensione impressa \bar{E}_{eq} del generatore equivalente di Thèvenin di figura 8.24a corrisponde alla tensione a vuoto \bar{V}_{AB_0} di figura 8.24b e si può calcolare applicando la formula del partitore di tensione simbolico

$$\bar{E}_{eq} = \bar{V}_{AB_0} = \bar{V}_3 = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = 100$$


 Figura 8.24: Calcolo della \bar{E}_{eq} del generatore equivalente di Thevenin simbolico

La corrente impressa \bar{J}_{eq} del generatore equivalente di Norton di figura 8.25a corrisponde alla corrente di cortocircuito \bar{I}_{cc} di figura 8.25b e si può calcolare applicando la formula del partitore di corrente simbolico

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 // \dot{Z}_3} = 2 + j1.5 \quad \Rightarrow \quad \bar{J}_{eq} = \bar{I}_1 \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = 2.5 - j2.5$$


 Figura 8.25: Calcolo della \bar{J}_{eq} del generatore equivalente di Norton simbolico

8.11 Generatori equivalenti simbolici

La rete elettrica di figura 8.26 è in regime sinusoidale. Sono note la tensione impressa dal generatori ideale di tensione $e(t)$, la corrente impressa dal generatori ideale di corrente $j(t)$ ed i parametri dei bipoli ideali riportati in tabella.

Calcolare i parametri dei generatori equivalenti simbolici ai morsetti AB

1. Thèvenin: $\bar{E}_{eq}, \dot{Z}_{eq}$

2. Norton: $\bar{J}_{eq}, \dot{Y}_{eq}$

Determinare inoltre la corrente $i(t)$ quando alla porta AB è collegata l'impedenza \dot{Z}_L .

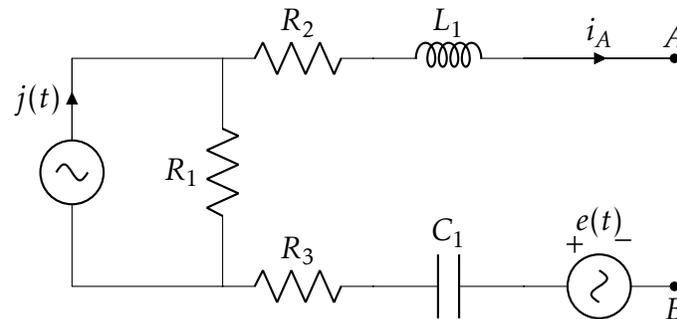


Figura 8.26: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$$j(t) = 4 \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad e(t) = 160 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 3 \Omega \quad R_3 = 2 \Omega \quad L_1 = 15 \text{ mH} \quad C_1 = 100 \mu\text{F} \quad \dot{Z}_L = 5 - j15$$

Soluzione

Per determinare l'impedenza \dot{Z}_{eq} (ammettenza \dot{Y}_{eq}) dei generatori equivalenti di Thevenin (Norton), nella rete simbolica di figura 8.27 è necessario sostituire il generatore di tensione con un cortocircuito e il generatore di corrente impressa con un lato aperto.

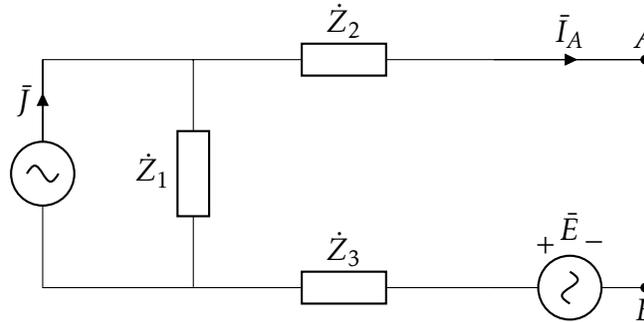


Figura 8.27: Rete simbolica

Le impedenze indicate in figura valgono $\dot{Z}_1 = R_1 = 10$, $\dot{Z}_2 = R_2 + jX_{L_1} = 3 + j15$, $Z_3 = R_3 + jX_{C_1} = 2 - j10$ e i fasori corrispondenti alla tensione $e(t)$ ed alla corrente impressa $j(t)$ valgono, rispettivamente

$$\bar{E} = \frac{160}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 80 - j80$$

$$\bar{j} = j4$$

L'impedenza \dot{Z}_{eq} del generatore simbolico di Thevenin, pari all'impedenza interna \dot{Z}_i della rete alla porta AB, risulta

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = 15 + j5$$

e l'ammettenza \dot{Y}_{eq} del generatore simbolico di Norton è

$$\dot{Y}_{eq} = \frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{15 + j5} = (60 - j20) \cdot 10^{-3}$$

La tensione simbolica \bar{E}_{eq} del generatore di Thevenin, pari al fasore della tensione a vuoto \bar{V}_{AB0} alla porta AB, risulta

$$\bar{E}_{eq} = \bar{V}_{AB0} = R_1 \cdot \bar{J} + \bar{E} = 80 - j40$$

con modulo e argomento paria a

$$V_{AB0} = |\bar{V}_{AB0}| = 40 \sqrt{5} = 89.442 \text{ V} \quad \alpha = \arg(\bar{I}_1) = -0.4636 \quad [\alpha = -26.57^\circ]$$

a cui corrisponde l'espressione temporale:

$$e_{eq}(t) = (40 \sqrt{5}) \sqrt{2} \sin(1000t - 0.4636) = 126.49 \sin(1000t - 0.4636)$$

La corrente impressa simbolica \bar{J}_{eq} del generatore di Norton è pari al fasore della corrente di cortocircuito \bar{I}_{cc} alla porta AB che può essere ricavata per via diretta, ad esempio applicando la sovrapposizione degli effetti

$$\bar{J}_{eq} = \bar{J} \cdot \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} + \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = j4 \cdot \frac{10}{15 + j5} + \frac{80 - j80}{15 + j5} = 4 - j4$$

Il primo termine corrisponde al partitore di corrente simbolico quando agisce solo \bar{J} e il secondo alla corrente che circola quando agisce solo \bar{E} . Si può ottenere la stessa espressione, calcolando la corrente di cortocircuito sulla maglia che si ottiene sostituendo al GACS (\bar{J}_1, \dot{Z}_1) il corrispondente GATS ($\bar{E}_{J_1} = \bar{J}_1 \cdot \dot{Z}_1, \dot{Z}_1$).

Per verifica, si può calcolare la \bar{J}_{eq} sfruttando le relazioni che valgono tra i parametri degli schemi di Thèvenin e Norton

$$\bar{J}_{eq} = \bar{I}_{cc} = \frac{\bar{E}_{eq}}{\dot{Z}_{eq}} = 4 - j4$$

con modulo e argomento paria a

$$J_{eq} = |\bar{J}_{eq}| = 4 \sqrt{2} \text{ A} \quad \alpha = \arg(\bar{J}_{eq}) = -\pi/4 \quad [\alpha = -45^\circ]$$

a cui corrisponde l'espressione temporale:

$$j_{eq}(t) = 8 \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right)$$

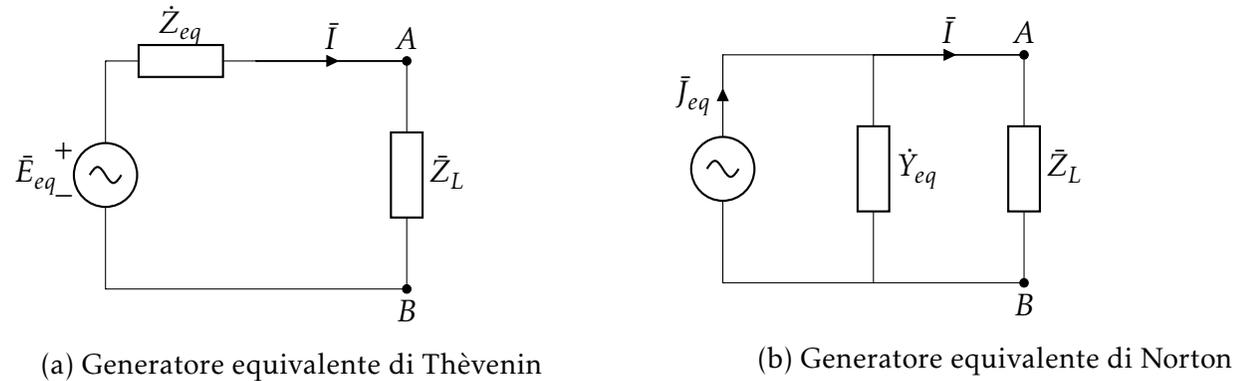


Figura 8.28: Calcolo della \bar{I} con i generatori equivalenti simbolici

Facendo ricorso ai generatori di Thevenin e di Norton equivalenti alla porta AB alla rete assegnata, si ricava l'espressione della corrente quando alla porta AB è collegata l'impedenza \bar{Z}_L come in figura 8.28.

Utilizzando il partitore di corrente, nello schema di Norton, si ha

$$\bar{I} = \frac{\dot{Y}_L}{\dot{Y}_{eq} + \dot{Y}_L} \bar{J}_{eq} = 4$$

con modulo e argomento paria a

$$I = |\bar{I}| = 4A \quad \alpha = \arg(\bar{I}) = 0 \quad [\alpha = 0^\circ]$$

Antitrasformando il fasore \bar{I} , si ricava l'espressione temporale della corrente alla porta AB quando è collegata l'impedenza \bar{Z}_L

$$i(t) = 4 \sqrt{2} \sin(1000t)$$

8.12 Metodi di analisi delle reti simboliche

La rete elettrica di figura 8.31 è in regime sinusoidale. Sono note le tensioni impresse dei generatori ideali di tensione $e_1(t)$, $e_2(t)$ ed i parametri dei bipoli ideali riportati in tabella.

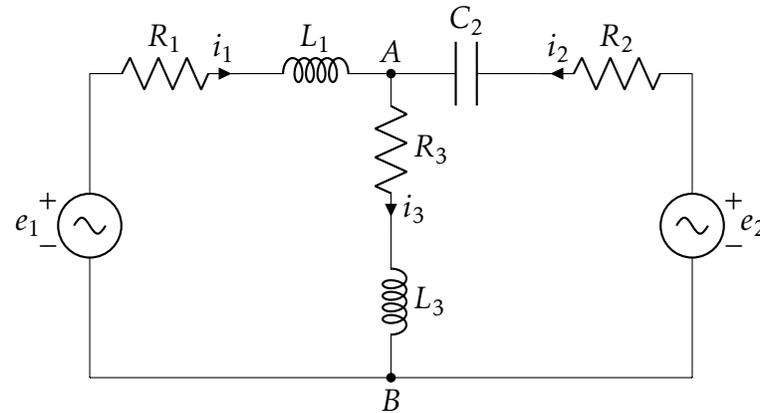


Figura 8.29: Rete elettrica in regime sinusoidale.

$e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t) \text{ V}$	$L_1 = 30 \text{ mH}$	$C_2 = 50 \mu\text{F}$	$L_3 = 10 \text{ mH}$
$e_2(t) = 200 \sin(1000t + \pi/4) \text{ V}$	$R_1 = 10 \Omega$	$R_2 = 10 \Omega$	$R_3 = 20 \Omega$

Determinare

1. L'espressione temporale della tensione $v_{AB}(t)$
2. L'espressione temporale delle correnti $i_1(t)$, $i_2(t)$ ed $i_3(t)$ con i riferimenti di figura

Soluzione

L'esercizio viene risolto applicando i principali metodi di analisi delle reti simboliche alla rete di figura 8.30 costituita da due generatori affini di tensione (\bar{E}_1, \dot{Z}_1) e (\bar{E}_2, \dot{Z}_2) e da \dot{Z}_3 :

1. Leggi di Kirchhoff (LKTS, LKCS)
2. Correnti di anello
3. Potenziali nodali
4. Sovrapposizione degli effetti

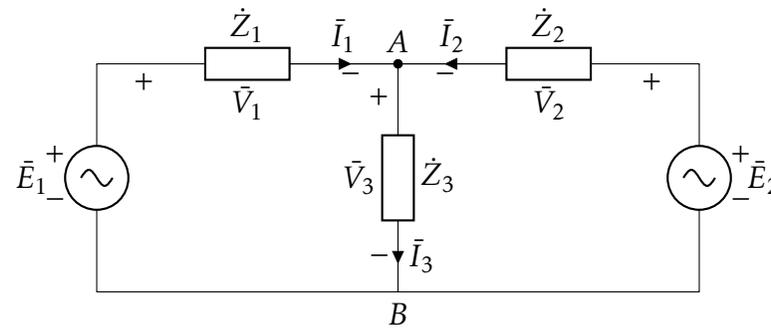


Figura 8.30: Rete simbolica

Prima di affrontare lo studio della rete con i diversi metodi, conviene ricavare le espressioni delle grandezze simboliche della rete:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_1 = 100e^{j0} = 100 \\ \bar{E}_2 = \frac{200}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4} = \frac{200}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 100 + j100 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 10 + j30 \\ \dot{Z}_2 = R_2 + jX_{C2} = 10 - j20 \\ \dot{Z}_3 = R_3 + jX_{L3} = 20 + j10 \end{array} \right.$$

1. Leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff in forma simbolica per le tensioni e le correnti portano a scrivere il seguente sistema di tre equazioni, le prime due ottenute applicando la LKTS alle maglie $(\bar{E}_1, \dot{Z}_1, \dot{Z}_3; \bar{E}_2, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3)$, la terza applicando la LKCS al nodo A (B).

$$\begin{cases} \bar{V}_1 + \bar{V}_3 - \bar{E}_1 = 0 \\ \bar{V}_2 + \bar{V}_3 - \bar{E}_2 = 0 \\ \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_3 \end{cases}$$

Le prime due equazioni possono essere riscritte utilizzando le relazioni $\bar{V}_k = \dot{Z}_k \cdot \bar{I}_k$ ($k = 1, \dots, 3$) e $\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$,

$$\begin{cases} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3) \cdot \bar{I}_1 + \dot{Z}_3 \cdot \bar{I}_2 = \bar{E}_1 \\ \dot{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 + (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) \cdot \bar{I}_2 = \bar{E}_2 \end{cases}$$

che ha per soluzione

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = -j4 & & I_1 = |\bar{I}_1| = 4A & & \beta_1 = \arg(\bar{I}_1) = -\frac{\pi}{2} & [\beta_1 = -90^\circ] \\ \bar{I}_2 = +j6 & & I_2 = |\bar{I}_2| = 6A & & \beta_2 = \arg(\bar{I}_2) = +\frac{\pi}{2} & [\beta_2 = +90^\circ] \end{aligned}$$

A questo punto è immediato ricavare il valore di \bar{I}_3 e di \bar{V}_{AB}

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = +j2 & & I_3 = |\bar{I}_3| = 2A & & \beta_3 = \arg(\bar{I}_3) = +\frac{\pi}{2} & [\beta_3 = +90^\circ] \\ \bar{V}_{AB} = \dot{Z}_3 \cdot \bar{I}_3 = -20 + j40 & & V_{AB} = |\bar{V}_{AB}| = 20\sqrt{5} = 44.72V & & \alpha = \arg(\bar{I}_3) = 2.034 & [\alpha = 116.57^\circ] \end{aligned}$$

Le espressioni temporali corrispondenti ai fasori delle correnti $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ e della tensione \bar{V}_{AB} valgono, rispettivamente

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 4\sqrt{2}\sin(1000t - \pi/2) = -4\sqrt{2}\cos(1000t) \\ i_2(t) &= 6\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/2) = 6\sqrt{2}\cos(1000t) \\ i_3(t) &= 2\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/2) = 2\sqrt{2}\cos(1000t) \\ v_{AB}(t) &= (20\sqrt{5})\sqrt{2}\sin(1000t + 2.034) = 63.25\sin(1000t + 2.034) \end{aligned}$$

In figura 8.31 è riportato il diagramma fasoriale relativo alla soluzione della rete in forma simbolica.

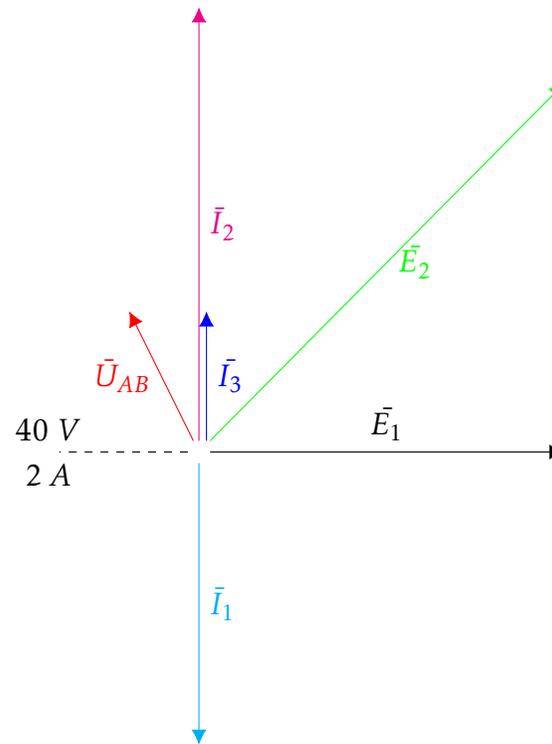


Figura 8.31: Diagramma fasoriale

2. Correnti di anello

Alla rete simbolica, che comprende solo generatori ideali di tensione (GITS) ed impedenze, si può applicare il metodo delle correnti di anello, definendo le correnti \bar{K}_1, \bar{K}_2 con lo stesso verso di percorrenza degli anelli (orario) come riportato in figura 8.36.

Si ottiene pertanto il seguente sistema di due equazioni nelle due correnti di anello \bar{K}_1, \bar{K}_2

$$\begin{cases} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3) \cdot \bar{K}_1 - \dot{Z}_3 \cdot \bar{K}_2 = \bar{E}_1 \\ (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) \cdot \bar{K}_2 - \dot{Z}_3 \cdot \bar{K}_1 = -\bar{E}_2 \end{cases}$$

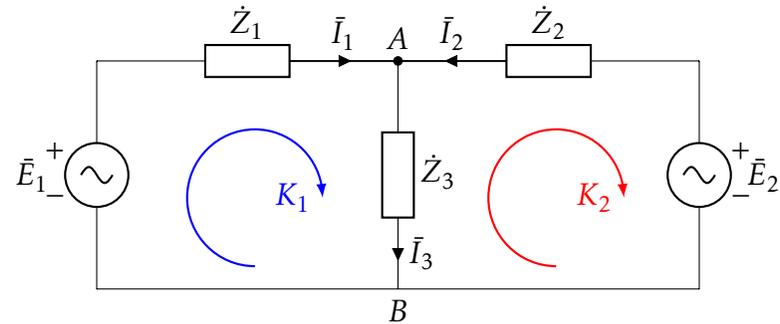


Figura 8.32: Rete simbolica: correnti di anello

che ha per soluzione

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= -j4 & I_1 = |\bar{I}_1| &= 4A & \beta_1 = \arg(\bar{I}_1) &= -\frac{\pi}{2} \quad [\beta_1 = -90^\circ] \\ \bar{K}_2 &= -j6 & I_2 = |\bar{I}_2| &= 6A & \beta_2 = \arg(\bar{I}_1) &= +\frac{\pi}{2} \quad [\beta_2 = +90^\circ] \end{aligned}$$

per mezzo delle quali è possibile esprimere i fasori delle correnti $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{K}_1 = -j4 \\ \bar{I}_2 &= -\bar{K}_2 = +j6 \\ \bar{I}_3 &= \bar{K}_1 - \bar{K}_2 = -j4 + j6 = +j2 \end{aligned}$$

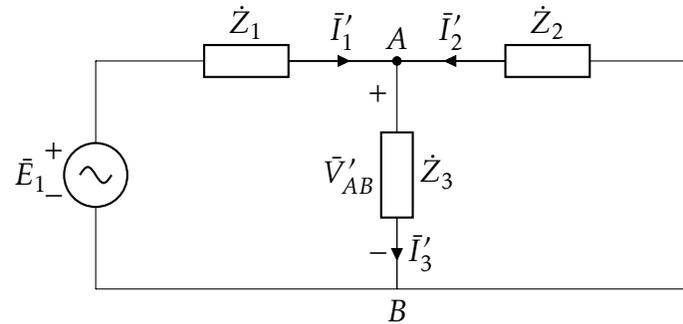
Per calcolare \bar{V}_{AB} e le espressioni temporali corrispondenti ai fasori $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ e \bar{V}_{AB} si procede come visto in precedenza.

3. Sovrapposizione degli effetti

Si fa agire, inizialmente, il solo generatore \bar{E}_1 come riportato in figura 8.33

Definita l'impedenza \bar{Z}' come

$$\bar{Z}' = \bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 25 + j25$$

Figura 8.33: Rete simbolica: sovrapposizione degli effetti (solo \bar{E}_1)

per il fasore \bar{I}'_1 , si ha

$$\bar{I}'_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}'} = 2 - j2$$

da cui si possono ottenere i fasori \bar{I}'_2 e \bar{I}'_3 con la formula del partitore di corrente simbolico

$$\bar{I}'_2 = -\bar{I}'_1 \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = -2$$

$$\bar{I}'_3 = \bar{I}'_1 \cdot \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = -j2$$

La tensione \bar{V}'_{AB} vale, pertanto

$$\bar{V}'_{AB} = \dot{Z}_3 \cdot \bar{I}'_3 = 20 - j40$$

Si procede, ora, in modo analogo, facendo agire il solo generatore \bar{E}_2 , come illustrato in figura 8.34. Definita l'impedenza \dot{Z}'' come:

$$\dot{Z}'' = \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = 20 + j10$$

per il fasore \bar{I}''_2 si ha

$$\bar{I}''_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}''} = 2 + j6$$

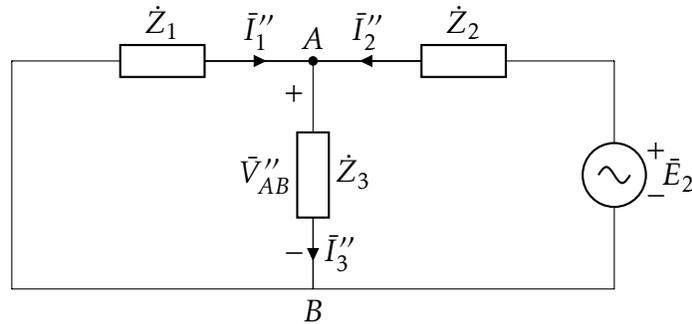


Figura 8.34: Rete simbolica: sovrapposizione degli effetti (solo \bar{E}_1)

da cui si possono ottenere i fasori \bar{I}_1'' e \bar{I}_3'' con la formula del partitore di corrente simbolico

$$\bar{I}_1'' = -\bar{I}_2'' \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = -2 - j2$$

$$\bar{I}_3'' = \bar{I}_2'' \cdot \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = +j4$$

La tensione \bar{V}_{AB}'' vale, pertanto

$$\bar{V}_{AB}'' = \dot{Z}_3 \bar{I}_3'' = -40 + j80$$

Si possono ora ricavare i fasori \bar{I}_1 , \bar{I}_2 , \bar{I}_3 e \bar{V}_{AB} , applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' = -j4$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' = +j6$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' = +j2$$

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_{AB}' + \bar{V}_{AB}'' = -20 + j40$$

In figura 8.35 è riportato il diagramma fasoriale relativo alla soluzione della rete mediante sovrapposizione degli effetti. Le espressioni temporali corrispondenti ai fasori \bar{I}_1 , \bar{I}_2 , \bar{I}_3 e \bar{V}_{AB} si calcolano come visto in precedenza.

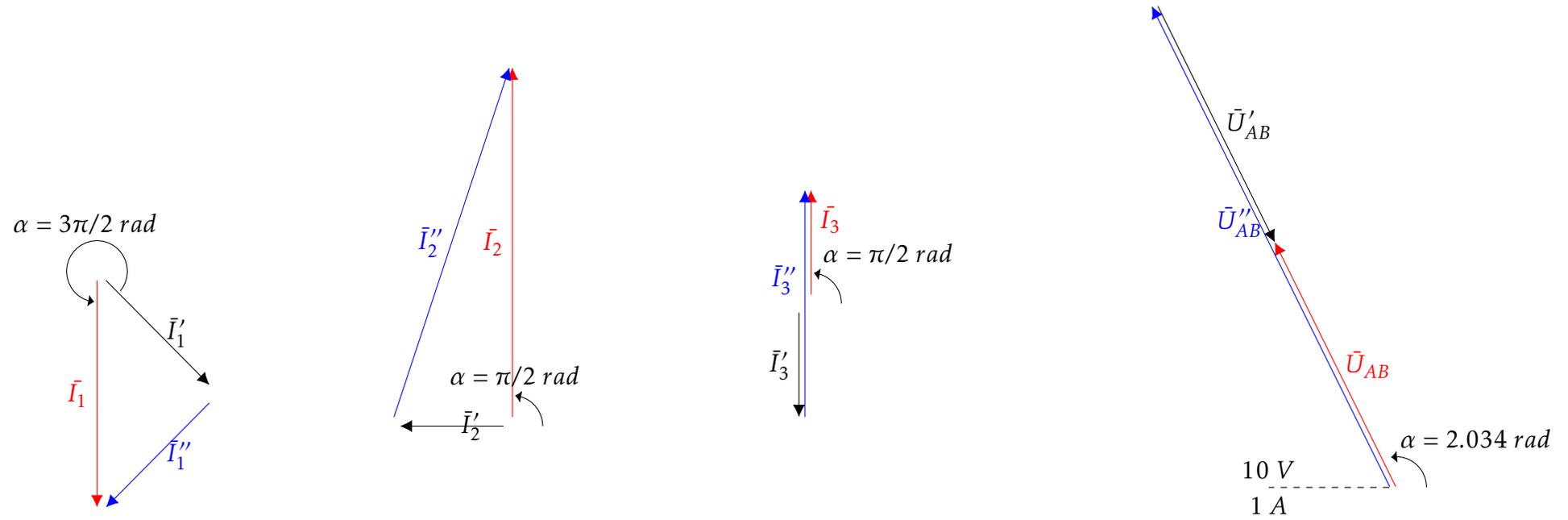


Figura 8.35: Diagrammi fasoriali per la soluzione calcolata con sovrapposizione degli effetti: (') solo \bar{E}_1 , (") solo \bar{E}_2

4. Potenziali nodali

Per applicare il metodo dei potenziali nodali alla rete simbolica in esame, viene trasformato ciascun GATS (costituito dalla serie di un generatore ideale di tensione simbolico e da un'impedenza) di figura 8.36a nel corrispondente GACS (costituito dal parallelo di un generatore ideale di corrente simbolico e da un'ammettenza) di figura 8.36b.

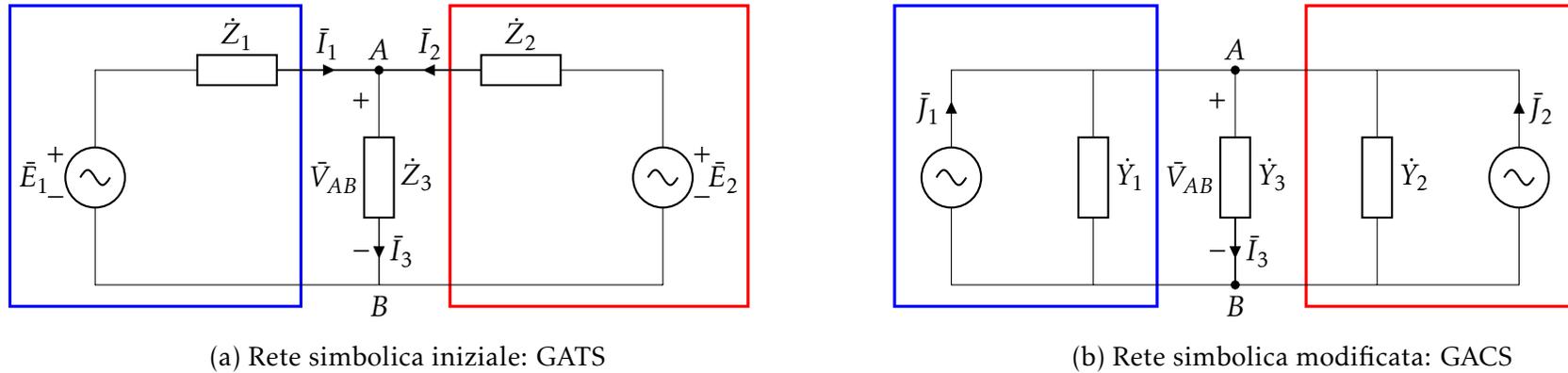


Figura 8.36: Rete simbolica: potenziali nodali

Per le ammettenze \dot{Y}_1 , \dot{Y}_2 ed \dot{Y}_3 di figura 8.36b si ha

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{100}(1 - j3) \quad \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{1}{100}(2 + j4) \quad \dot{Y}_3 = \frac{1}{\dot{Z}_3} = \frac{1}{100}(4 - j2)$$

ed i generatori ideali simbolici di corrente \bar{J}_1 , \bar{J}_2 valgono

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} = 1 - j3 \quad \bar{J}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} = -2 + j6$$

Assumendo il nodo B come riferimento per i potenziali ($\bar{U}_B = 0 + j0$), il metodo dei potenziali nodali porta a scrivere una sola equazione per il nodo A nell'unica incognita (\bar{U}_A)

$$(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3) \cdot \bar{U}_A = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$$

da cui si ottiene

$$\bar{V}_{AB} = \bar{U}_A - \bar{U}_B = \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} = -20 + j40$$

Il fasore \bar{I}_3 può essere calcolato direttamente sulla rete di figura 8.36b.

$$\bar{I}_3 = \bar{V}_{AB} \cdot \bar{Y}_3 = +j2$$

mentre i fasori \bar{I}_1 , \bar{I}_2 vanno calcolati sulla rete di figura 8.36a

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} = -j4 \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} = +j6$$

Le espressioni temporali corrispondenti ai fasori \bar{I}_1 , \bar{I}_2 , \bar{I}_3 e \bar{V}_{AB} si calcolano come visto in precedenza.

Ossezioni

Si noti che la strada più veloce per calcolare la tensione \bar{V}_{AB} consiste nell'applicare la formula di Millman per il parallelo di GATS, considerando l'impedenza \bar{Z}_3 come caso limite di GATS con tensione impressa nulla

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} = -20 + j40$$

8.13 Problema inverso

La rete di figura 8.37 è in regime sinusoidale con pulsazione ω . Sono noti i valori delle resistenze, delle induttanze e delle capacità indicati in tabella e le indicazioni degli strumenti ideali:

- voltmetro a valore efficace: V_V
- amperometro a valore efficace: I_A
- wattmetro a valor medio: P_W

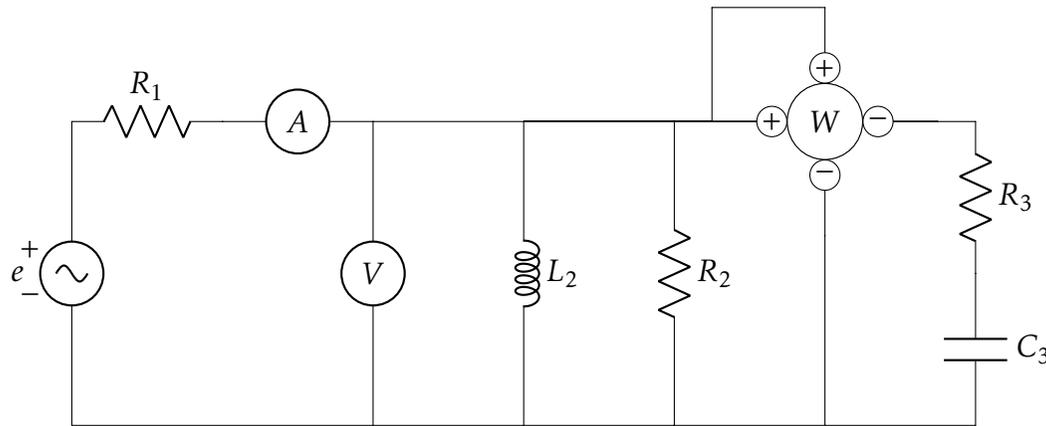


Figura 8.37: Rete elettrica in regime sinusoidale

$$\omega = 100 \text{ rad/s} \quad R_1 = 50 \Omega \quad R_2 = 375 \Omega \quad L_2 = 2,5 \text{ H} \quad V_V = 300 \text{ V} \quad I_A = 2,4 \text{ A} \quad P_W = 480 \text{ W}$$

Determinare:

1. I valori della resistenza R_3 e della capacità C_3
2. Il valore efficace E della tensione impressa $e(t)$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio conviene operare sulle potenze attive e reattive assorbite dai vari carichi, con riferimento alla rete simbolica di figura 8.38.

Le potenze attiva e reattiva entranti in R_2 e L_2 sono

$$\begin{cases} P_2 = \frac{V_V^2}{R_2} = 240 \text{ W} \\ Q_2 = \frac{V_V^2}{\omega L_2} = 360 \text{ VAR} \end{cases}$$

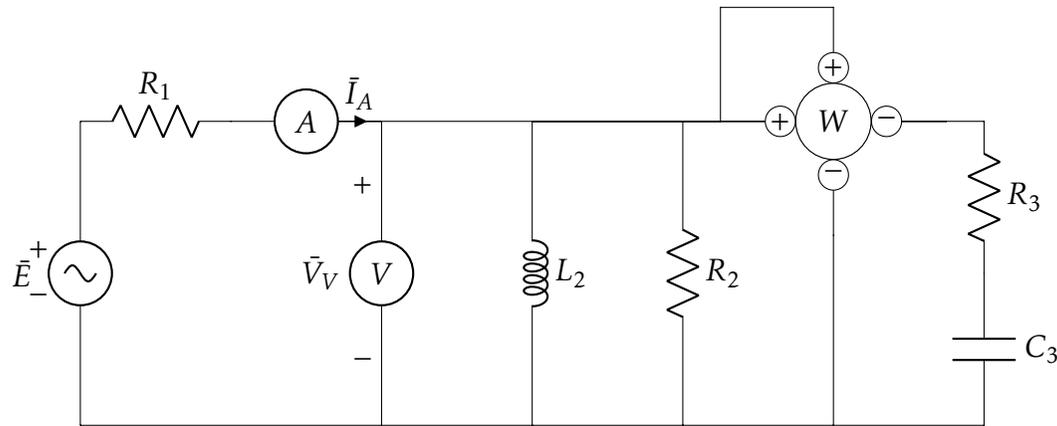


Figura 8.38: Rete simbolica

La potenza apparente S_{23} complessivamente entrante nei bipoli alla destra dell'ampmetro (vedi fig.8.38) è data dal prodotto della tensione (valore efficace) misurata dal voltmetro V_V per la corrente (valore efficace) misurata dall'ampmetro I_A

$$S_{23} = (V_V \cdot I_A) = 720 \text{ VA}$$

Il wattmetro misura la potenza attiva P_3 entrante in R_3 , visto che C_3 può assorbire solo potenza reattiva (Q_3).

La totale potenza attiva P entrante nei bipoli alla destra dell'amperometro risulta quindi

$$P_{23} = P_2 + P_3 = 240 + 480 = 720 \text{ W}$$

Dato che vale

$$S_{23} = \sqrt{(P_{23})^2 + (Q_{23})^2}$$

essendo $Q_{23} = Q_2 + Q_3$ la potenza reattiva complessivamente entrante nei bipoli alla destra dell'amperometro, si ottiene

$$|Q_{23}| = \sqrt{(S_{23})^2 - (P_{23})^2} = \sqrt{720^2 - 720^2} = 0 \text{ VAR}$$

Nota Q_2 , si ricava la potenza reattiva Q_3

$$Q_3 = -Q_2 = -360 \text{ VAR}$$

Il valore efficace della corrente I_3 , assorbita dall'impedenza \dot{Z}_3 (serie di R_3 e C_3), risulta

$$I_3 = \frac{S_3}{V_V} = \frac{\sqrt{P_3^2 + Q_3^2}}{V_V} = \frac{\sqrt{480^2 + 360^2}}{300} = 2 \text{ A}$$

I valori di R_3 , X_3 e C_3 sono pertanto dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} R_3 = \frac{P_3}{I_3^2} = 120 \Omega \\ X_{C_3} = \frac{Q_3}{I_3^2} = -90 \Omega \\ C_3 = -\frac{1}{\omega \cdot X_{C_3}} = \frac{1}{100 \cdot 90} = 111.11 \mu\text{F} \end{array} \right.$$

Per determinare il valore efficace E della tensione $e(t)$, conviene sostituire ai bipoli alla destra dell'amperometro di fig.8.38 un'unica impedenza \dot{Z}_{eq} , come in figura 8.39.

Tale impedenza può essere calcolata eseguendo il parallelo tra \dot{Z}_3 (serie di R_3 e C_3) con \dot{Z}_p (parallelo tra R_2 e L_2) ottenendo

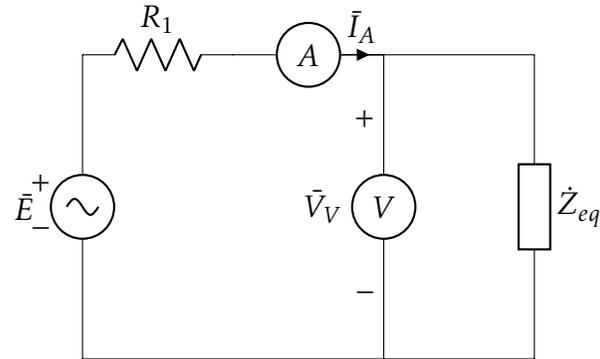


Figura 8.39: Rete simbolica semplificata

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_3 \cdot \dot{Z}_p}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_p} = 125 + j0$$

Utilizzando la formula del partitore di tensione simbolico si ha

$$\bar{V}_V = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_{eq}}{R_1 + \dot{Z}_{eq}}, \quad |\bar{V}_V| = |\bar{E}| \cdot \frac{|\dot{Z}_{eq}|}{|R_1 + \dot{Z}_{eq}|}$$

da cui si ricava il valore efficace della tensione E

$$E = |\bar{E}| = \frac{|R_1 + \dot{Z}_{eq}|}{|\dot{Z}_{eq}|} \cdot V_V = \frac{50 + (125 + j0)}{(125 + j0)} \cdot 300 = 420 \text{ V}$$

Osservazioni

Si può anche ricavare \dot{Z}_{eq} calcolando il modulo dell'impedenza $Z_{eq} = V_V/I_A = 125 \Omega$ e il fattore di potenza $\cos \varphi = P_{23}/S_{23} = 1$ ed effettuando poi una sintesi serie dell'impedenza:

$$R_{eq} = Z_{eq} \cos \varphi = 125 \cdot 1 = 125 \Omega, \quad X_{eq} = Z_{eq} \sin \varphi = 125 \cdot 0 = 0 \Omega$$

9

Reti elettriche trifasi

9.1 Potenza trifase (Aron)

La rete trifase di figura 9.1 è alimentata ai morsetti 1,2,3 da una terna simmetrica diretta di tensioni di valore efficace V (tensione concatenata) e pulsazione ω . Tutti i carichi sono equilibrati.

Determinare:

- L'indicazione dell'amperometro a valore efficace: I_A
- Le indicazioni dei due wattmetri (inserzione Aron): P_{12} e P_{32}

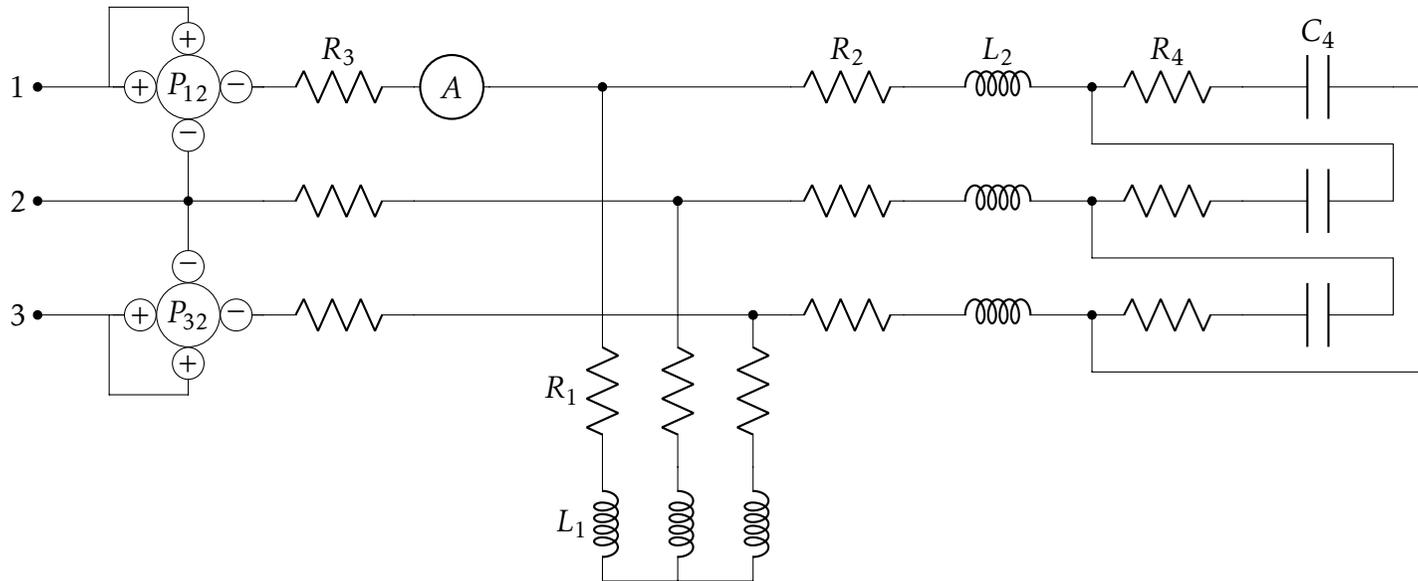


Figura 9.1: Rete trifase

$$V = 400 \text{ V} \quad \omega = 1000 \text{ rad/s} \quad R_1 = 20 \Omega \quad X_{L_1} = 10 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega \quad X_{L_2} = 10 \Omega \quad R_3 = 10 \Omega \quad R_4 = 15 \Omega \quad X_{C_4} = -90 \Omega$$

Soluzione

La rete è simmetrica ed equilibrata, per cui si può calcolare la soluzione utilizzando una rete monofase equivalente ad una delle tre fasi (ad esempio la 1) con ritorno della corrente attraverso un conduttore neutro “virtuale”. Per ricavare la rete equivalente monofase, andiamo prima a sostituire il carico equilibrato a triangolo ($\dot{Z}_{4\Delta}$) con l'equivalente carico a stella (\dot{Z}_{4Y})

$$\dot{Z}_{4Y} = \frac{\dot{Z}_{4\Delta}}{3} = \frac{R_4 + jX_{C4}}{3} = \frac{15 - j90}{3} = 5 - j30$$

Le altre impedenze sono

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 20 + j10 \quad \dot{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 5 + j10 \quad \dot{Z}_3 = R_3 = 10$$

Si ottiene la rete simbolica trifase riportata in figura 9.2, in cui viene rappresentato anche il conduttore neutro “virtuale” che unisce i centri stella $0'$ e $0''$ che sono equipotenziali essendo le tensioni simmetriche e tutti i carichi equilibrati.

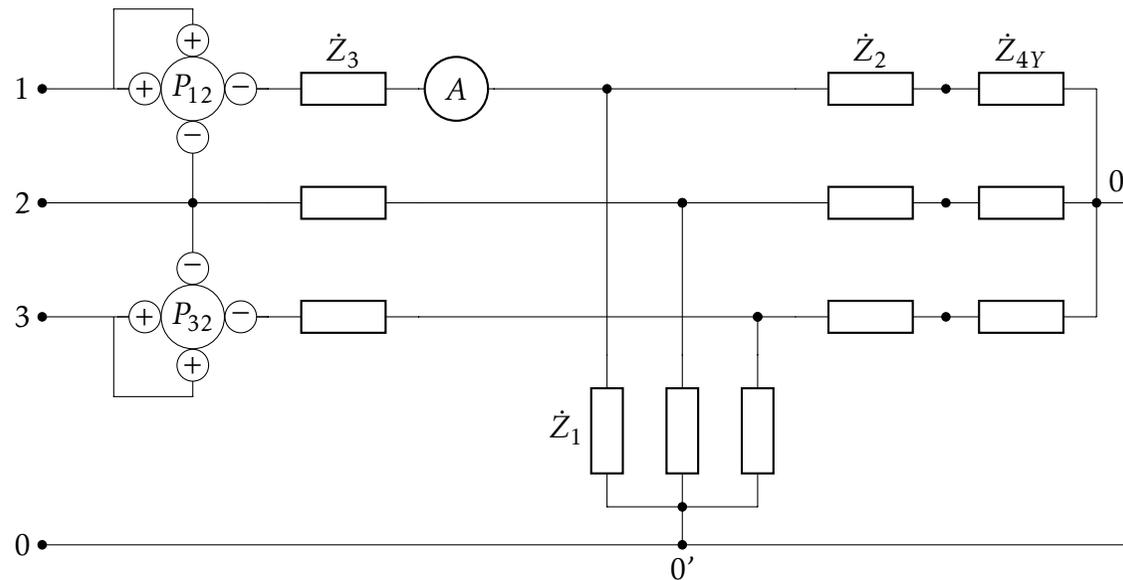


Figura 9.2: Rete trifase simbolica in cui è disegnato anche il conduttore neutro “virtuale” che unisce i centri stella

La rete equivalente monofase, riportata in figura 9.3, può essere risolta con gli usuali metodi di analisi delle reti simboliche.

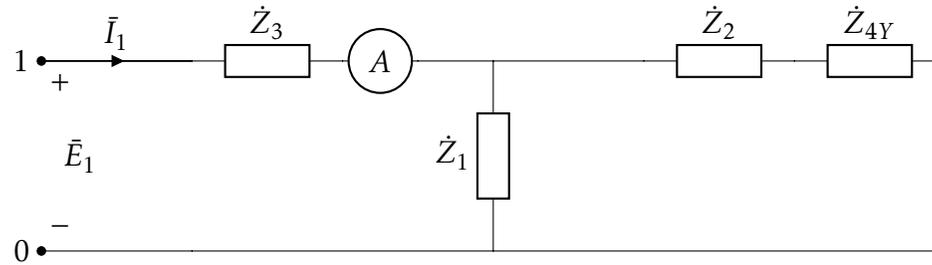


Figura 9.3: Rete equivalente monofase

Introducendo l'impedenza \dot{Z}_p corrispondente al parallelo tra \dot{Z}_1 e la serie di \dot{Z}_2 e \dot{Z}_{4Y}

$$\dot{Z}_p = \frac{\dot{Z}_1 \cdot (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{4Y})}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{4Y}} = 15 - j5$$

la rete simbolica può essere semplificata come in figura 9.4

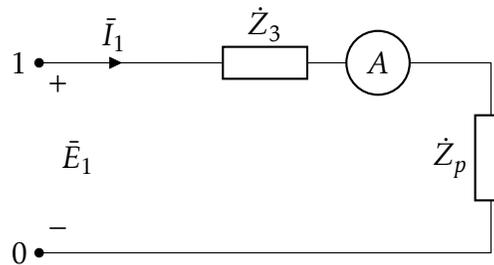


Figura 9.4: Rete equivalente monofase semplificata

Essendo noto il valore efficace della tensione concatenata, si può calcolare \bar{E}_1 , con valore efficace $E = V/\sqrt{3}$ e fase iniziale $\alpha = 0$ ¹

$$\bar{E}_1 = E e^{j\alpha} = \frac{V}{\sqrt{3}} e^{j0} = \frac{400}{\sqrt{3}}$$

¹la scelta della fase iniziale è arbitraria e non influenza i risultati.

Definendo $\dot{Z}_s = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_p = 25 - j5$, la corrente \bar{I}_1 risulta

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_s} = \frac{400/\sqrt{3}}{25 - j5} = \frac{8}{13\sqrt{3}} \cdot (25 + j5) \quad I_1 = |\bar{I}_1| = 9.058 A$$

Pertanto l'indicazione dell'amperometro è

$$I_A = I_1 = 9.058 A$$

La potenza complessa \dot{S} entrante in \dot{Z}_s è

$$\dot{S} = \dot{Z}_s \cdot I_1^2 = (25 - j5) \cdot 9.058^2 = \underbrace{2051.3}_{P_1} + j \underbrace{(-410.3)}_{Q_1}$$

Le potenze attiva P_1 e Q_1 , corrispondenti alla parte reale ed immaginaria della potenza complessa, rispettivamente, sono quelle entranti nei carichi dello schema equivalente monofase, pertanto le potenze attiva P e Q complessivamente entranti nei carichi trifase si ottengono moltiplicando per tre questi valori

$$P = 3 \cdot P_1 = 6153.8 W \quad Q = 3 \cdot Q_1 = -1230.8 VAR$$

e le indicazioni dei wattmetri, in inserzione Aron, sono

$$P_{12} = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} = 3432.2 W$$

$$P_{32} = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} = 2721.6 W$$

9.2 Rifasamento del carico

La rete trifase di figura 9.5 è alimentata ai morsetti 1, 2, 3 da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate di valore efficace V . Tutti i carichi sono equilibrati.

Sono note le indicazioni del voltmetro ideale a valore efficace V_V e dei wattmetri ideali a valor medio P_{12} e P_{32} .

Determinare:

- I valori di R_3 e L_3
- I valori di capacità C_Y di ciascun condensatore per rifasare il complesso dei carichi a $\cos \varphi' = 0.9$
- I valori di capacità C_Y di ciascun condensatore per rifasare il complesso dei carichi a $\cos \varphi' = 1$ (rifasamento completo)

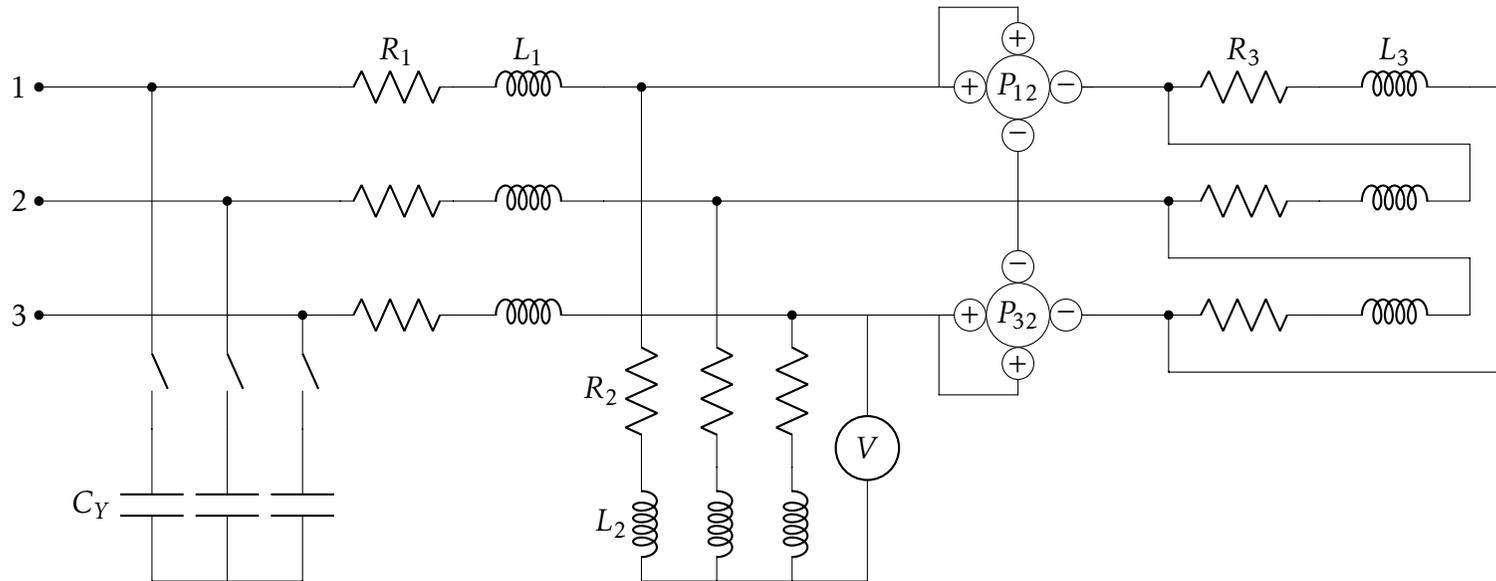


Figura 9.5: Rete trifase simmetrica ed equilibrata

$$V = 600\sqrt{3} V \quad \omega = 100 \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 40\Omega \quad L_1 = 150\text{mH} \quad L_2 = 300\text{mH} \quad V_V = 250\sqrt{2} V \quad P_{12} = 1700.96 W \quad P_{32} = 4299.04 W$$

Soluzione

La rete è simmetrica ed equilibrata, per cui si può calcolare la soluzione utilizzando una rete monofase equivalente ad una delle tre fasi (ad esempio la 1) con ritorno della corrente attraverso un conduttore neutro “virtuale”.

Prima però, è necessario ricavare il valore di R_3 ed L_3 . Ciascuna delle impedenze $\dot{Z}_{3\Delta} = R_3 + jX_{L_3}$ è alimentata da una tensione concatenata di valore efficace V_3

$$V_3 = \sqrt{3} \cdot E_3 = \sqrt{3} \cdot V_V = \sqrt{3} \cdot (250 \sqrt{2}) = 612.37 \text{ V}$$

dato che la tensione stellata E_3 (non accessibile sul carico collegato a triangolo) coincide con la misura dal voltmetro V_V .

Dalle indicazioni dei due wattmetri in inserzione Aron (P_{12} , P_{32}) si ricavano le potenze attiva P_3 e reattiva Q_3 entranti nel carico trifase (R_3 , L_3)

$$\begin{cases} P_3 = P_{12} + P_{32} = 1700.96 + 4299.04 = 6000 \text{ W} \\ Q_3 = \sqrt{3}(P_{32} - P_{12}) = \sqrt{3}(4299.04 - 1700.96) = 4500 \text{ VAR} \end{cases}$$

La potenza apparente risulta:

$$S_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} = \sqrt{3000^2 + 2250^2} = 7500 \text{ VA}$$

La potenza attiva, reattiva ed apparente entranti nella singola impedenza $\dot{Z}_3 = R_3 + jX_{L_3}$ sono un terzo di quelle calcolate sul carico trifase, per cui si possono calcolare il modulo dell'impedenza e il fattore di potenza utilizzando le seguenti espressioni

$$Z_3 = \frac{V_3^2}{S_3/3} = \frac{(612.37)^2}{2500} = 150 \Omega \quad \cos \varphi_3 = \frac{P_3/3}{S_3/3} = \frac{2000}{2500} = 0.8$$

Dalla sintesi serie dell'impedenza $\dot{Z}_{3\Delta} = R_3 + jX_{L_3}$, si ricavano quindi i valori della resistenza R_3 e della reattanza induttiva X_{L_3}

$$\begin{cases} R_3 = Z_3 \cos \varphi_3 = 150 \cdot 0.8 = 120 \Omega \\ X_{L_3} = \sqrt{Z_3^2 - R_3^2} = 90 \Omega \end{cases} \quad (9.1)$$

avendo scelto per la reattanza il segno positivo visto che il carico è *ohmico-induttivo*.

Infine si ricava il valore di L_3

$$L_3 = \frac{X_{L_3}}{\omega} = 900 \text{ mH}$$

Si può quindi sostituire il carico equilibrato a triangolo ($\dot{Z}_{3\Delta}$) con l'equivalente carico a stella (\dot{Z}_{3Y})

$$\dot{Z}_{3Y} = \frac{\dot{Z}_{3\Delta}}{3} = \frac{R_3 + jX_{L3}}{3} = \frac{120 + j90}{3} = 40 + j30$$

Le altre impedenze sono

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 10 + j15 \quad \dot{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j30$$

Si ottiene la rete simbolica trifase riportata in figura 9.6, in cui viene rappresentato anche il conduttore neutro "virtuale" che unisce i centri stella $0'$, $0''$ e $0'''$ che sono equipotenziali essendo le tensioni simmetriche e tutti i carichi equilibrati.

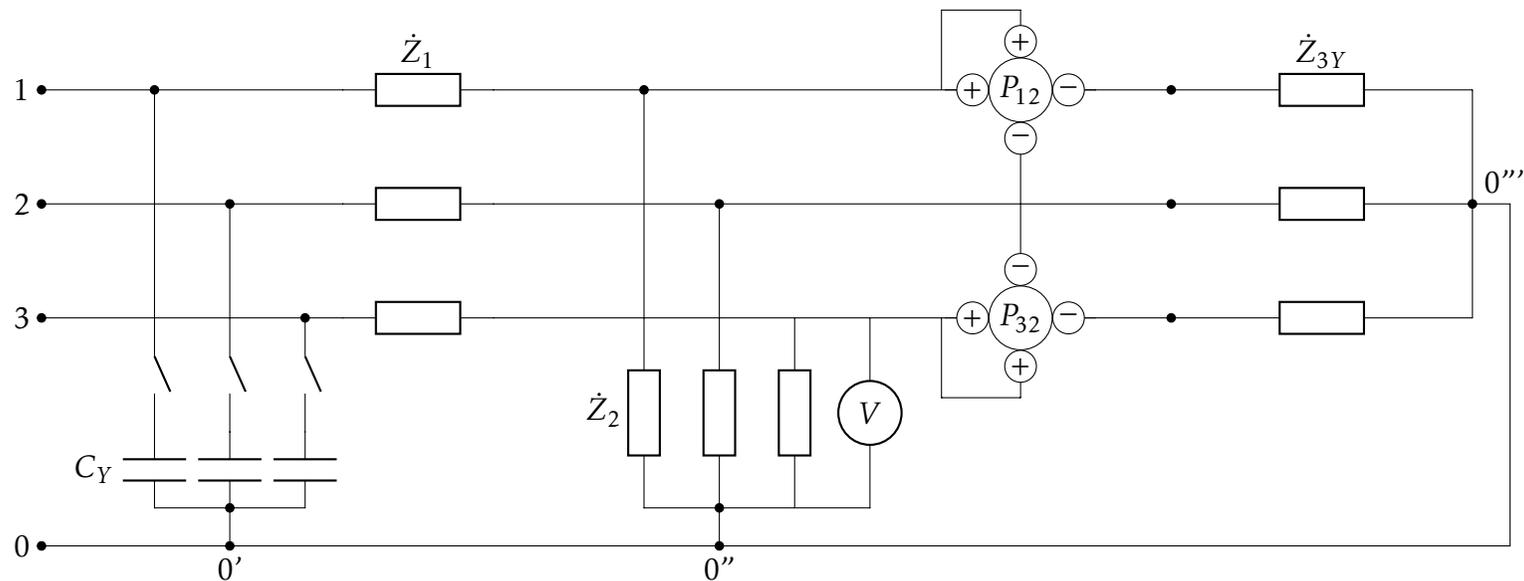


Figura 9.6: Rete trifase simmetrica ed equilibrata

La rete equivalente monofase, riportata in figura 9.7, può essere risolta con gli usuali metodi di analisi delle reti simboliche.

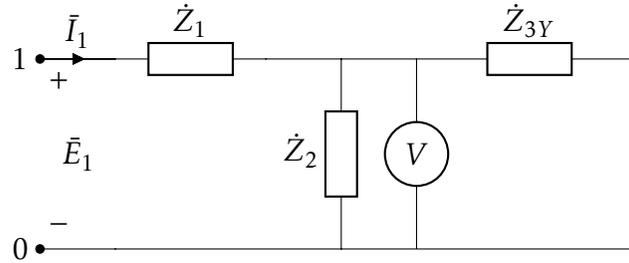


Figura 9.7: Rete equivalente monofase

Essendo noto il valore efficace della tensione concatenata, si può calcolare \bar{E}_1 , con valore efficace $E = V/\sqrt{3}$ e fase iniziale $\alpha = 0$ ²

$$\bar{E}_1 = E e^{j\alpha} = \frac{V}{\sqrt{3}} e^{j0} = \frac{600\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 600$$

Introducendo l'impedenza \dot{Z}_p corrispondente al parallelo tra \dot{Z}_2 e \dot{Z}_{3Y} e definendo $\dot{Z}_s = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_p$

$$\dot{Z}_s = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{3Y}}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{3Y}} = 30 + j30$$

la corrente \bar{I}_1 risulta

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_s} = \frac{600}{30 + j30} = 10 - j10 \quad I_1 = |\bar{I}_1| = 10\sqrt{2} = 14.142 \text{ A}$$

La potenza complessa \dot{S} entrante in \dot{Z}_s è

$$\dot{S}_m = \dot{Z}_s \cdot I_1^2 = (30 + j30) \cdot 14.142^2 = \underbrace{6000}_{P_m} + j \underbrace{6000}_{Q_m}$$

avendo utilizzato il pedice "m" per ricordare che i valori calcolati sono relativi allo schema equivalente monofase.

Per il rifasamento del carico possiamo fare riferimento allo schema semplificato di figura 9.8, dove ai morsetti 1 – 0 è collegato il condensatore di rifasamento C_Y . I fasori \bar{I}_ℓ , \bar{I}_1 e \bar{I}_r corrispondono alla corrente di linea, alla corrente sul carico e alla corrente sul condensatore di rifasamento, rispettivamente.

²la scelta della fase iniziale è arbitraria e non influenza i risultati.

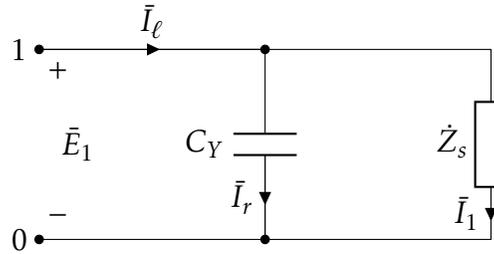


Figura 9.8: Rete equivalente monofase semplificata

Per rifasare completamente il complesso dei carichi, ciascun condensatore collegato tra una fase ed il neutro, (come quello rappresentato in figura 9.8) deve assorbire una potenza reattiva uguale in modulo e di segno opposto rispetto a quella dei carichi rappresentati nello schema equivalente monofase

$$Q_C = -Q^m = -6000 \text{ VAR}$$

Dall'espressione della potenza reattiva entrante nel condensatore

$$Q_C = \frac{E_1^2}{X_{CY}} = -\omega C_Y E_1^2$$

si ricava il valore della capacità C_Y

$$C_Y = -\frac{Q_C}{\omega E_1^2} = \frac{6000}{100 \cdot 600^2} = 166.6 \bar{\mu}F$$

Per rifasare il complesso dei carichi a $\cos \varphi' = 0.9$, ciascun condensatore collegato tra una fase ed il neutro, (come quello rappresentato in figura 9.8) deve assorbire una potenza reattiva inferiore (in modulo) a prima che è data dall'espressione

$$Q_C = Q'_m - Q_m = P \cdot \tan \varphi' - Q_m = 6000 \cdot 0.484 - 6000 = -3094 \text{ VAR}$$

e utilizzando la stessa relazione per esprimere la potenza reattiva entrante nel condensatore si ricava il nuovo valore della capacità C_Y

$$C_Y = -\frac{Q_C}{\omega E_1^2} = \frac{3094}{100 \cdot 600^2} = 85.94 \bar{\mu}F$$

9.3 Metodo delle potenze

La rete trifase di figura 9.9 è alimentata ai morsetti 1, 2, 3 da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate. Tutti i carichi sono equilibrati. Sono note le indicazioni del voltmetro ideale a valore efficace V_V e dei wattmetri ideali a valor medio P_{12} e P_{32} .

Determinare:

- Le potenze attiva P_2 e reattiva Q_2 entranti nel carico trifase 2 (R_2, X_{C2})
- L'indicazione dell'amperometro a valore efficace I_A
- Il valore efficace E della tensione stellata ai morsetti 1, 2 e 3
- I valori di capacità C_Y di ciascun condensatore per rifasare il complesso dei carichi a $\cos \varphi' = 0.9$

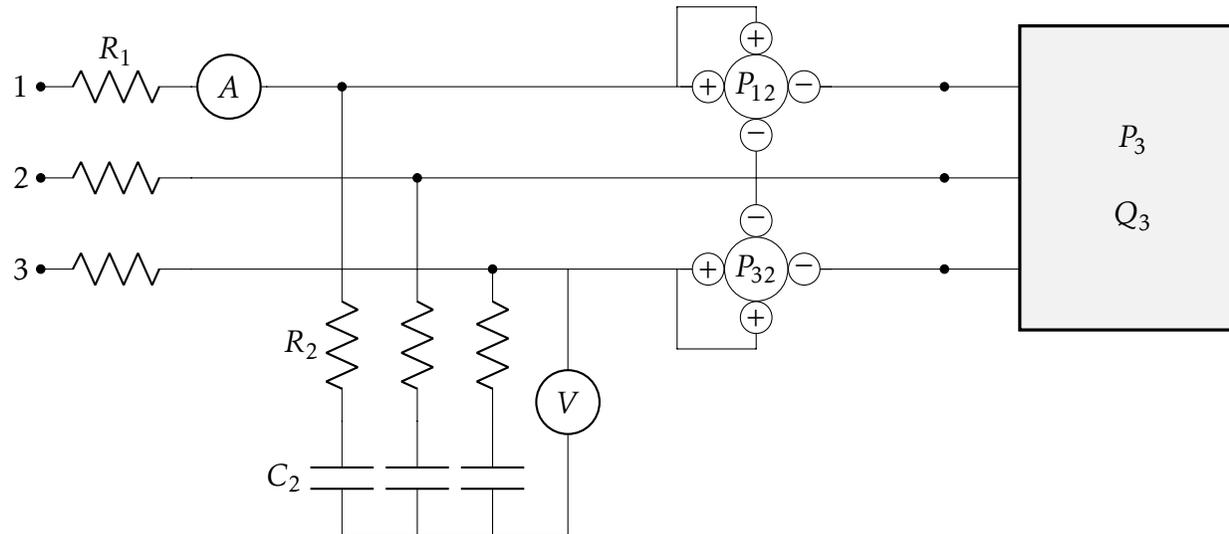


Figura 9.9: Rete trifase simmetrica ed equilibrata

$$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 24\ \Omega \quad X_{C_2} = -32\ \Omega \quad \omega = 100\ \text{rad/s} \quad V_V = 200\ \text{V} \quad P_{12} = -1178.5\ \text{W} \quad P_{32} = 2978.5\ \text{W}$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio conviene operare sulle potenze attive e reattive assorbite dai vari carichi.

Il modulo dell'impedenza di ciascuna fase del carico 2 è

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C_2}^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \Omega$$

Il valore efficace della corrente in ciascuna impedenza $\dot{Z}_2 = R_2 + jX_{C_2}$ è pertanto

$$I_2 = \frac{V_V}{Z_2} = \frac{200}{40} = 5 A$$

da cui si ottengono le potenze, attiva P_2 e reattiva Q_2 entranti nel carico trifase 2

$$\begin{cases} P_2 = 3 \cdot R_2 \cdot I_2^2 = 3 \cdot 24 \cdot 5^2 = 1800 W \\ Q_2 = 3 \cdot X_{C_2} \cdot I_2^2 = -3 \cdot 32 \cdot 5^2 = -2400 VAR \end{cases}$$

Dalle indicazioni dei due wattmetri (inserzione Aron) si possono ricavare la potenza attiva P_3 e la potenza reattiva Q_3 entranti nel carico trifase 3

$$\begin{cases} P_3 = P_{12} + P_{32} = -1178.5 + 2978.5 = 1800 W \\ Q_3 = \sqrt{3}(P_{32} - P_{12}) = \sqrt{3}(2978.5 + 1178.5) = 7200 VAR \end{cases}$$

Le potenze attiva P e reattiva Q complessivamente entranti nei carichi 2 e 3 sono dunque

$$\begin{cases} P_{23} = P_2 + P_3 = 1800 + 1800 = 3600 W \\ Q_{23} = Q_2 + Q_3 = -2400 + 7200 = 4800 VAR \end{cases}$$

a cui corrisponde la potenza apparente

$$S_{23} = \sqrt{P_{23}^2 + Q_{23}^2} = 6000 VA$$

Si può quindi ricavare il valore efficace della corrente di linea misurata dall'amperometro

$$I_A = \frac{S}{3 V_V} = \frac{6000}{3 \cdot 200} = 10 A$$

e calcolare la potenza attiva P_1 assorbita dalle resistenze R_1

$$P_1 = 3 R_1 I_A^2 = 3 \cdot 10 \cdot 10^2 = 3000 W$$

Le potenze attiva P e reattiva Q complessivamente entranti ai morsetti 1, 2, 3 sono

$$\begin{cases} P = P_1 + P_{23} = 3000 + 3600 = 6600 W \\ Q = Q_{23} = 4800 VAR \end{cases}$$

a cui corrisponde la potenza apparente

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 8160.88 VA$$

Si può quindi ricavare il valore efficace della tensione E ai morsetti 1, 2 e 3

$$E = \frac{S}{3I} = \frac{8160.88}{3 \cdot 10} = 272.03 V$$

Per rifasare il complesso dei carichi a $\cos \varphi' = 0.9$, nei tre condensatori di rifasamento collegati a stella deve entrare complessivamente la potenza reattiva

$$Q_C = Q' - Q = P \cdot \tan \varphi' - Q = 6600 \cdot 0.484 - 4800 = -1603.5 VAR$$

La potenza entrante in ciascun condensatore è un terzo di questo valore

$$Q_{C_Y} = \frac{Q_C}{3} = -534.5 VAR$$

Dall'espressione della potenza reattiva entrante nel condensatore

$$Q_{C_Y} = \frac{E^2}{X_{C_Y}} = -\omega C_Y E^2$$

si ricava il valore della capacità C_Y

$$C_Y = -\frac{Q_{C_Y}}{\omega E^2} = \frac{534.5}{100 \cdot 272.03^2} = 72.2 \mu F$$

9.4 Potenza trifase (Aron)

La rete trifase di figura è alimentata da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate ai morsetti 1, 2, 3. Sono noti i dati riportati in tabella.

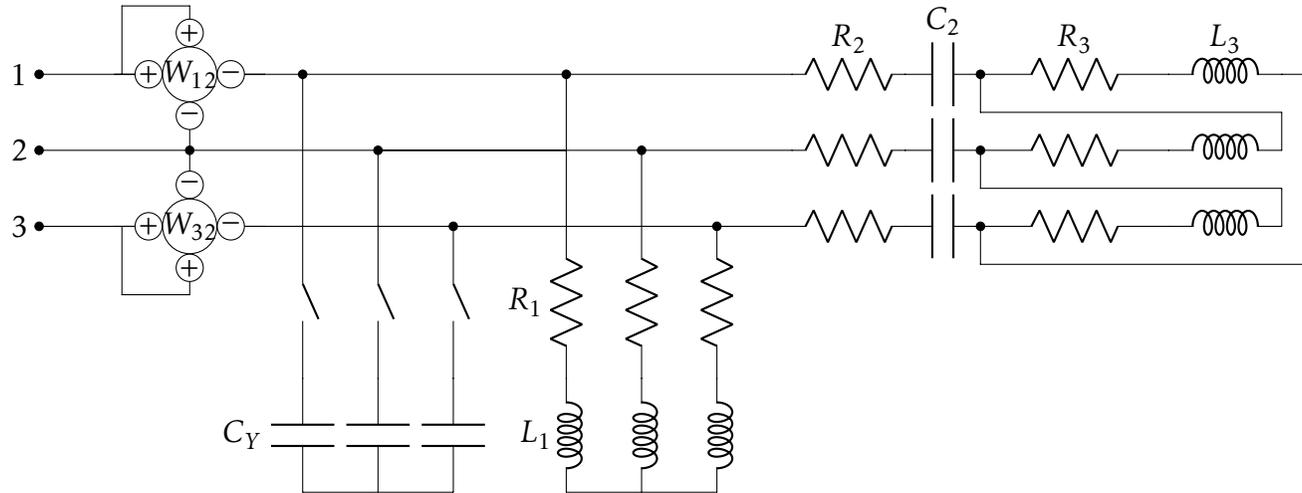


Figura 9.10: Rete trifase

$u_{12}(t) = 400 \sqrt{3} \sin(1000t + \frac{5}{12} \pi) V$	$R_1 = 20 \Omega$	$L_1 = 20 mH$
$R_2 = 10 \Omega$	$C_2 = 100 \mu F$	$R_3 = 30 \Omega$
		$L_3 = 30 mH$

Determinare:

- Le indicazioni di ciascuno dei 2 wattmetri di figura.
- La capacità C_Y di ciascuno dei 3 condensatori di figura tale da annullare la potenza reattiva assorbita ai morsetti 1, 2, 3.
- Le indicazioni di ciascuno dei 2 wattmetri in presenza dei condensatori di capacità C_Y .

Soluzione

Le impedenze \dot{Z}_1 , \dot{Z}_2 e \dot{Z}_{3Y} dello schema monofase equivalente (Fig.9.11) valgono:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j X_1 = 20 + j 20$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j X_2 = 10 - j 10$$

$$\dot{Z}_{3Y} = (R_3 + j X_3)/3 = 10 + j 10$$

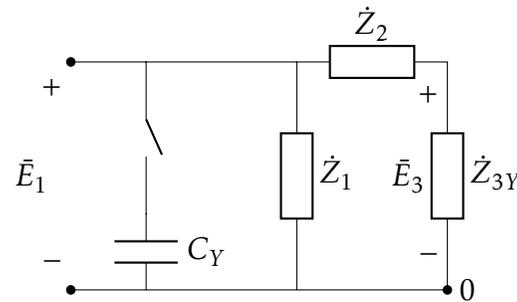


Figura 9.11: Rete monofase equivalente

Il fasore relativo alla tensione concatenata $u_{12}(t)$ è:

$$\bar{V}_{12} = \frac{400 \sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{j5/12\pi}$$

Da questo si ricava il fasore relativo alla tensione stellata $e_1(t)$:

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{V}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = \frac{400}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = 200 + j 200$$

La potenza complessa (monofase) assorbita da \dot{Z}_1 e da \dot{Z}_{23} (serie di \dot{Z}_2 e \dot{Z}_{3Y}) è:

$$\dot{S}_1 = \frac{E_1^2}{\dot{Z}_1^*} = \underbrace{2000}_{P_1} + j \underbrace{2000}_{Q_1}$$

$$\dot{S}_{23} = \frac{E_1^2}{\dot{Z}_{23}^*} = \underbrace{4000}_{P_{23}}$$

La potenza complessa (trifase) assorbita ai morsetti 1, 2, 3 è:

$$\dot{S} = 3(\dot{S}_1 + \dot{S}_{23}) = P + jQ = 18000 + j6000$$

Le indicazioni dei due wattmetri in inserzione Aron W_1 e W_2 risultano:

$$W_1 = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} = 7267.9 \text{ W}$$

$$W_2 = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} = 10732 \text{ W}$$

La potenza reattiva necessaria per rifasare completamente i carichi risulta:

$$Q_r = -Q = -6000 \text{ VAR}$$

Utilizzando la relazione:

$$Q_r = 3 \frac{E_2^2}{X_c} = 3(-\omega C_Y) E_2^2$$

si ricava il valore della capacità dei condensatori collegati a stella C_Y necessari per rifasare completamente la rete:

$$C_Y = -\frac{Q_r}{3\omega E_2^2} = 25 \mu\text{F}$$

Dopo il rifasamento la potenza attiva non cambia ($P' = 18000 \text{ W}$), mentre si annulla la potenza reattiva ($Q' = 0 \text{ VAR}$). Le indicazioni dei due wattmetri W_1 e W_2 diventano:

$$W_1 = \frac{P'}{2} = 9000 \text{ W}$$

$$W_2 = \frac{P'}{2} = 9000 \text{ W}$$

9.5 Thevenin e Millman su rete monofase equivalente

La rete trifase equilibrata di figura è alimentata dai generatori trifasi G_1 e G_2 che forniscono terne simmetriche dirette di tensioni sinusoidali. Sono note tutte le f.e.m. e tutti i parametri dei bipoli passivi riportati in tabella.

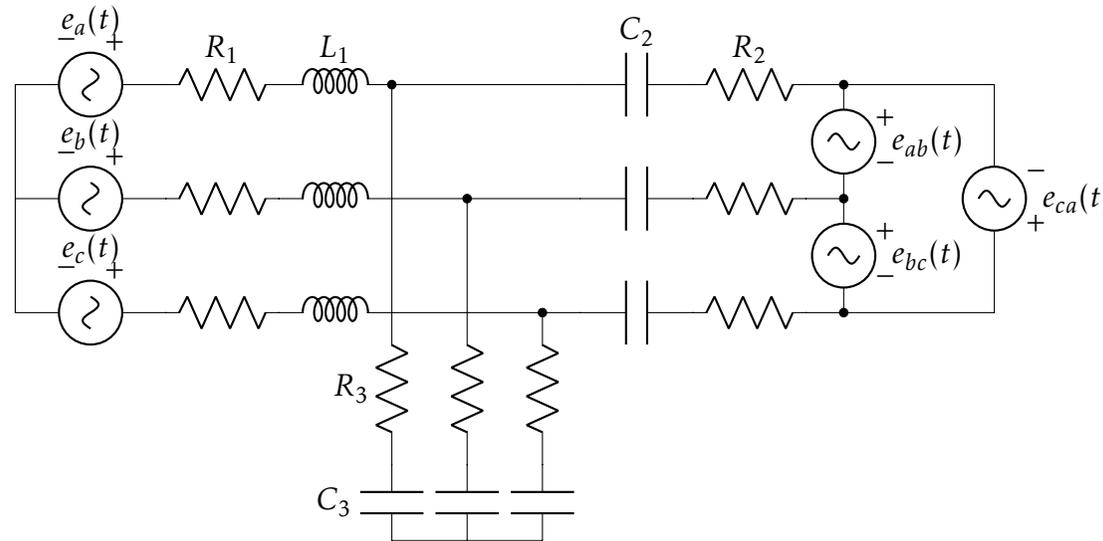


Figura 9.12: Rete trifase

$e_a(t) = 100\sqrt{2}\sin(100t) \text{ V}$	$R_1 = 10\Omega$	$R_2 = 10\Omega$	$R_3 = 5\Omega$
$e_{ab}(t) = 100\sqrt{6}\sin(100t - \pi/3) \text{ V}$	$L_1 = 200 \text{ mH}$	$X_{C_2} = -20\Omega$	$X_{C_3} = -30\Omega$

Determinare:

- L'espressione temporale della corrente $i_3(t)$.
- Le potenze attiva P_3 e reattiva Q_3 assorbite dalla utenza U_3 .
- L'espressione temporale della corrente $i_2(t)$.
- le potenze attiva P_1 e reattiva Q_1 erogate dal generatore trifase G_1 .

Soluzione

La soluzione risulta notevolmente semplificata facendo ricorso alla rete equivalente monofase (fig.9.13).

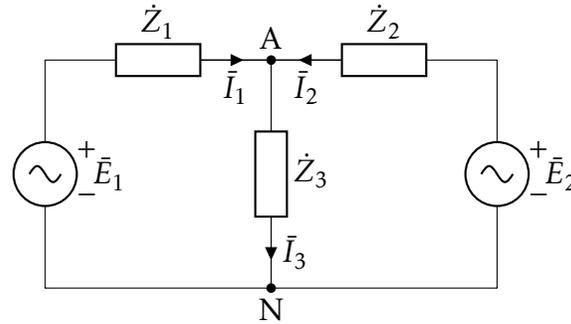


Figura 9.13: Rete monofase equivalente

Per ottenere la rete equivalente monofase, a partire dalla rete trifase, è necessario sostituire alla terna di generatori connessi a triangolo una terna di generatori connessi a stella.

In notazione simbolica le f.e.m. dei generatori della rete monofase equivalente sono dunque

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{E}_a = 100 \\ \bar{E}_2 = \bar{E}_{ab} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{100\sqrt{6}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} = 100 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j100 \end{cases}$$

mentre le impedenze dei tre lati sono:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j20 \\ \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 10 - j20 \\ \dot{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 5 - j30 \end{cases}$$

dalle quali si ottiene la rete simbolica di fig. 9.13. Tale rete può essere risolta in vari modi. Nel seguito si farà ricorso al Teorema del generatore equivalente di Thevenin ed alla formula di Milmann.

I metodo metodo: Teorema di Thevenin

Applicando il Teorema del generatore equivalente di tensione (Teorema di Thevenin) alla porta AN si ottiene la rete equivalente di fig. 9.14.

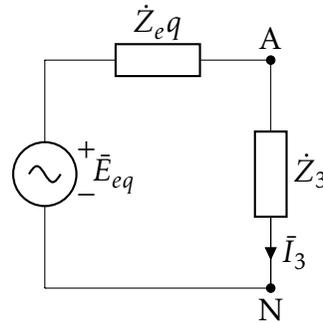


Figura 9.14: Rete monofase equivalente

I parametri del generatore equivalente alla rete vista alla porta AN, una volta rimosso il lato contenente \dot{Z}_3 , sono

$$\begin{cases} \bar{E}_{eq} = \bar{E}_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} + \bar{E}_2 \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = 150 - j150 \\ \dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{10(1+j2)10(1-j2)}{10(1+j2) + 10(1-j2)} = 25 \end{cases}$$

La corrente alla porta risulta

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_3} = \frac{150(1-j)}{25 + 5 - j30} = 5 \Rightarrow i_3(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t)$$

Le potenze attiva e reattiva assorbite dalla utenza U_3 sono allora

$$\begin{cases} P_3 = 3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 375 \text{ W} \\ Q_3 = 3 \cdot 30 \cdot 5^2 = -2250 \text{ VAR} \end{cases}$$

La tensione alla porta AN è:

$$\bar{V}_{AN} = \dot{Z}_3 \bar{I}_3 = 5 (5 - j30) = 25 - j150$$

Le correnti \bar{I}_1 e \bar{I}_2 valgono

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AN}}{\dot{Z}_1} = \frac{100 - (25 - j150)}{10 + j20} = 7,5 \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{AN}}{\dot{Z}_2} = \frac{-j100 - (25 - j150)}{10 - j20} = -2,5 \end{cases}$$

L'espressione temporale della corrente $i_2(t)$ risulta

$$i_2(t) = -2,5 \sqrt{2} \sin(100 t)$$

Infine la potenza complessa erogata dal generatore trifase G_1 è

$$\dot{S}_1 = 3 \cdot \bar{E}_1 \cdot \bar{I}_1^* = 3 \cdot 100 \cdot 7,5 = \underbrace{2250}_{P_1} + j \underbrace{0}_{Q_1}$$

da cui

$$\begin{cases} P_1 = 2250 \text{ W} \\ Q_1 = 0 \text{ VAR} \end{cases}$$

II metodo metodo: Formula di Millman

La rete di fig. 9.13 presenta due soli nodi (A e N); si può pertanto applicare la formula di Millman a tali nodi ottenendo direttamente la tensione tra essi

$$\bar{V}_{AN} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}} = 25 - j150$$

La corrente nel lato 3 risulta allora

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_3} = \frac{25 (1 - j 6)}{5 (1 - j 6)} = 5$$

Si procede quindi come nel caso precedente.

Osservazioni conclusive ed errori frequenti

Uno degli errori più frequenti consiste nel dimenticare lo sfasamento tra tensioni stellate e concatenate quando si opera la trasformazione della terna di generatori connessi a triangolo in quella di generatori connessi a stella.

9.6 Metodo delle potenze

La rete trifase equilibrata di figura è alimentata ai morsetti 1, 2, 3 da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate di pulsazione ω . I due wattmetri, in inserzione Aron, forniscono le indicazioni P_{12} e P_{32} e il voltmetro la tensione U_V .

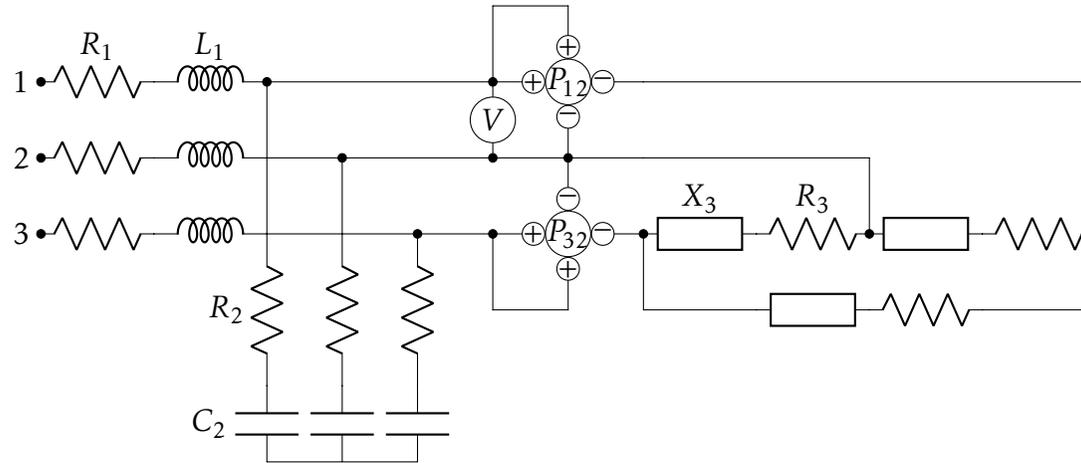


Figura 9.15: Rete trifase

$\omega = 1000 \text{ rad/s}$	$U_V = 400 \text{ V}$	$P_{12} = -247.5 \text{ W}$	$P_{32} = 3447.5 \text{ W}$
$R_1 = 5 \Omega$	$L_1 = 15 \text{ mH}$	$R_2 = 20 \Omega$	$C_2 = 100 \mu\text{F}$

Determinare:

- Il valore efficace della corrente i_3 .
- Il valore di R_3 e di X_3 .
- Il valore delle potenze attiva P_t e reattiva Q_t assorbite ai morsetti 1, 2, 3.
- Il valore efficace della tensione concatenata U ai morsetti 1, 2, 3.

- La capacità C_Y di ciascuno dei tre condensatori che, inseriti ai morsetti 1, 2 e 3 con connessione a stella, rifasano completamente il complesso dei carichi.

Soluzione

L'esercizio viene risolto operando direttamente sulle potenze attive e reattive assorbite dai vari carichi.

Le potenze assorbite dal carico 3 (impedenze \dot{Z}_3 collegate a triangolo) si deducono dalle indicazioni dei wattmetri in inserzione Aron

$$\begin{cases} P_3 = P_{12} + P_{32} = 3200 \text{ W} \\ Q_3 = \sqrt{3} (P_{32} - P_{12}) = 6400 \text{ VAR} \end{cases}$$

Il valore efficace della corrispondente corrente di linea risulta

$$I_3 = \frac{S_3}{\sqrt{3} U_V} = \frac{\sqrt{P_3^2 + Q_3^2}}{\sqrt{3} U_V} = 10.328 \text{ A}$$

La potenza complessa assorbita dall'impedenza \dot{Z}_3 vale

$$\dot{S}_3 = 3 \bar{U}_V \bar{J}_3^* = 3 \bar{U}_V \left(\frac{\bar{U}_V}{\dot{Z}_3} \right)^* = 3 \frac{U_V^2}{\dot{Z}_3^*}$$

Si ottiene pertanto

$$\begin{cases} \dot{Z}_3 = 3 \frac{U_V^2}{\dot{S}_3^*} = 30 + j 60 \\ R_3 = 30 \Omega \\ X_3 = 60 \Omega \end{cases}$$

In modo analogo, la potenza complessa assorbita dal carico trifase costituito dalle impedenze \dot{Z}_2 collegate a stella risulta

$$\dot{S}_2 = 3 \frac{\left(\frac{U_V}{\sqrt{3}} \right)^2}{\dot{Z}_2^*} = \frac{400^2}{20 + j 10} = 6400 - j 3200$$

cioè, in termini di potenze attiva e reattiva

$$\begin{cases} P_2 = 6400 \text{ W} \\ Q_2 = -3200 \text{ VAR} \end{cases}$$

Le potenze globalmente assorbite dai due carichi U_2 e U_3 sono quindi

$$\begin{cases} P = P_2 + P_3 = 9600 \text{ W} \\ Q = Q_2 + Q_3 = 3200 \text{ VAR} \end{cases}$$

Dato che entrambi i carichi sono sottoposti alla stessa tensione concatenata (U_V), si può ricavare il valore efficace della corrente assorbita ai morsetti 1, 2 e 3 come

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} U_V} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3} U_V} = 14.606 \text{ A}$$

Le potenze attiva P_1 e reattiva Q_1 assorbite dal carico 1 risultano

$$\begin{cases} P_1 = 3 R_1 I^2 = 3200 \text{ W} \\ Q_1 = 3 X_1 I^2 = 9600 \text{ VAR} \end{cases}$$

Le potenze attiva P_t e reattiva Q_t assorbite ai morsetti 1, 2 e 3 sono

$$\begin{cases} P_t = P + P_1 = 12800 \text{ W} \\ Q_t = Q + Q_1 = 12800 \text{ VAR} \end{cases}$$

Il valore efficace della tensione concatenata ai morsetti 1, 2 e 3 è pertanto

$$U = \frac{S_t}{\sqrt{3} I} = \frac{\sqrt{P_t^2 + Q_t^2}}{\sqrt{3} I} = 715.54 \text{ V}$$

Per rifasare completamente il complesso dei carichi, è necessario che il banco di condensatori collegati a stella assorba una potenza reattiva

$$Q_C = -Q_t = -12800 \text{ VAR}$$

Il valore della reattanza capacitiva di ciascun condensatore risulta

$$X_{C_Y} = 3 \frac{E^2}{Q_C} = \frac{U^2}{Q_C} = -40 \Omega$$

e la capacità C_Y di ciascun condensatore risulta

$$C_Y = -\frac{1}{\omega X_{C_Y}} = 25 \mu\text{F}$$

10

Reti elettriche in regime periodico (non sinusoidale)

10.1 Analisi armonica con un ingresso periodico

Della rete lineare di figura 10.1 sono noti i valori di L , C , R e la tensione impressa dal generatore ideale di tensione periodica $e(t) = E_{1M} \sin(\omega_1 t) + E_{3M} \cos(\omega_3 t)$.

Determinare:

- L'espressione temporale della corrente $i(t)$
- La potenza attiva P_e uscente da $e(t)$

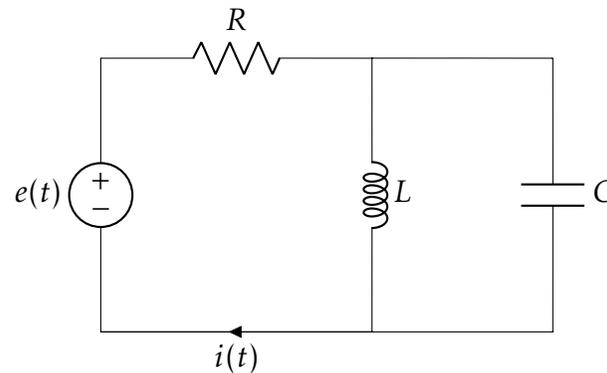


Figura 10.1: Rete elettrica lineare con un ingresso periodico

$$E_{1M} = 100 \text{ V} \quad \omega_1 = 500 \text{ rad/s} \quad E_{3M} = 25 \text{ V} \quad \omega_3 = 1500 \text{ rad/s} \quad L = 15 \text{ mH} \quad C = 500 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 4 \Omega$$

Soluzione

Data la linearità della rete, ad ogni armonica di tensione impressa da $e(t)$ corrisponde la medesima armonica di corrente $i(t)$, per la quale assumeremo quindi un'espressione temporale del tipo:

$$i(t) = I_{1M} \sin(\omega_1 t + \beta_1) + I_{3M} \cos(\omega_3 t + \beta_3)$$

Analisi alla pulsazione ω_1

La rete in regime sinusoidale alla pulsazione ω_1 viene risolta con metodo simbolico con riferimento alla figura 10.2.

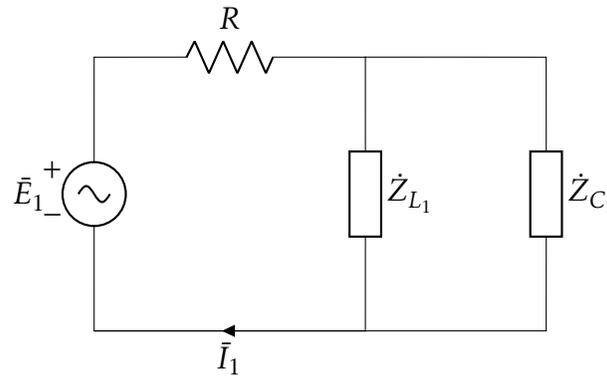


Figura 10.2: Rete simbolica per l'analisi alla pulsazione ω_1

Si calcolano le impedenze $\dot{Z}_{L_1} = 7.5\Omega$, $\dot{Z}_{C_1} = -4\Omega$ e quindi l'impedenza \dot{Z}_{p_1} corrispondente al parallelo tra L e C

$$\dot{Z}_{p_1} = \dot{Z}_{L_1} // \dot{Z}_{C_1} = 0 - j8.571$$

Si calcola quindi l'impedenza corrispondente alla serie tra R e l'impedenza \dot{Z}_{p_1}

$$\dot{Z}_1 = R + \dot{Z}_{p_1} = 10 - j8.571$$

Il fasore corrispondente alla prima armonica di $e(t)$ vale

$$\bar{E}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

Il fasore corrispondente all'armonica ω_1 della corrente $i(t)$ vale

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{100\sqrt{2}}{10 - j8.571} = 3.161 + j6.774 \quad I_1 = 7.476 A \quad \beta_1 = 1.134$$

Si determina quindi l'espressione temporale di corrente $i_1(t)$

$$i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \sin(500t + \beta_1) = 10.572 \sin(500t + 1.134)$$

Analisi alla pulsazione ω_3

La rete in regime sinusoidale alla pulsazione ω_3 viene risolta con metodo simbolico con riferimento alla figura 10.3.

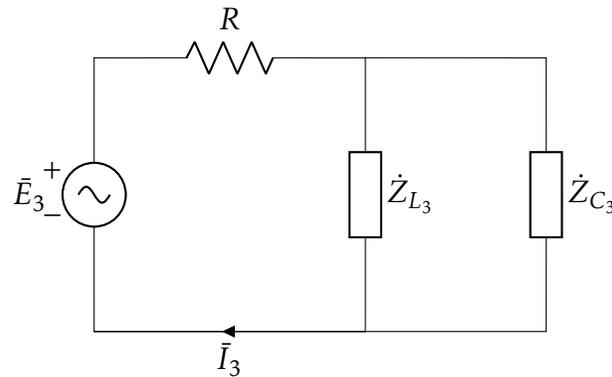


Figura 10.3: Rete simbolica per l'analisi alla pulsazione ω_3

Si calcolano le impedenze $\dot{Z}_{L_3} = 22.5 \Omega$, $\dot{Z}_{C_3} = -1.3 \Omega$ e quindi l'impedenza \dot{Z}_{p_3} corrispondente al parallelo tra L e C

$$\dot{Z}_{p_3} = \dot{Z}_{L_3} // \dot{Z}_{C_3} = 0 - j1.417$$

Si calcola quindi l'impedenza corrispondente alla serie tra R e l'impedenza \dot{Z}_{p_1}

$$\dot{Z}_3 = R + \dot{Z}_{p_3} = 10 - j1.417$$

Il fasore corrispondente alla prima armonica di $e(t)$ vale

$$\bar{E}_3 = \frac{25}{\sqrt{2}} e^{j\pi/2} = j \frac{25}{\sqrt{2}}$$

Il fasore corrispondente all'armonica ω_3 della corrente $i(t)$ vale

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{j125\sqrt{2}}{10 - j1.417} = -1.391 + j3.926 \quad I_3 = 4.165 A \quad \beta_3 = 1.911$$

Si determina quindi l'espressione temporale di $i_3(t)$

$$i_3(t) = I_3 \sqrt{2} \sin(500t + \beta_3) = 5.891 \sin(500t + 1.911)$$

Il valore della potenza attiva uscente dal generatore è data dall'espressione

$$P_e = E_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + E_3 \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = 293 W$$

essendo $\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = 0 - 1.134 = -1.134$ e $\varphi_3 = \alpha_3 - \beta_3 = \pi/2 - 1.1911 = 0.38$

Osservazioni

Nel caso specifico di questa rete, la potenza attiva P_e erogata dal generatore può essere calcolata anche in modo alternativo e più veloce visto che l'unico componente che può assorbire potenza attiva è il resistore.

Si può quindi calcolare il valore efficace I_R della corrente del resistore e da questa P_R

$$I_R = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 8.558 A$$

$$P_e = P_R = R \cdot I_R^2 = 4 \cdot 8.558^2 = 293 W$$

10.2 Analisi armonica con due ingressi periodici

Della rete lineare di figura 10.4 sono noti i valori di L , C , R e le espressioni temporali delle grandezze impresse periodiche

$$e(t) = E_0 + E_{1M} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + E_{2M} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$j(t) = J_{1M} \sin(\omega_1 t + \beta_1)$$

Determinare:

- Il valore efficace E della tensione impressa periodica $e(t)$
- La potenza attiva P_R assorbita da R

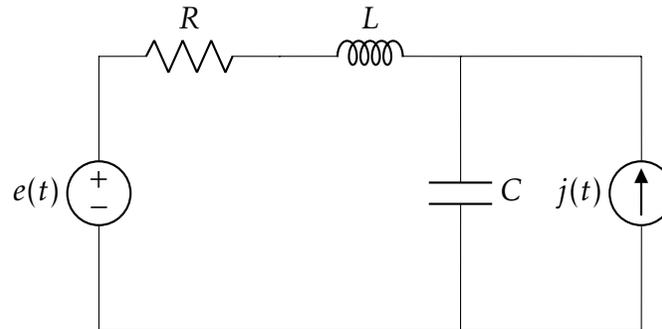


Figura 10.4: Rete elettrica lineare con due ingressi periodici

$$L = 4 \text{ mH} \quad C = 8 \text{ mF} \quad R = 0.5 \Omega \quad \omega_1 = 125 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 250 \text{ rad/s}$$

$$E_0 = 10 \text{ V} \quad E_{1M} = 30 \text{ V} \quad \alpha_1 = \pi/4 \text{ rad} \quad E_{2M} = 40 \text{ V} \quad \alpha_2 = 2\pi/3 \text{ rad} \quad J_{1M} = 20 \text{ A} \quad \beta_1 = \pi/4 \text{ rad}$$

Soluzione

Per calcolare il valore efficace della tensione impressa periodica utilizziamo l'espressione

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2} = 36.74 \text{ V}$$

essendo $E_1 = E_{1M}/\sqrt{2} = 21.213 \text{ V}$ ed $E_2 = E_{1M}/\sqrt{2} = 28.284 \text{ V}$ i valori efficaci delle componenti armoniche della $e(t)$.

Per calcolare la potenza P_R assorbita dal resistore, possiamo utilizzare la relazione

$$P_R = R \cdot I_R^2$$

dove I_R è il valore efficace della corrente $i_R(t)$ sul resistore. Data la linearità della rete, possiamo ricavare la $i_R(t)$ sommando i contributi corrispondenti alle soluzioni in regime stazionario e in regime sinusoidale alle pulsazioni ω_1 e ω_2 .

Analisi in regime stazionario

La rete in regime stazionario è rappresentata in figura 10.5. Si noti che il condensatore è stato sostituito con un circuito aperto, così come il generatore di corrente periodica che ha valore costante nullo. La soluzione di regime stazionario è dunque: $I_{R_0} = 0$.

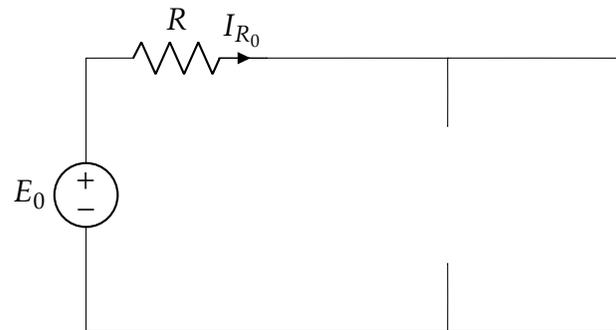


Figura 10.5: Rete elettrica in regime stazionario

Analisi alla pulsazione ω_1

Nella rete simbolica alla pulsazione ω_1 riportata in figura 10.6, i fasori corrispondenti alla prima armonica di $e(t)$ e $j(t)$ valgono

$$\bar{E}_1 = \frac{E_{1M}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha_1} = \frac{30}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = 15 + j15$$

$$\bar{J}_1 = \frac{J_{1M}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = 10 + j10$$

Le impedenze di R , L e C valgono

$$\dot{Z}_R = R = 0.5 \quad \dot{Z}_{L_1} = j(\omega_1 L) = j0.5 \quad \dot{Z}_{C_1} = j\left(\frac{-1}{\omega_1 C}\right) = -j$$

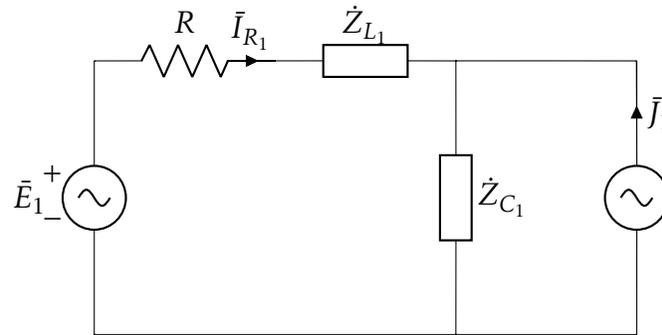


Figura 10.6: Rete simbolica alla pulsazione ω_1

Trasformando il generatore affine di corrente simbolico (\bar{J}_1 , \dot{Z}_{C_1}) nel corrispondente generatore affine di tensione simbolico (\bar{E}_{J_1} , \dot{Z}_{C_1}), con $\bar{E}_{J_1} = \bar{J}_1 \cdot \dot{Z}_{C_1} = 10 - j10$, si può calcolare la corrente come

$$\bar{I}_{R_1} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_{J_1}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_{C_1}} = -20 + j30 \quad I_{R_1} = 36.055 A \quad \beta_{R_1} = 2.159$$

Analisi alla pulsazione ω_2

Nella rete simbolica alla pulsazione ω_2 riportata in figura 10.6, è presente un solo ingresso, cioè la tensione impressa di $e(t)$ con pulsazione ω_2 a cui corrisponde il fasore

$$\bar{E}_2 = \frac{E_{2M}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha_2} = \frac{40}{\sqrt{2}} e^{j2\pi/3} = -14.142 + j 24.495$$

Le impedenze di R , L e C valgono

$$\dot{Z}_R = R = 0.5 \quad \dot{Z}_{L_2} = j(\omega_2 L) = j1 \quad \dot{Z}_{C_2} = j\left(\frac{-1}{\omega_2 C}\right) = -j0.5$$

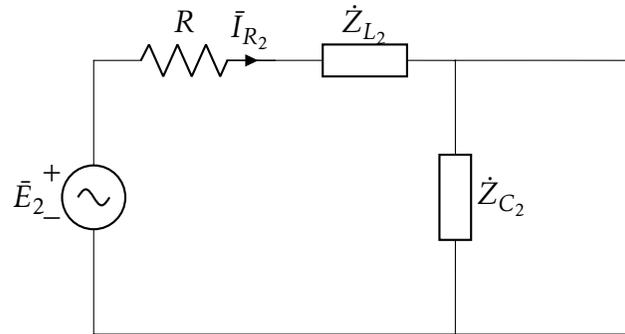


Figura 10.7: Rete simbolica alla pulsazione ω_2

La corrente \bar{I}_{R_2} può essere calcolata come

$$\bar{I}_{R_2} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{L_2} + \dot{Z}_{C_2}} = 10.353 + j 38.637 \quad I_{R_1} = 40 A \quad \beta_{R_1} = 1.3090$$

Il valore efficace I_R della corrente del resistore vale dunque

$$I_R = \sqrt{I_{R_0}^2 + I_{R_1}^2 + I_{R_2}^2} = \sqrt{0^2 + 36.055^2 + 40^2} = 53.852 A$$

e la potenza attiva assorbita risulta dunque

$$P_R = R \cdot I_R^2 = 0.5 \cdot 53.852^2 = 1450 W$$

11

Reti elettriche in regime variabile aperiodico

11.1 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - L$

Della rete di figura 11.1 sono noti i valori della resistenza R , dell'induttanza L e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della corrente $i(t)$ per $t > 0$.

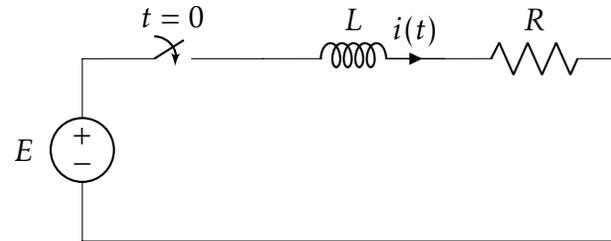


Figura 11.1: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10 \text{ V} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad L = 20 \text{ mH}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, l'induttore L , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$.

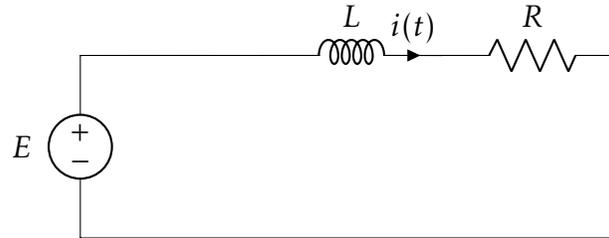


Figura 11.2: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.2, scrivendo la LKT per l'unica maglia e sostituendo le equazioni dei due bipoli ideali passivi, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

L'equazione omogenea associata si ottiene azzerando il termine noto

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$Ls + R = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{R}{L}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = L/R = 20 \cdot 10^{-3} / 10 = 2 \text{ ms}$$

11.2 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - C$

Della rete di figura 11.3 sono noti i valori della resistenza R , dell'induttanza C e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$.

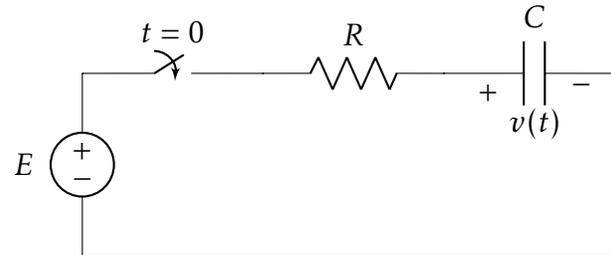


Figura 11.3: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10 \text{ V} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad C = 100 \text{ } \mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$.

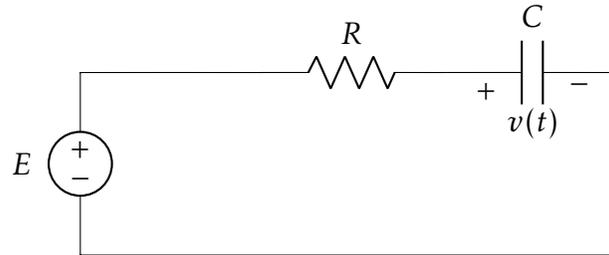


Figura 11.4: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.4, scrivendo la LKT per l'unica maglia e sostituendo le equazioni dei due bipoli ideali passivi, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E$$

L'equazione omogenea associata si ottiene azzerando il termine noto

$$RC \frac{dv}{dt} + v = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$RCs + 1 = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{1}{RC}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = RC = 10 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 1 \text{ ms}$$

11.3 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1 + R_2) - L$

Della rete di figura 11.5 sono noti i valori della resistenze R_1 ed R_2 , dell'induttanza L e della corrente impressa costante $j(t) = J$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con il deviatore in posizione 1. All'istante $t = 0$ il deviatore viene portato in posizione 2. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della corrente $i(t)$ per $t > 0$.

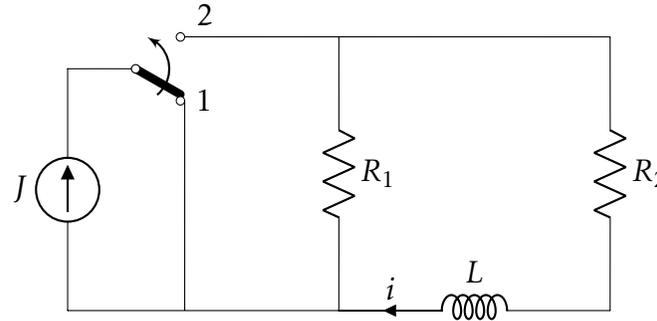


Figura 11.5: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$J = 2A \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 10\Omega \quad L = 20mH$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, l'induttore L , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$.

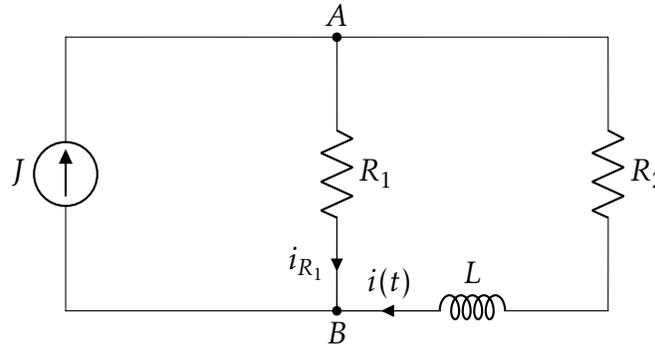


Figura 11.6: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.6, scrivendo la LKT per la maglia a destra e sostituendo le equazioni dei bipoli ideali passivi, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$R_1 i_{R_1} = L \frac{di}{dt} + R_2 i$$

Scrivendo la LKC nel nodo A o B , si può esprimere la corrente i_{R_1} come $i_{R_1} = J - i$ e la ODE diventa

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) i = R_1 J$$

L'equazione omogenea associata si ottiene azzerando il termine noto

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) i = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$Ls + (R_1 + R_2) = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{R_1 + R_2}{L}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{20} = 1 \text{ ms}$$

Nota

Provare a ottenere la stessa soluzione calcolando dapprima l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore e poi utilizzando le formule già ottenute nell'esercizio precedente.

11.4 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1 + R_2) - C$

Della rete di figura 11.7 sono noti i valori della resistenze R_1 ed R_2 , della capacità C e della corrente impressa costante $j(t) = J$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con il deviatore in posizione 1. All'istante $t = 0$ il deviatore viene portato in posizione 2. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$.

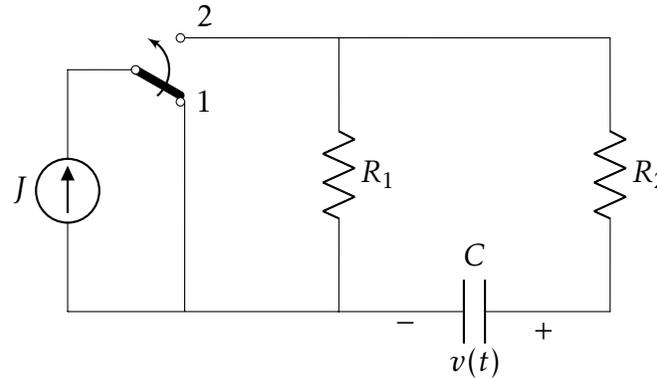


Figura 11.7: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$J = 2 \text{ A} \quad R_1 = 10 \, \Omega \quad R_2 = 10 \, \Omega \quad C = 100 \, \mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$. Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.8, scrivendo la LKT per la maglia a destra e sostituendo le equazioni dei bipoli ideali passivi, si ottiene

$$R_1 i_{R_1} = v + R_2 i_{R_2}$$

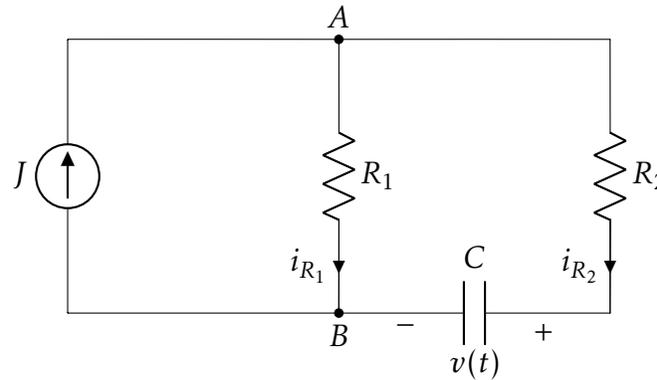


Figura 11.8: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

R_2 e C sono in serie, si può esprimere la corrente di R_2 come $i_{R_2} = i_C = C \frac{dv}{dt}$

Inoltre, applicando la LKC al nodo A o B , si può esprimere la corrente di R_1 come $i_{R_1} = J - i_C = J - C \frac{dv}{dt}$

Sostituendo le espressioni di i_{R_1} e i_{R_2} , si ottiene dunque la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$(R_1 + R_2) C \frac{dv}{dt} + v = R_1 J$$

L'equazione omogenea associata si ottiene azzerando il termine noto

$$(R_1 + R_2) C \frac{dv}{dt} + v = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$(R_1 + R_2)Cs + 1 = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = (R_1 + R_2)C = 20 \cdot 20 \cdot 100^{-6} = 2 \text{ ms}$$

Osservazioni

Si sarebbe potuto arrivare alla stessa ODE in modo più rapido sostituendo il GAC (J, R_1) con il corrispondente GAT ($E = R_1 J, R_1$) come in figura 11.9. In questo caso tutti i bipoli sono in serie e si può scrivere direttamente la ODE

$$(R_1 + R_2)C \frac{dv}{dt} + v = E = R_1 J$$

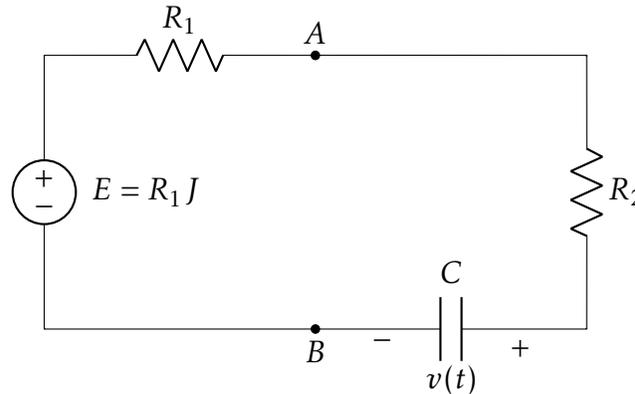


Figura 11.9: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$: GAC \rightarrow GAT

11.5 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $(R_1//R_2) - C$

Della rete di figura 11.10 sono noti i valori della resistenze R_1 ed R_2 , della capacità C e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$.

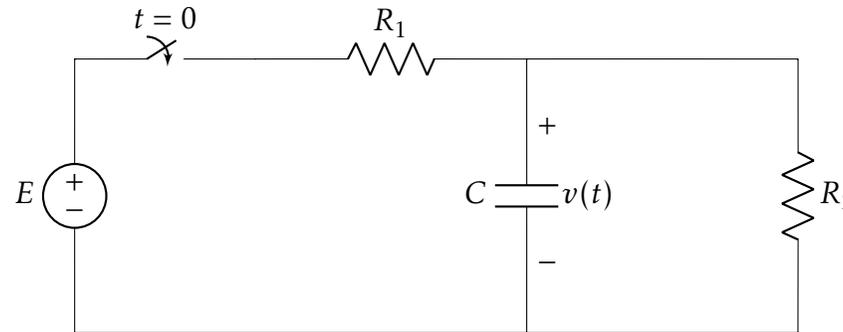


Figura 11.10: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10 \text{ V} \quad R_1 = 10 \text{ } \Omega \quad R_2 = 40 \text{ } \Omega \quad C = 50 \text{ } \mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$. Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.11, scrivendo la LKT per la maglia a sinistra e sostituendo le equazioni dei bipoli ideali passivi, si ottiene

$$R_1 i_{R_1} + v = E$$

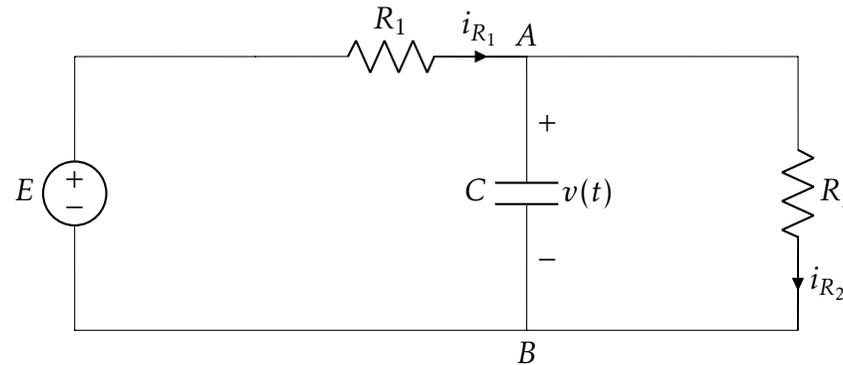


Figura 11.11: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Inoltre, applicando la LKC al nodo A o B , si può esprimere la corrente di R_1 come

$$i_{R_1} = i_C + i_{R_2} = C \frac{dv}{dt} + v/R_2$$

Sostituendo l'espressione di i_{R_1} , si ottiene dunque la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$R_1 C \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v = E$$

L'equazione omogenea associata si ottiene azzerando il termine noto

$$R_1 C \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$R_1 C s + \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{R_1 + R_2}{(R_1 R_2)C}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 8 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 40 \text{ ms}$$

Osservazioni

Si sarebbe potuto arrivare alla stessa ODE in modo più rapido sostituendo il GAT (E, R_1) con il corrispondente GAC ($J = E/R_1, R_1$) come in figura 11.12. In questo caso tutti i bipoli sono in parallelo e applicando la LKC al nodo A o B si può scrivere direttamente la ODE in questa forma

$$i_{R_1} + i_{R_2} + i_C = J \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + C \frac{dv}{dt} = \frac{E}{R_1}$$

che, opportunamente riordinata coincide con la precedente.

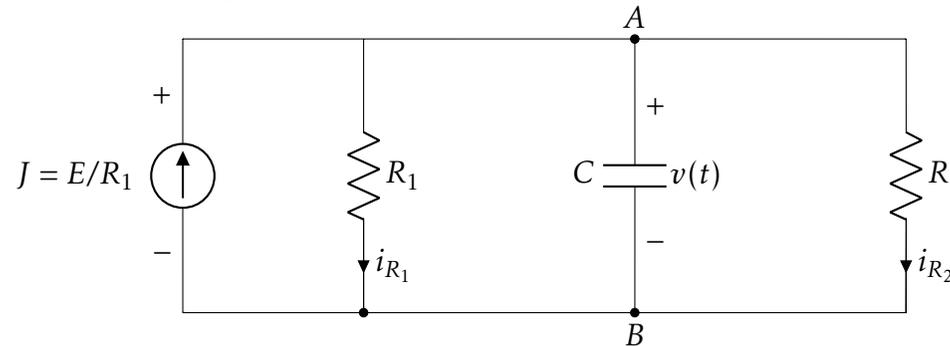


Figura 11.12: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$: GAC \rightarrow GAT

11.6 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - C_1 - C_2$

Della rete di figura 11.13 sono noti i valori della resistenza R , delle capacità C_1 e C_2 e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della corrente $i(t)$ per $t > 0$.

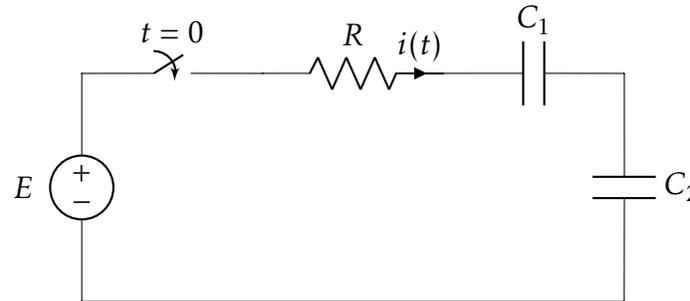


Figura 11.13: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10 \text{ V} \quad R = 5 \Omega \quad C_1 = 100 \mu\text{F} \quad C_2 = 400 \mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, i condensatori C_1 e C_2 . Essendo connessi in serie, hanno la stessa corrente e il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$.

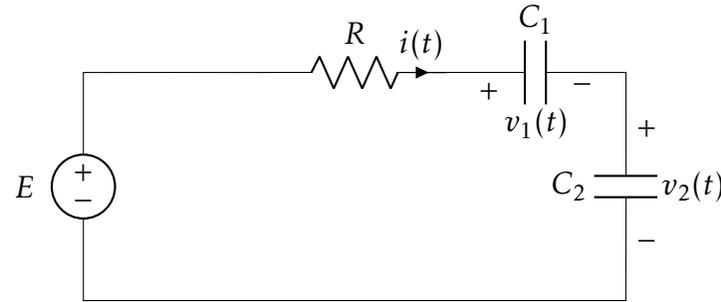


Figura 11.14: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.14, scrivendo la LKT per l'unica maglia si ottiene

$$Ri + v_1 + v_2 = E$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo e utilizzando le relazioni $i = C_1 dv_1/dt = C_2 dv_2/dt$, si ottiene la seguente ODE lineare omogenea del primo ordine

$$R \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$Rs + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{1}{RC_s} \quad \text{con} \quad C_s = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 80 \mu\text{F}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = RC_s = 5 \cdot 80 \cdot 10^{-6} = 400 \mu\text{s}$$

11.7 Costante di tempo T di un circuito del primo ordine $R - L_1 - L_2$

Della rete di figura 11.15 sono noti i valori della resistenza R , delle induttanze L_1 e L_2 e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la costante di tempo T che determina l'evoluzione della corrente $i(t)$ per $t > 0$.

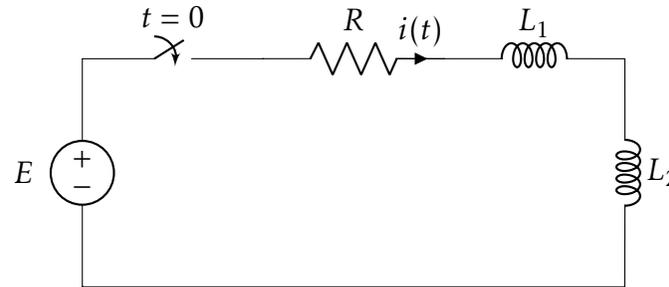


Figura 11.15: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10 \text{ V} \quad R = 10 \Omega \quad L_1 = 100 \text{ mH} \quad L_2 = 200 \text{ mH}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, gli induttori L_1 e L_2 . Essendo connessi in serie, hanno la stessa corrente e il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$.

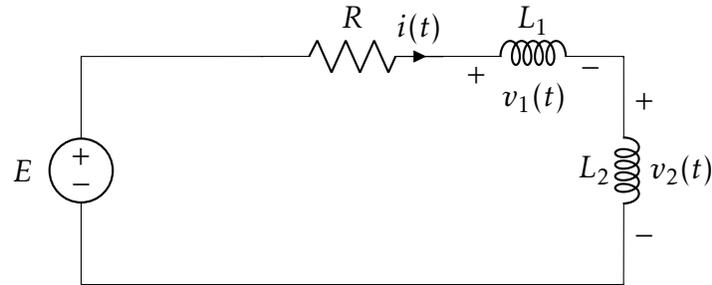


Figura 11.16: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.16, scrivendo la LKT per l'unica maglia si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine

$$L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + Ri = E$$

Azzerando il termine noto e raccogliendo il termine comune (di/dt) si ottiene l'omogenea associata

$$(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

a cui corrisponde l'equazione caratteristica

$$(L_1 + L_2)s + R = 0$$

che ha per soluzione la radice reale negativa

$$s = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$

Essendo $s < 0$, si definisce la costante di tempo $T = -\frac{1}{s}$ che risulta

$$T = \frac{L_1 + L_2}{R} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{10} = 30 \text{ ms}$$

11.8 Modi naturali di un circuito del secondo ordine $R-L-C$ serie

Della rete di figura 11.17 sono noti i valori della resistenza R , dell'induttanza L , della capacità C e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Calcolare le radici dell'equazione caratteristica e determinare i modi naturali che determinano l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$ per i tre casi corrispondenti ai valori di R indicati in tabella

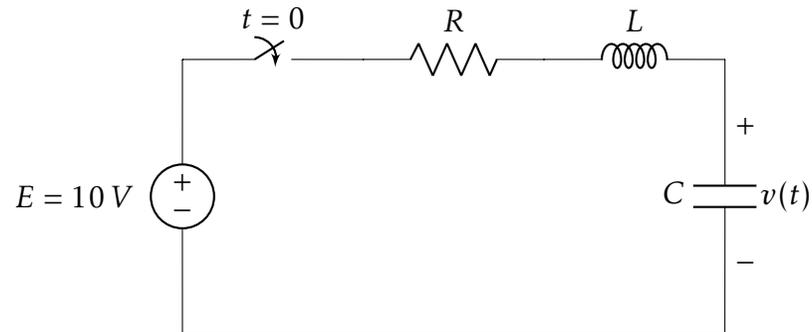


Figura 11.17: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10\text{ V} \quad R_1 = \{10, 20, 40\} \Omega \quad L = 10\text{ mH} \quad C = 100\ \mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, l'induttore L e il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 2$.

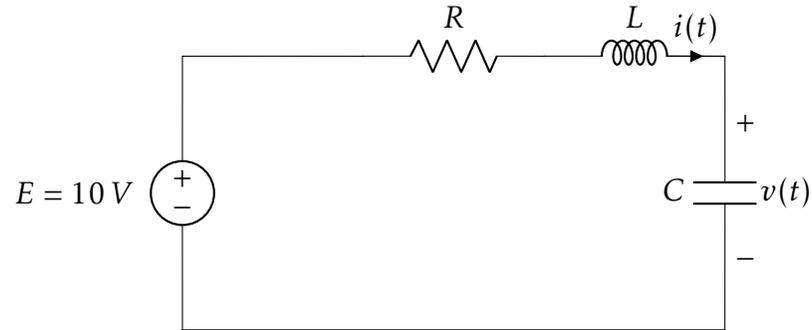


Figura 11.18: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.18, scrivendo la LKT per la maglia e sostituendo le equazioni dei bipoli ideali passivi, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del secondo ordine

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = E$$

Dividendo per LC e azzerando il termine noto si ottiene l'equazione omogenea associata

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0$$

L'equazione caratteristica corrispondente è

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

che può essere riformulata, introducendo la "costante di smorzamento" $\alpha = \frac{R}{2L}$ e la "pulsazione naturale" $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, come

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

le cui radici sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Per determinare il “comportamento” della variabili di stato (tensione $v(t)$ del condensatore, corrente $i(t)$ dell’induttore) nella serie $R-L-C$ per $t > 0$ si può confrontare la resistenza R del circuito con la “resistenza critica” definita come

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 20\Omega$$

I tre casi possibili ($R = 40 > R_c$, $R = 20 = R_c$, $R = 10 < R_c$) sono analizzati nel seguito

Caso “sovrasmorzato” ($R = 40 > R_c$)

Essendo $R > R_c$ le radici dell’equazione caratteristica sono entrambe reali e negative:

$$s_1 = -\alpha + \alpha_s = -267.95 \quad , \quad s_2 = -\alpha - \alpha_s = -3732.05$$

con

$$\alpha_s = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{2000^2 - 1000^2} = 1732.05$$

Si possono quindi introdurre le costanti di tempo “grande” T_g e “piccola” T_p

$$T_g = -1/s_1 = \frac{1}{\alpha - \alpha_s} = \frac{1}{267.95} = 3732.05 \mu s$$

$$T_p = -1/s_2 = \frac{1}{\alpha + \alpha_s} = \frac{1}{3732} = 267.95 \mu s$$

L’evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$ è dunque caratterizzato dalla somma di due esponenziali decrescenti

$$v(t) = V_g e^{-t/T_g} + V_p e^{-t/T_p}$$

dove V_g e V_p sono le due costanti di integrazione da ricavare imponendo i vincoli sull’integrale completo, che comprende l’integrale dell’omogenea e l’integrale particolare.

Caso “criticamente smorzato” ($R = 20 = R_C$)

Essendo $R = R_C$ c'è un'unica radice dell'equazione caratteristica reale, negativa e con molteplicità due:

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -1000$$

Si può quindi introdurre la costante di tempo T

$$T = -1/s_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1000} = 1 \text{ ms}$$

Visto che la molteplicità della radice è doppia, l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$ è caratterizzato dalla somma di un esponenziale decrescente con un esponenziale decrescente moltiplicato per una rampa (funzione linearmente crescente nel tempo)

$$v(t) = V_1 e^{-t/T} + V_2 t e^{-t/T}$$

dove V_1 e V_2 sono le due costanti di integrazione da ricavare imponendo i vincoli sull'integrale completo, che comprende l'integrale dell'omogenea e l'integrale particolare.

Caso “sottosmorzato” ($R = 10 < R_C$)

Essendo $R < R_C$ le radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate con parte reale negativa:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_s = -500 + j866.03 \quad , \quad s_2 = -\alpha - j\omega_s = -500 - j866.035$$

con ω_s (pulsazione naturale smorzata)

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1000^2 - 500^2} = 866.03$$

L'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$ è dunque caratterizzata da un modo naturale pseudo armonico del tipo

$$v(t) = e^{-\alpha t} [V_s \sin(\omega_s t) + V_c \cos(\omega_s t)] = e^{-500t} [V_s \sin(866.03 t) + V_c \cos(866.03 t)]$$

V_s e V_c sono le due costanti di integrazione da ricavare imponendo i vincoli sull'integrale completo, che comprende l'integrale dell'omogenea e l'integrale particolare.

Nota

In tutti e tre i casi, la soluzione completa si ottiene sommando la soluzione particolare (qui non calcolata) alla soluzione dell'omogenea associata e ricavando le due costanti di integrazione imponendo i vincoli sulla tensione e la sua derivata in $t = 0^+$.

11.9 Modi naturali di un circuito del secondo ordine non dissipativo (oscillatore $L - C$)

Della rete di figura 11.19 sono noti i valori dell'induttanza L , della capacità C e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Calcolare le radici dell'equazione caratteristica e determinare i modi naturali che determinano l'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$

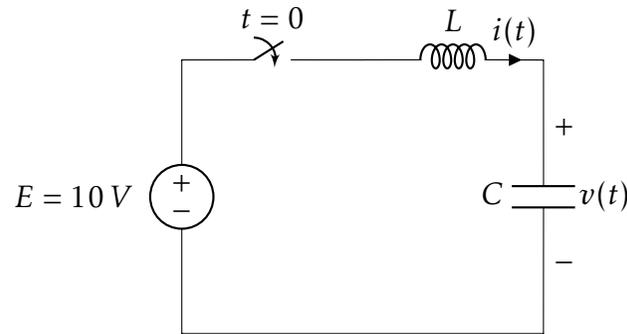


Figura 11.19: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante

$$E = 10\text{ V} \quad R_1 = \{10, 20, 40\} \Omega \quad L = 10\text{ mH} \quad C = 100\text{ }\mu\text{F}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, l'induttore L e il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 2$.

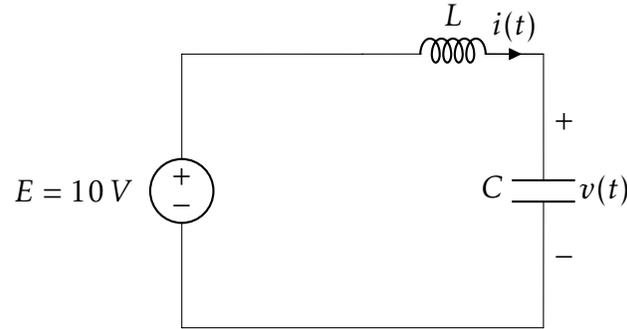


Figura 11.20: Rete elettrica lineare in regime variabile per $t > 0$

Considerando la rete per $t > 0$, come in figura 11.20, scrivendo la LKT per la maglia e sostituendo le equazioni dei bipoli ideali passivi, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del secondo ordine

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + v = E$$

Dividendo per LC e azzerando il termine noto si ottiene l'equazione omogenea associata

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{LC} v = 0$$

L'equazione caratteristica corrispondente è

$$s^2 + \omega_0^2 = 0$$

avendo introdotto la "pulsazione naturale" ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate con parte reale nulla

$$s_{1,2} = \pm j \omega_0$$

L'evoluzione della tensione $v(t)$ per $t > 0$ è dunque caratterizzata da un modo naturale armonico del tipo

$$v(t) = V_s \sin(\omega_0 t) + V_c \cos(\omega_0 t) = V_s \sin(1000 t) + V_c \cos(1000 t)$$

dove V_s e V_c sono le due costanti di integrazione da ricavare imponendo i vincoli sull'integrale completo, che comprende l'integrale dell'omogenea e l'integrale particolare.

Nota

Si noti come la soluzione dell'oscillatore LC è un caso particolare di circuito $R-L-C$ serie sottosmorzato con $R = 0$.

11.10 Analisi di un circuito del primo ordine $R - L$ con ingresso costante

Della rete di figura 11.21 sono noti i valori delle resistenze R_1 ed R_2 , dell'induttanza L e della corrente impressa costante $j(t) = J$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Determinare l'espressione temporale della corrente i_L nell'induttore per $t > 0$.

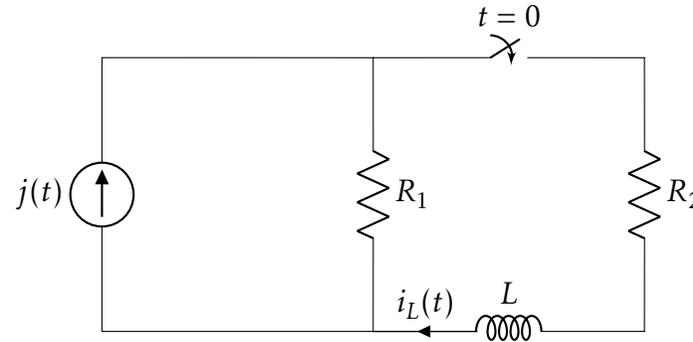


Figura 11.21: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante: l'interruttore chiude in $t = 0$

$$J = 40 \text{ A} \quad R_1 = 5 \text{ } \Omega \quad R_2 = 15 \text{ } \Omega \quad L = 0.5 \text{ H}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo accumulatore di energia, l'induttore L , per cui il numero di variabili di stato è $p = 1$ e il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale di ordine $n \leq p = 1$.

Analisi della rete prima dell'istante critico ($t < 0$)

Per $t < 0$ la rete è in regime stazionario con interruttore aperto, come riportato in figura 11.22 e, quindi, non può circolare corrente su nessuno dei bipoli che sono in serie all'interruttore (R_2 ed L). La soluzione di regime (stazionario) è dunque

$$I_L = 0$$

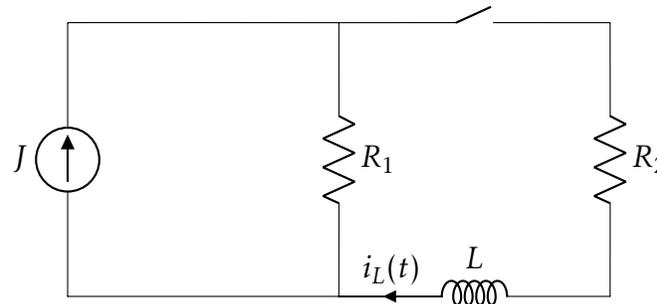


Figura 11.22: Rete elettrica lineare in regime stazionario per $t < 0$: l'induttore viene sostituito con un cortocircuito ideale.

Analisi della rete all'istante critico ($t = 0$)

Gli induttori possono presentare tensioni impulsive solo se appartengono ad un insieme di taglio (IDT) "impulsivo"¹.

Considerando la rete riportata in figura 11.23, corrispondente alla configurazione per $t > 0$, si può notare come il lato dell'induttore non appartenga ad un IDT impulsivo e pertanto non c'è discontinuità nella corrente i_L

$$\delta\lambda = L\Delta i_l = 0 \quad \Rightarrow \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_L = 0$$

¹Un IDT impulsivo è formato esclusivamente da induttori, doppi bipoli induttivi, generatori ideali di corrente ed interruttori/deviatori che aprono.

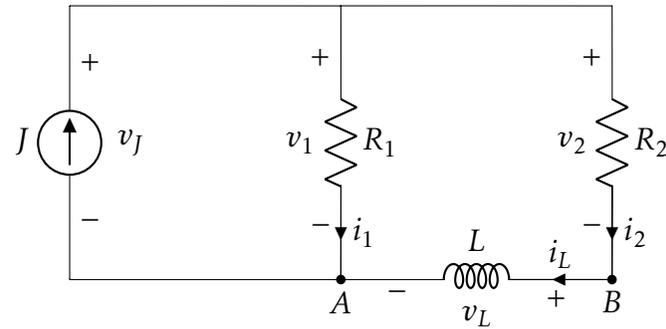


Figura 11.23: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante: configurazione per $t > 0$

Analisi della rete dopo l'istante critico ($t > 0$)

Con riferimento alla rete di figura 11.23, si scrivono le LKT sulle due maglie (anelli) e le LKC nei nodi A e B

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_2 + v_L \\ v_1 = v_J \\ J = i_1 + i_L \\ i_2 = i_L \end{array} \right.$$

Inoltre si considerano le equazioni dei bipoli passivi

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \end{array} \right.$$

che, sostituite nella prima LKT, portano a scrivere

$$R_1 i_1 = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt}$$

Infine, sostituendo $i_1 = J - i_L$, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine nella corrente i_L

$$L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L = R_1 J$$

che può essere espressa come somma della soluzione $i_{L_o}(t)$ dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare $i_{L_p}(t)$ dell'equazione non omogenea.

Soluzione particolare (regime stazionario)

Dat che l'ingresso è costituito da una corrente costante (J), la soluzione particolare coincide con la soluzione di regime stazionario, in cui si può sostituire l'induttore con un corto circuito ideale come in figura 11.24

Applicando le formule del partitore di corrente si ottiene la seguente espressione per l'integrale particolare i_{L_p}

$$i_{L_p} = I_L = J \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 40 \cdot \frac{5}{20} = 10 \text{ A}$$

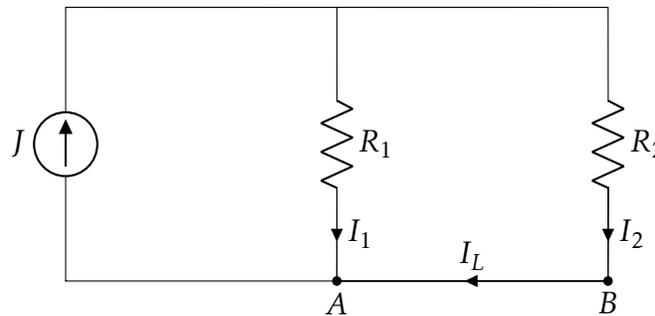


Figura 11.24: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante: configurazione per $t > 0$

Soluzione dell'omogenea associata

Per risolvere l'equazione omogenea si considera innanzitutto l'equazione caratteristica nell'incognita s

$$sL + (R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} = -\frac{20}{0.5} = -40 \text{ s}^{-1}$$

Dato che $s < 0$ è conveniente introdurre la costante di tempo del circuito T definita come

$$T = -\frac{1}{s} = 25 \text{ ms}$$

L'integrale dell'omogenea associata è dunque

$$i_{L_0} = I_0 \cdot e^{st} = I_0 \cdot e^{-t/T}$$

Soluzione generale

Sommando ora gli integrali dell'omogenea e particolare, si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$i_L = i_{L_p} + i_{L_0} = 10 + I_0 \cdot e^{-40t}$$

Calcolo della costante di integrazione

La costante di integrazione I_0 si determina in base alla condizione iniziale $i_L(0^+) = 0$ da cui

$$I_L + I_0 \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = -I_L = -10 \text{ A}$$

Espressione della corrente $i_L(t)$ per $t > 0$

L'espressione temporale della corrente $i_L(t)$ per $t > 0$ è dunque

$$i_L(t) = 10(1 - e^{-40t})$$

11.11 Analisi di un circuito del primo ordine $R - L$ con ingresso sinusoidale

Della rete di figura 11.25 sono noti i valori delle resistenze, dell'induttanza L e della corrente impressa sinusoidale $j(t) = J_M \sin(\omega t)$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Determinare l'espressione temporale della corrente i_L nell'induttore per $t > 0$.

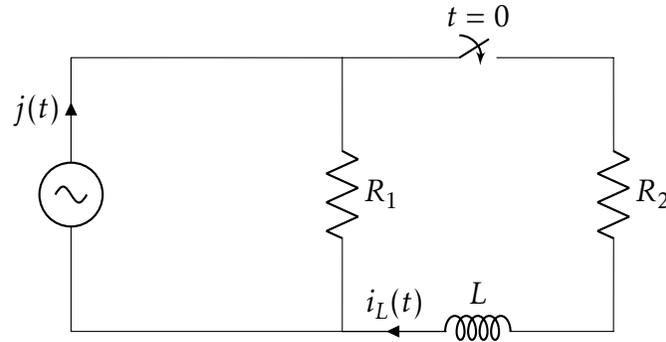


Figura 11.25: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante: l'interruttore chiude in $t = 0$

$$J_M = 100 \text{ A} \quad \omega = 1000 \text{ rad/s} \quad R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 20 \Omega \quad L = 40 \text{ mH}$$

Soluzione

Nella rete è presente un solo bipolo dinamico, l'induttore L , per cui il numero il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale di ordine $n = 1$.

Analisi della rete prima dell'istante critico ($t < 0$)

Per $t < 0$ la rete è in regime stazionario con interruttore aperto, come riportato in figura 11.26 e, quindi, non può circolare corrente su nessuno de bipoli che sono in serie all'interruttore (R_2 ed L). La soluzione di regime (sinusoidale) è dunque

$$i_L(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

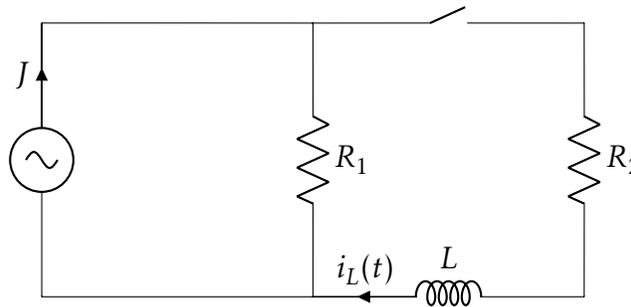


Figura 11.26: Rete elettrica lineare in regime sinusoidale per $t < 0$: l'induttore viene sostituito con un cortocircuito ideale.

Analisi della rete all'istante critico ($t = 0$)

Gli induttori possono presentare tensioni impulsive solo se appartengono ad un insieme di taglio (IDT) "impulsivo"².

Considerando la rete riportata in figura 11.27, corrispondente alla configurazione per $t > 0$, si può notare come il lato dell'induttore non appartanga ad un IDT impulsivo e pertanto non c'è discontinuità nella corrente i_L

$$\delta\lambda = L\Delta i_l = 0 \quad \Rightarrow \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_L = 0$$

²Un IDT impulsivo è formato esclusivamente da induttori, doppi bipoli induttivi, generatori ideali di corrente ed interruttori/deviatori che aprono.

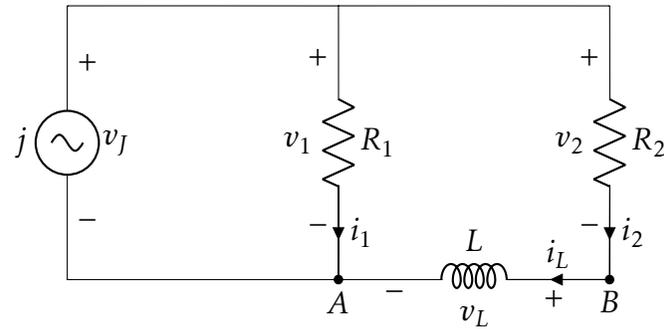


Figura 11.27: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso sinusoidale: configurazione per $t > 0$

Analisi della rete dopo l'istante critico ($t > 0$)

Con riferimento alla rete di figura 11.27, si scrivono le LKT sulle due maglie (anelli) e le LKC nei nodi A e B

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_2 + v_L \\ v_1 = v_J \\ j = i_1 + i_L \\ i_2 = i_L \end{array} \right.$$

Inoltre si considerano le equazioni dei bipoli passivi

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \end{array} \right.$$

che, sostituite nella prima LKT, portano a scrivere

$$R_1 i_1 = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt}$$

Infine, sostituendo $i_1 = J - i_L$, si ottiene la seguente ODE lineare non omogenea del primo ordine nella corrente i_L

$$L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L = R_1 j$$

che può essere espressa come somma della soluzione $i_{L_o}(t)$ dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare $i_{L_p}(t)$ dell'equazione non omogenea.

Soluzione particolare (regime sinusoidale)

Dat che l'ingresso è costituito da una corrente sinusoidale, la soluzione particolare coincide con la soluzione di regime sinusoidale, che può essere calcolata sulla rete simbolica di figura 11.28 con $X_L = 40 \Omega$ e

$$\bar{j} = \frac{J_M}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

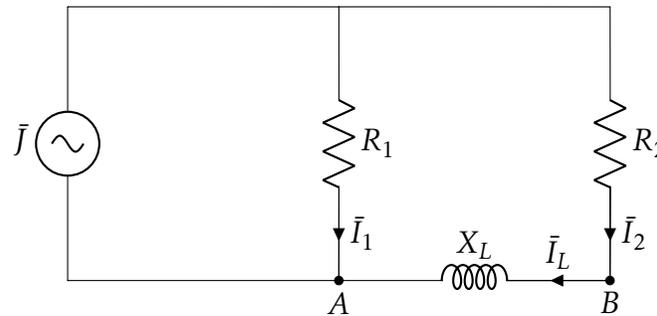


Figura 11.28: Rete simbolica per il calcolo della soluzione particolare con un ingresso sinusoidale: configurazione per $t > 0$

Applicando la formula del partitore di corrente simbolico si ottiene la seguente espressione per il fasore dell'integrale particolare

$$\bar{I}_{L_p} = \bar{j} \cdot \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + jX_L)} = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{10 + (20 + j40)} = \frac{12 - j16}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I_L = |\bar{I}_L| = 10\sqrt{2} \quad \beta = -0.927$$

a cui corrisponde la seguente espressione temporale

$$i_{L_p}(t) = I_L \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) = 20 \sin(\omega t - 0.927)$$

Soluzione dell'omogenea associata

Per risolvere l'equazione omogenea si considera innanzitutto l'equazione caratteristica nell'incognita s

$$sL + (R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} = -\frac{30}{40 \cdot 10^{-3}} = -750 \text{ s}^{-1}$$

Dato che $s < 0$ è conveniente introdurre la costante di tempo del circuito T definita come

$$T = -\frac{1}{s} = 1.3 \text{ ms}$$

L'integrale dell'omogenea associata è dunque

$$i_{L_0} = I_0 \cdot e^{st} = I_0 \cdot e^{-t/T}$$

Soluzione generale

Sommando gli integrali dell'omogenea e particolare, si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$i_L = i_{L_p} + i_{L_0} = 20 \sin(\omega t - 0.927) + I_0 \cdot e^{-750t}$$

Calcolo della costante di integrazione

La costante di integrazione I_0 si determina in base alla condizione iniziale $i_L(0^+) = 0$ da cui

$$20 \sin(-0.927) + I_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = -20 \sin(-0.927) = 16 \text{ A}$$

Espressione della corrente $i_L(t)$ per $t > 0$

L'espressione temporale della corrente $i_L(t)$ per $t > 0$ è dunque

$$i_L(t) = 20 \sin(\omega t - 0.927) + 16 e^{-750t}$$

11.12 Analisi di un circuito del secondo ordine ordine $R - L - C$ con ingresso sinusoidale

Nella rete di figura 11.29 l'interruttore è aperto per $t < 0$ ed il condensatore scarico. Sono noti i valori di R , L , C e della corrente impressa sinusoidale $j(t) = J_M \cos(\omega t)$, di L e di C . All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Determinare:

- l'espressione temporale della corrente $i(t)$ dell'induttore per $t > 0$
- l'espressione temporale della tensione $v(t)$ del condensatore per $t > 0$

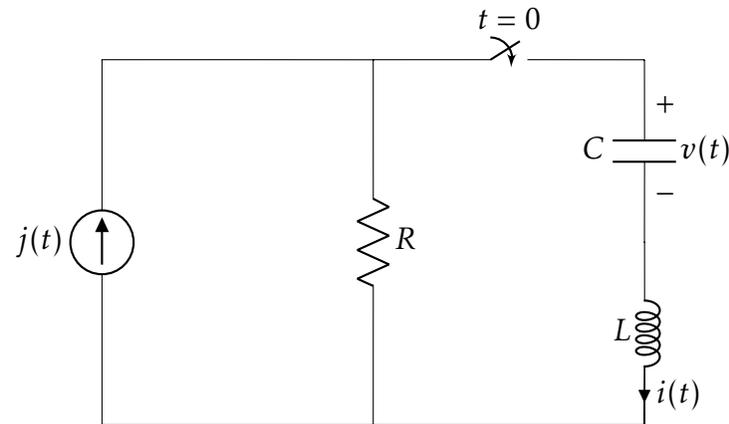


Figura 11.29: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso sinusoidale: l'interruttore chiude in $t = 0$

$$J_M = 15 \text{ A} \quad \omega = 500 \text{ rad/s} \quad R = 1.5 \text{ } \Omega \quad L = 3 \text{ mH} \quad C = 4/3 \text{ mF}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, l'induttore L e il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale di ordine $n = 2$.

Analisi della rete prima dell'istante critico ($t < 0$)

Per $t < 0$ la rete è in regime sinusoidale con interruttore aperto. Non potendo circolare corrente ed essendo nulla la tensione sul condensatore (dato del problema), le condizioni in $t = 0^-$ per le variabili di stato sono

$$i(0^-) = 0, \quad v(0^-) = 0$$

Analisi della rete all'istante critico ($t = 0$)

Gli induttori possono presentare tensioni impulsive solo se appartengono ad un "insieme di taglio (IDT) impulsivo"³ e i condensatori possono presentare correnti impulsive solo se appartengono ad una "maglia impulsiva"⁴.

Considerando la rete riportata in figura 11.30, corrispondente alla configurazione per $t > 0$, si può notare come non siano verificate le condizioni né per l'induttore né per il condensatore e quindi le variabili di stato si mantengono continue nell'istante critico

$$i(0^+) = i(0^-) = 0, \quad v(0^+) = v(0^-) = 0$$

Analisi della rete dopo l'istante critico ($t > 0$)

Con riferimento alla rete di figura 11.30, si scrivono le LKT sulle due maglie (anelli) e le LKC nei nodi A o B

$$\begin{cases} v_R = v + v_L \\ j = i_R + i \end{cases}$$

Inoltre si considerano le equazioni dei bipoli passivi

$$v_R = R i_R \quad i = C \frac{dv}{dt} \quad v_L = L \frac{di}{dt}$$

³Un IDT impulsivo è formato esclusivamente da induttori, doppi bipoli induttivi, generatori ideali di corrente ed interruttori/deviatori che aprono.

⁴Una maglia impulsiva è formata esclusivamente da condensatori, generatori ideali di tensione e interruttori (o deviatori) che chiudono

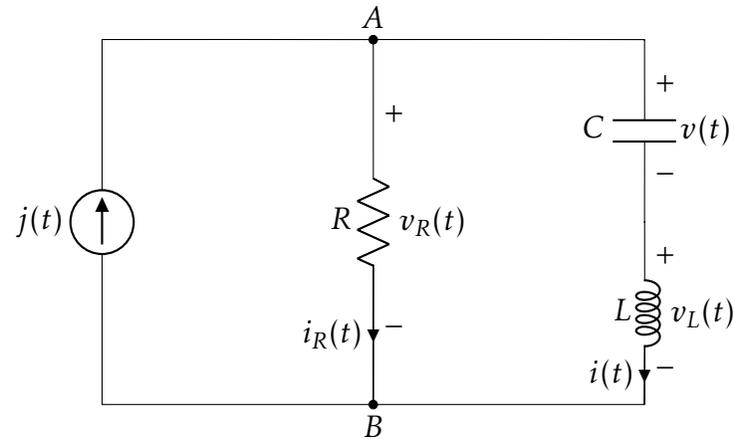


Figura 11.30: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante: configurazione per $t > 0$

che, sostituite nella LKT ed LKC, portano a scrivere la seguente ODE lineare non omogenea del secondo ordine nella tensione

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{R \cdot j}{LC}$$

che può essere espressa come somma della soluzione particolare $v_p(t)$ della ODE e della soluzione $v_o(t)$ dell'equazione omogenea associata.

Soluzione particolare (regime sinusoidale)

Dat che l'ingresso è costituito da una corrente sinusoidale, la soluzione particolare coincide con la soluzione di regime sinusoidale, che può essere calcolata sulla rete simbolica di figura 11.31.

Essendo $X_L = 1.5 \Omega$ e $X_C = -1.5 \Omega$, induttore e condensatore sono in risonanza serie e possono essere assimilate ad un cortocircuito su cui si richiude tutta la corrente del generatore ideale⁵ e la soluzione di regime sinusoidale per le variabili di stato risulta particolarmente semplice da determinare. Per la corrente si ha

$$\bar{I} = \bar{J} = \frac{J_M}{\sqrt{2}} e^{j\pi/2} = j \frac{15}{\sqrt{2}}$$

⁵Si può dimostrare formalmente applicando la formula del partitore di corrente simbolico tra R ed il cortocircuito.

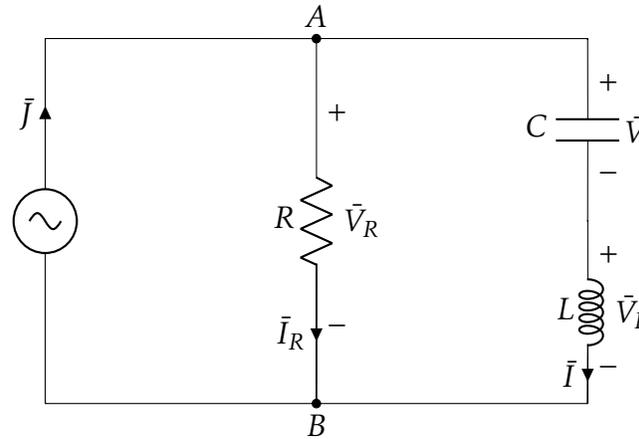


Figura 11.31: Rete elettrica lineare in regime sinusoidale: calcolo dell'integrale particolare

a cui corrisponde l'espressione temporale

$$i_p(t) = j(t) = 15 \cos(\omega t)$$

Per la tensione si ha

$$\vec{V} = jX_c \cdot \vec{I} = (-j1.5) \cdot \left(j \frac{15}{\sqrt{2}} \right) = \frac{22.5}{\sqrt{2}}$$

a cui corrisponde l'espressione temporale

$$v_p(t) = 22.5 \sin(\omega t)$$

Soluzione dell'omogenea associata

L'equazione caratteristica corrispondente è quella nota della serie $R - L - C$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

che può essere riformulata, introducendo la “costante di smorzamento” $\alpha = \frac{R}{2L} = 250$ e la “pulsazione naturale” $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 500$, come

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

le cui radici sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_s = -250 \pm j433$$

L’integrale dell’omogenea associata è dunque

$$v_0(t) = e^{-\alpha t} [V_s \sin(\omega_s t) + V_c \cos(\omega_c t)] = e^{-250t} [V_s \sin(433.01 t) + V_c \cos(433.01 t)]$$

Soluzione generale

Sommando ora gli integrali dell’omogenea e particolare, si ottiene l’integrale generale dell’equazione differenziale

$$v(t) = v_p(t) + v_0(t) = 22.5 \sin(500t) + e^{-250t} [V_s \sin(433 t) + V_c \cos(433 t)]$$

Calcolo delle costanti di integrazione

Le costanti di integrazione si determinano in base alle condizioni in $t = 0^+$ di $v(t)$ e della sua derivata prima. Innanzitutto, scrivendo la $v(t)$ in $t = (0^+)$ si ha

$$v(0^+) = 22.5 \cdot 0 + e^0 \cdot [V_s \cdot 0 + V_c \cdot 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad V_c = 0$$

La seconda condizione va imposta sulla derivata prima della tensione in $t = 0^+$, che è nulla visto che è nulla la corrente dell’induttore (in serie). Si ha infatti

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

Per imporre la condizione, ricaviamo l’espressione della $i(t)$, a partire dalla $v(t)$ in cui conviene già porre $V_c = 0$ per semplificare i conti:

$$v(t) = 22.5 \sin(500t) + e^{-250t} \cdot V_s \sin(433 t)$$

da cui si ottiene

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = C \cdot \left[(22.5 \cdot 500) \cdot \cos(500t) + (-250) \cdot e^{-250t} \cdot V_s \sin(433t) + e^{-250t} \cdot (433 \cdot V_s) \cos(433t) \right]$$

In $t = 0^+$ tale espressione diventa

$$i(0^+) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \cdot \left[(22.5 \cdot 500) \cdot 1 + (-250) \cdot 1 \cdot V_s \cdot 0 + 1 \cdot (433 \cdot V_s) \cdot 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad V_s = -\frac{(22.5 \cdot 500)}{433} = -25.98$$

Espressioni della tensione $v(t)$ e della corrente $i(t)$ per $t > 0$

L'espressione temporale della tensione $v(t)$ per $t > 0$ è dunque

$$v(t) = 22.5 \sin(500t) - e^{-250t} \cdot 25.98 \sin(433t)$$

L'espressione temporale della corrente $i(t)$ per $t > 0$ è dunque

$$i(t) = 15 \cdot \cos(500t) + e^{-250t} \cdot [8.66 \sin(433t) - 15 \cos(433t)]$$

Nota

Volendo calcolare $i(t)$ senza passare attraverso $v(t)$ si poteva procedere nel modo seguente:

Dapprima, a partire dalle stesse equazioni del circuito per $t > 0$, si ricava la seguente ODE lineare non omogenea del secondo ordine nella corrente

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{R}{L} \frac{dj(t)}{dt}$$

. Il calcolo delle radici del polinomio caratteristico dell'omogenea associata e il calcolo dell'integrale particolare coincidono con quanto già visto. Sommando gli integrali dell'omogenea e particolare, si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$i(t) = i_p(t) + i_0(t) = 15 \cos(500t) + e^{-250t} [I_s \sin(433t) + I_c \cos(433t)]$$

Le costanti di integrazione in questo si determinano in base alle condizioni in $t = 0^+$ di $i(t)$ e della sua derivata prima, ovvero

$$i(0^+) = 0$$

e:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_R(0^+)}{L} = \frac{Ri_R(0^+)}{L} = \frac{Rj(0^+)}{L} = 7.5 \cdot 10^3$$

11.13 Analisi di un circuito del primo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata

Della rete di figura 11.32 sono noti i valori di R , C e della tensione impressa costante $e(t) = E$.

La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto e con condensatore carico per $t < 0$ ($v(0^-) \neq 0$).

All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Determinare l'espressioni della tensione $v(t)$ per $t > 0$, utilizzando la trasformata di Laplace.

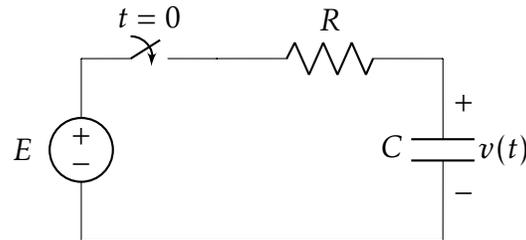


Figura 11.32: Rete lineare con un ingresso costante e interruttore che chiude in $t = 0$. Il condensatore è carico per $t < 0$ ($v(0^-) \neq 0$).

$$E = 10 \text{ V} \quad R = 2 \text{ } \Omega \quad C = 0.25 \text{ F} \quad v(0^-) = +2 \text{ V}$$

Soluzione

Nella rete è present un solo bipolo dinamico, il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 1$, ovvero da una funzione di trasferimento $H(s)$ con un polo.

Sostituiamo il generatore ideale di tensione costante in serie all'interruttore ideale che chiude in $t = 0$ con un generatore di tensione ideale a gradino $e(t) = Eu(t)$ come in figura 11.33.

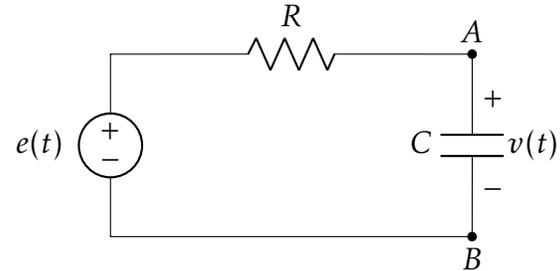


Figura 11.33: Rete lineare con un generatore di tensione ideale a gradino. Il condensatore è carico per $t < 0$ ($v(0^-) \neq 0$).

Trasformiamo poi il circuito dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa s (rete operatoriale), come in figura 11.34, avendo adottato lo schema equivalente (b) di figura 11.35 che risulta il più adatto per rappresentare il condensatore con dato iniziale non nullo ($v(0^-) \neq 0$) dato che consente di avere un'unica maglia.

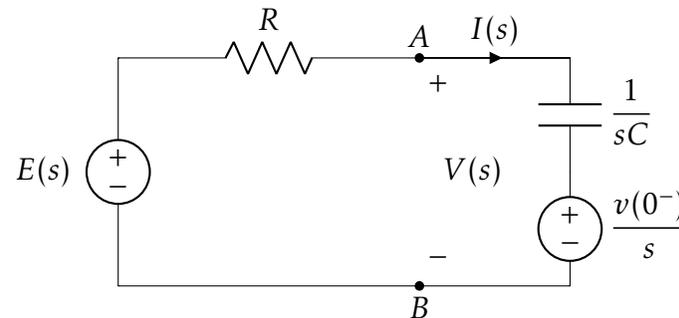


Figura 11.34: Rete operatoriale

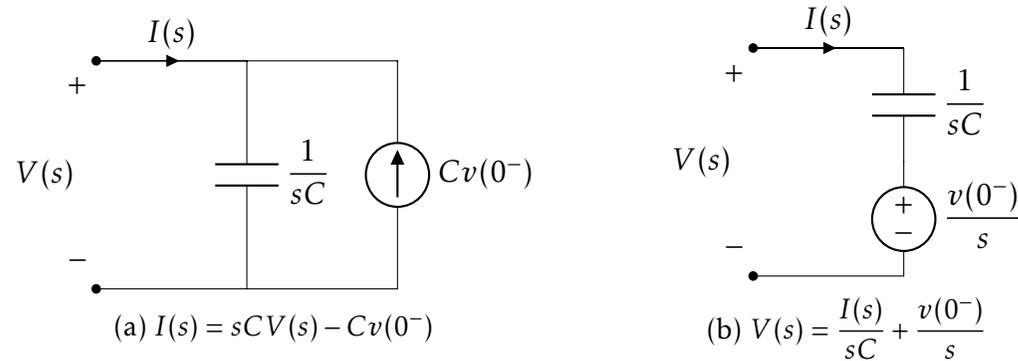


Figura 11.35: Schemi equivalenti per rappresentare nella rete operatoriale un condensatore con dato iniziale non nullo ($v(0^-) \neq 0$)

La trasformata di Laplace dell'ingresso è:

$$E(s) = \frac{E}{s} = \frac{10}{s}$$

Le impedenze operatoriali dei bipoli passivi sono:

$$Z_R = R = 2 \quad , \quad Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{4}{s}$$

La LKT applicata all'unica maglia della rete operatoriale di figura 11.34 risulta:

$$-E(s) + \left(R + \frac{1}{sC}\right) \cdot I(s) + \frac{v(0^-)}{s} = 0$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$-\frac{10}{s} + \left(2 + \frac{4}{s}\right) \cdot I(s) + \frac{2}{s} = 0$$

Riordinando i termini e risolvendo rispetto a $I(s)$ si ottiene:

$$I(s) = \frac{4}{s+2}$$

Ricaviamo quindi l'espressione della tensione del condensatore nella rete operatoriale:

$$V(s) = V_{AB}(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s} = \frac{16}{s(s+2)} + \frac{2}{s} = \frac{2s+20}{s(s+2)}$$

Per calcolare l'espressione della tensione $v(t)$ conviene scomporre la $V(s)$ in frazioni semplici:

$$V(s) = \frac{10}{s} - \frac{8}{s+2}$$

Si noti che si poteva pervenire alla stessa espressione più facilmente calcolando la $V(s)$ come:

$$V(s) = E(s) - R \cdot I(s) = \frac{10}{s} - 2 \frac{4}{s+2} = \frac{10}{s} - \frac{8}{s+2}$$

Sfruttando la proprietà di linearità della trasformata di Laplace si ottiene quindi:

$$v(t) = 10 - 8e^{-2t}$$

Si noti come l'espressione della $v(t)$ che è stata ricavata rispetti la condizione iniziale $v(0) = 2V$.

Inoltre, è consistente con l'equazione del bipolo condensatore ideale. Dall'espressione della tensione, si ricava infatti:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = 0.25 \frac{d}{dt} (10 - 8e^{-2t}) = 0.25 \cdot 8 \cdot 2e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

che coincide con l'espressione della corrente $i(t)$ per $t > 0$ che si ottiene come anti-trasformata della $I(s)$.

$$i(t) = 4e^{-2t}$$

Osservazioni

La soluzione della rete operatoriale può essere calcolata anche applicando la sovrapposizione degli effetti, facendo agire, uno alla volta, il generatore ideale $E(s)$ e il generatore "fittizio" che serve per tenere in conto della condizione iniziale sul condensatore carico.

Quando agisce solo $E(s)$ (risposta forzata) la corrente risulta:

$$I_f(s) = \frac{5}{s+2} \quad \Rightarrow \quad V_f(s) = E(s) - R \cdot I_f(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+2}$$

Sfruttando la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, si ottiene la risposta forzata $v_f(t)$:

$$v_f(t) = 10(1 - e^{-2t})$$

Quando agisce solo il generatore “fittizio” (condizione iniziale $v(0^-) \neq 0$, risposta libera), la corrente risulta:

$$I_l(s) = -\frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad V_l(s) = -R \cdot I_l(s) = \frac{2}{s+2}$$

Da cui si ottiene la risposta libera $v_l(t)$:

$$v_l(t) = 2e^{-2t}$$

La risposta completa è data dalla somma della risposta forzata e della risposta libera:

$$v(t) = v_f(t) + v_l(t) = 10(1 - e^{-2t}) + 2e^{-2t} = 10 - 8e^{-2t}$$

11.14 Analisi di un circuito del secondo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata

Della rete di figura 11.36 sono noti i valori delle resistenze R_1 , R_2 , dell'induttanza L , della capacità C e della tensione impressa costante $e(t) = E$. La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Determinare l'espressione della tensione $v(t)$ con il riferimento di figura per $t > 0$ utilizzando la trasformata di Laplace

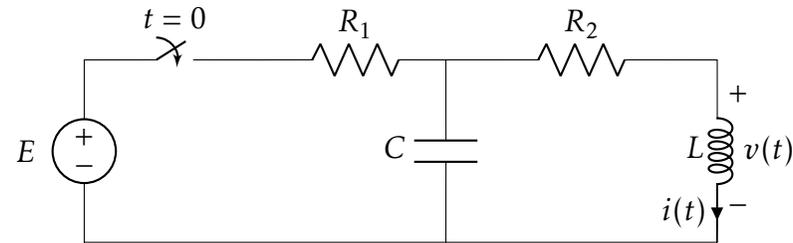


Figura 11.36: Rete elettrica lineare in regime variabile con un ingresso costante e interruttore che chiude in $t = 0$

$$E = 10 \text{ V} \quad R_1 = 1 \text{ } \Omega \quad R_2 = 5 \text{ } \Omega \quad C = 1/3 \text{ F} \quad L = 1 \text{ H}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, l'induttore L e il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 2$.

Sostituiamo il generatore ideale di tensione costante in serie all'interruttore ideale che chiude in $t = 0$ con un generatore di tensione ideale a gradino in $t = 0$, come in figura 11.37.

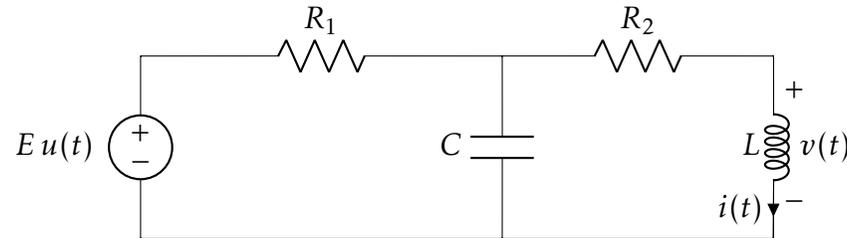


Figura 11.37: Rete elettrica lineare in regime variabile con un generatore di tensione ideale a gradino in $t = 0$

Si trasforma dapprima il circuito dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa s (rete operatoriale), come riportato in figura 11.38. Per risolvere tale rete si adotta il metodo delle correnti di anello, per cui in figura sono riportati anche i riferimenti delle correnti cicliche K_1 e K_2 .

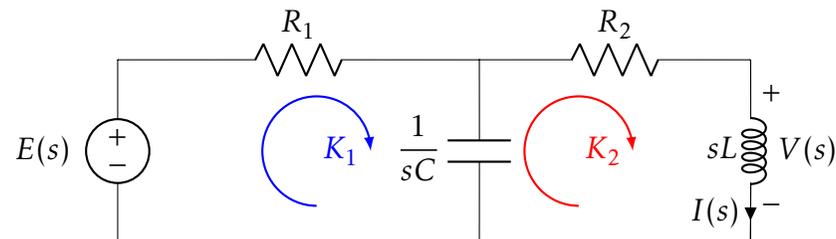


Figura 11.38: Rete operatoriale

Le equazioni sui due anelli sono:

$$\begin{cases} (Z_{R_1} + Z_C)K_1 - Z_C K_2 & = E(s) \\ (Z_{R_2} + Z_C + Z_L)K_2 - Z_C K_1 & = 0 \end{cases}$$

L'espressione della trasformata di Laplace dell'ingresso $e(t) = Eu(t)$ è:

$$E(s) = \frac{E}{s} = \frac{10}{s}$$

Le impedenze operatoriali dei bipoli passivi sono

$$Z_{R_1} = R_1, \quad Z_{R_2} = R_2, \quad Z_L = sL = s, \quad Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$

Sostituendo le espressioni nelle equazioni delle correnti di anello si ottiene:

$$\begin{cases} (1 + \frac{3}{s})K_1 - \frac{3}{s}K_2 = \frac{10}{s} \\ (5 + \frac{3}{s} + s)K_2 - \frac{3}{s}K_1 = 0 \end{cases}$$

che possono essere riscritte, come:

$$\begin{cases} (s+3)K_1 - 3K_2 = 10 \\ (s^2 + 5s + 3)K_2 - 3K_1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$K_1 = \frac{(s^2 + 5s + 3)}{3}K_2$$

che sostituito nella prima, porta a scrivere:

$$(s+3)\frac{(s^2 + 5s + 3)}{3}K_2 - 3K_2 = 10$$

Con facili passaggi algebrici si ottiene:

$$K_2(s) = \frac{30}{s^3 + 8s^2 + 18s} = \frac{10}{s} \cdot \frac{3}{s^2 + 8s + 18}$$

Dividendo l'espressione precedente per il termine $E(s) = 10/s$ che costituisce la L-trasformata dell'ingresso, si ottiene la funzione di trasferimento $H(s) = I(s)/E(s)$:

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 18}$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento

$$D(s) = s^2 + 8s + 18 = 0$$

si possono ricavare i due poli di $H(s)$ che coincidono con le radici dell'equazione caratteristica:

$$p_{1,2} = -4 \pm j\sqrt{2}$$

La corrente dell'induttore $I(s)$ può dunque essere scritta come:

$$I(s) = K_2(s) = \frac{30}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

da cui si ricava l'espressione della tensione:

$$V(s) = sL \cdot I(s) = s \cdot I(s) = \frac{30}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{30}{(s+4-j\sqrt{2})(s+4+j\sqrt{2})} = \frac{30}{(s+4)^2+2} = \frac{30}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2+2}$$

che è stata opportunamente rimaneggiata per mettere in evidenza una delle espressioni note di L-trasformata:

$$F(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \Leftrightarrow f(t) = e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$$

Si ricava quindi l'espressione temporale della tensione $v(t)$:

$$v(t) = \frac{30}{\sqrt{2}} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(\sqrt{2}t)$$

Osservazioni

Per completezza calcoliamo anche l'espressione temporale della corrente, partendo da:

$$I(s) = \frac{30}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

che conviene scomporre in frazioni semplici:

$$I(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2}$$

Le costanti possono essere ricavate utilizzando il metodo dei residui:

$$k_i = (s-p_i) \cdot I(s)|_{s=p_i}$$

Per il calcolo di k_0 ($s = p_0 = 0$) si ha:

$$k_0 = s \cdot I(s)|_{s=0} = \frac{30}{(-p_1)(-p_2)} = \frac{5}{3}$$

Per il calcolo di k_1 ($s = p_1 = -4 + j\sqrt{2}$) si ha:

$$k_1 = s \cdot I(s)|_{s=p_1} = \frac{30}{p_1(p_1-p_2)} = \frac{5}{3} \frac{-1+j2\sqrt{2}}{2}$$

Per il calcolo di k_2 ($s = p_2 = -4 - j\sqrt{2}$) si ha:

$$k_2 = s \cdot I(s)|_{s=p_2} = \frac{30}{p_2(p_2-p_1)} = \frac{5}{3} \frac{-1-j2\sqrt{2}}{2} = k_1^*$$

L'espressione temporale della corrente per $t > 0$ risulta quindi:

$$i(t) = k_0 + k_1 \cdot e^{p_1 t} + k_2 \cdot e^{p_2 t} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \frac{-1+j2\sqrt{2}}{2} \cdot e^{(-4+j\sqrt{2})t} + \frac{5}{3} \frac{-1-j2\sqrt{2}}{2} \cdot e^{(-4-j\sqrt{2})t}$$

da cui si ottiene:

$$i(t) = \frac{5}{3} \left[1 + e^{-4t} \left(\frac{-1+j2\sqrt{2}}{2} e^{j2\sqrt{2}t} + \frac{-1-j2\sqrt{2}}{2} e^{-j2\sqrt{2}t} \right) \right] = \frac{5}{3} \left[1 - e^{-4t} (\cos(\sqrt{2}t) + 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)) \right]$$

11.15 Analisi di un circuito del secondo ordine (stato non-nullo) mediante \mathcal{L} -trasformata

Della rete di figura 11.39 sono noti i valori di R , L , C e della tensione impressa costante $e(t) = E$.

La rete è in regime stazionario per $t < 0$ con l'interruttore aperto e dati iniziali noti. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.

Determinare le espressioni della tensione $v(t)$ e della corrente $i(t)$ per $t > 0$, utilizzando la trasformata di Laplace.

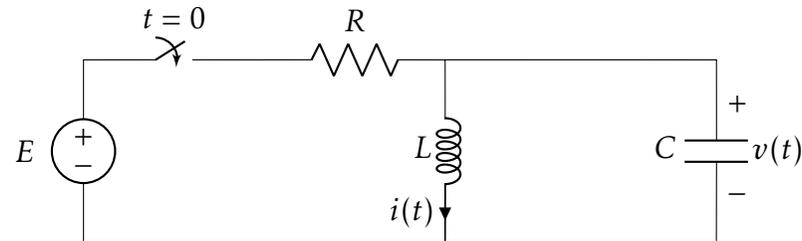


Figura 11.39: Rete lineare con un ingresso costante e interruttore che chiude in $t = 0$. Induttore e condensatore sono carichi in $t = 0$

$$E = 1 \text{ V} \quad R = 0.2 \text{ } \Omega \quad C = 1 \text{ F} \quad L = 0.25 \text{ H} \quad v(0^-) = +3 \text{ V} \quad i(0^-) = -1 \text{ A}$$

Soluzione

Nella rete sono presenti due bipoli dinamici, l'induttore L e il condensatore C , per cui il comportamento della rete sarà descritto da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine $n = 2$, ovvero da una funzione di trasferimento $H(s)$ con due poli.

Sostituiamo il generatore ideale di tensione costante in serie all'interruttore ideale che chiude in $t = 0$ con un generatore di tensione ideale a gradino in $t = 0$, come in figura 11.40.

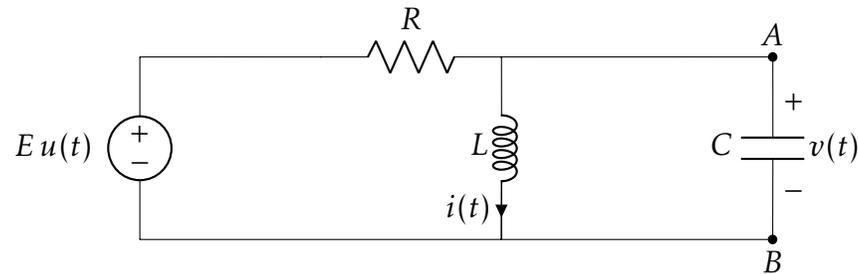


Figura 11.40: Rete elettrica lineare in regime variabile con un generatore di tensione ideale a gradino in $t = 0$

Trasformiamo poi il circuito dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa s (rete operatoriale), come in figura 11.41, avendo adottato lo schema equivalente (a) di figura 11.42 per rappresentare un induttore con dato iniziale non nullo ($i(0^-) \neq 0$) e lo schema equivalente (a) di figura 11.43 per rappresentare il condensatore con dato iniziale non nullo ($v(0^-) \neq 0$).

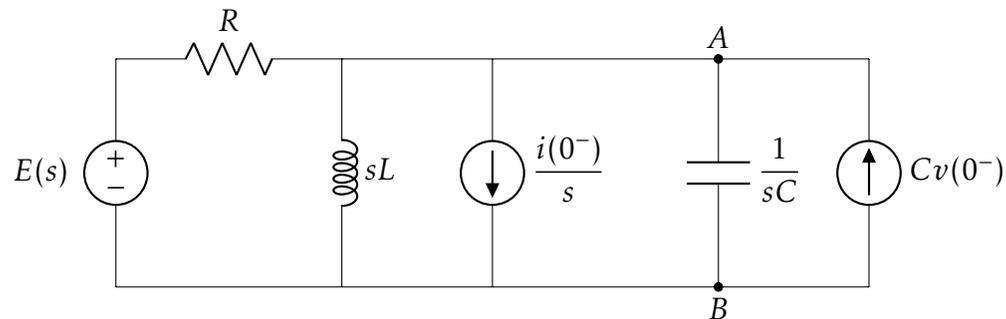


Figura 11.41: Rete operatoriale

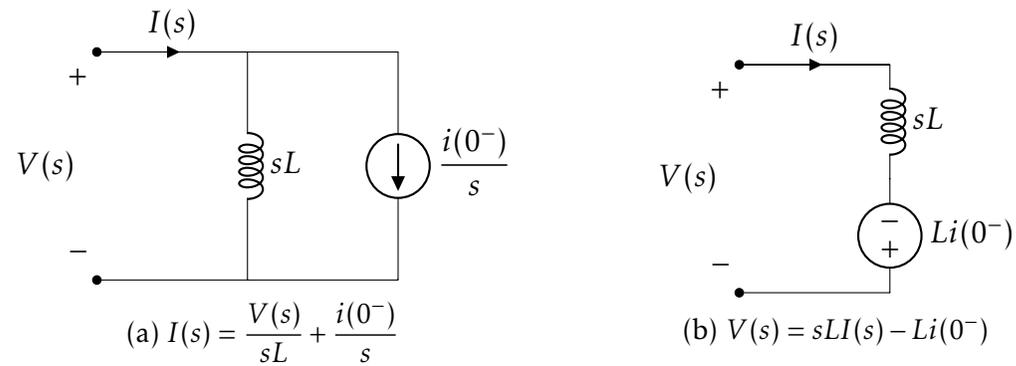


Figura 11.42: Schemi equivalenti per rappresentare nella rete operatoriale un induttore con dato iniziale non nullo ($i(0^-) \neq 0$)

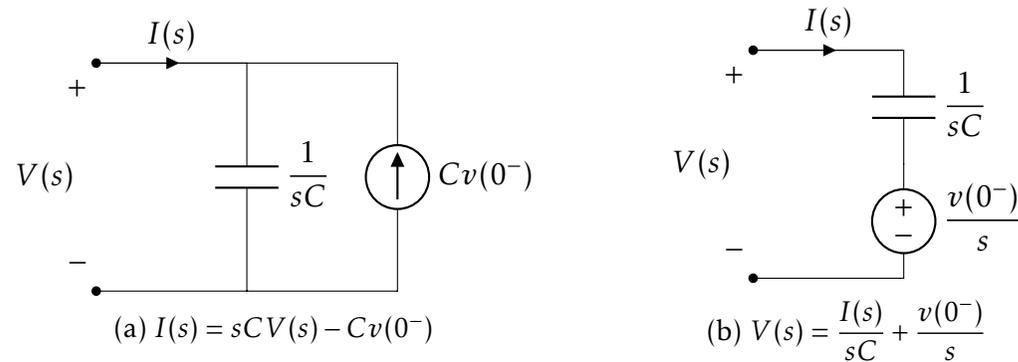


Figura 11.43: Schemi equivalenti per rappresentare nella rete operatoriale un condensatore con dato iniziale non nullo ($v(0^-) \neq 0$)

Nella rete operatoriale di figura 11.41, $E(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso $e(t) = Eu(t)$:

$$E(s) = \frac{E}{s} = \frac{1}{s}$$

Le impedenze operatoriali dei bipoli passivi sono:

$$Z_R = R = 0.2, \quad Z_L = sL = 0.25s, \quad Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s}$$

La soluzione risulta più agevole sostituendo il generatore affine di tensione con un generatore affine di corrente come in figura 11.44:

$$J(s) = \frac{E(s)}{R} = \frac{5}{s}$$

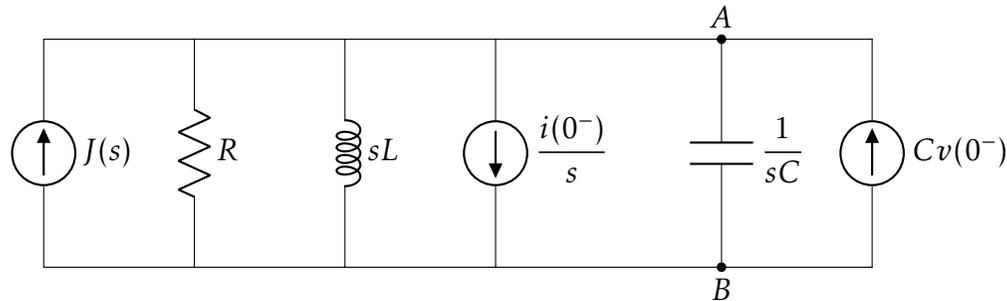


Figura 11.44: Rete operatoriale con generatore affine di corrente al posto del generatore affine di tensione

Nella rete sono presenti solo due nodi (A e B). Utilizzando il metodo dei potenziali nodali e ponendo $U_B(s) = 0$, si arriva a scrivere un'unica equazione nel potenziale incognito del nodo A :

$$U_A(s) \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) = J(s) - \frac{i(0^-)}{s} + Cv(0^-)$$

dove il termine tra parentesi rappresenta l'ammettenza di nodo e il termine a destra dell'uguale rappresenta la corrente di nodo della rete operatoriale.

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$U_A(s) \left(5 + \frac{4}{s} + s \right) = \frac{5}{s} + \frac{1}{s} + 3$$

da cui:

$$U_A(s) = \frac{6 + 3s}{s^2 + 5s + 4} = \frac{6 + 3s}{(s+1)(s+4)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+4}$$

La tensione sul condensatore $V(s) = U_A(s) - U_B(s) = U_A(s)$ è costituita dalla somma di due termini.

Per la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, la $v(t)$ sarà costituita dalla somma delle anti trasformate di tali termini:

$$v(t) = e^{-t} + 2e^{-4t}$$

Per calcolare la corrente $I(s)$ utilizziamo l'espressione corrispondente al modello equivalente che abbiamo utilizzato:

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s} = \frac{6 + 3s}{(s+1)(s+4)} \cdot \frac{4}{s} + \frac{-1}{s} = -\frac{4}{s+1} - \frac{2}{s+4} + \frac{6}{s} - \frac{1}{s} = -\frac{4}{s+1} - \frac{2}{s+4} + \frac{5}{s}$$

Per la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, la $i(t)$ sarà costituita dalla somma delle anti-trasformate di tali termini:

$$i(t) = -4e^{-t} - 2e^{-4t} + 5u(t)$$

12

Circuiti magnetici

12.1 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita

In figura 12.1 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di lunghezza l_{Fe} , sezione S_{Fe} e permeabilità μ_{Fe} , su cui è avvolto un induttore di N spire percorse dalla corrente costante I . Determinare il circuito magnetico equivalente e calcolare l'induttanza L dell'induttore.

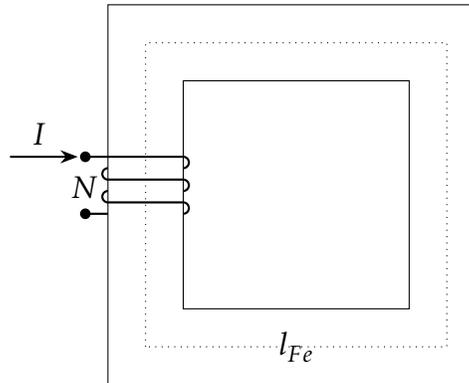


Figura 12.1: Dispositivo magnetico

$$N = 60 \quad I = 2 \text{ A} \quad l_{Fe} = 1.2 \text{ m} \quad S_{Fe} = 60 \text{ cm}^2 \quad \mu_{Fe} = 1000\mu_0 \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Soluzione

Il circuito magnetico associato al dispositivo magnetico si costruisce seguendo i seguenti passi:

1. Si calcola la riluttanza di ciascun tratto elementare in cui viene scomposto il dispositivo magnetico. (Eventuali tratti del tubo di flusso che si sviluppano in materiali con $\mu = \infty$ hanno riluttanza nulla.)
Nel caso specifico l'unica riluttanza da determinare vale:

$$\mathcal{R}_{Fe} = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} = \frac{1.2}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 159.15 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

2. Si calcola la forza magnetomotrice (f.m.m.) di ciascun induttore. Nel caso specifico l'unica f.m.m. da determinare vale:

$$\mathcal{F} = NI = 60 \cdot 2 = 120 \text{ A}$$

Nel circuito magnetico, alla riluttanza \mathcal{R}_{Fe} è associata una resistenza e a \mathcal{F} è associato un generatore ideale di f.m.m. il cui verso si ricava considerando il verso della corrente e il senso di avvolgimento delle spire. Utilizzando la regola della mano destra si deduce che l'induttore di figura 12.1 produce un flusso verso l'alto e quindi il generatore di f.m.m. andrà inserito nel circuito magnetico figura 12.2 con il segno + in alto.

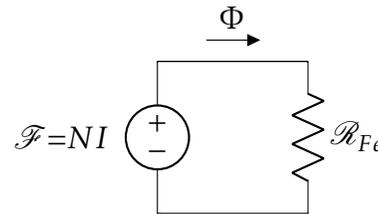


Figura 12.2: Circuito magnetico associato al dispositivo magnetico di figura 12.1

Nel circuito di figura è facile calcolare il flusso Φ (nell'analogia circuitale corrisponde alla corrente della maglia):

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{Fe}} = \frac{120}{159.15 \cdot 10^3} = 7.54 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Per il calcolo dell'induttanza basta considerare che il flusso concatenato dall'induttore è

$$\Phi_N = N \cdot \Phi = 45.24 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Infine si ottiene il valore dell'induttanza L

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{45.24 \cdot 10^{-3}}{2} = 22.62 \text{ mH}$$

12.2 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita e un traferro

In figura 12.3 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di lunghezza l_{Fe} , sezione S_{Fe} e permeabilità μ_{Fe} , dotato di un tratto in aria di lunghezza g , su cui è avvolto un induttore di N spire percorse dalla corrente costante I . Determinare il circuito magnetico equivalente, calcolare l'induttanza L dell'induttore, nonché l'energia magnetica immagazzinata.

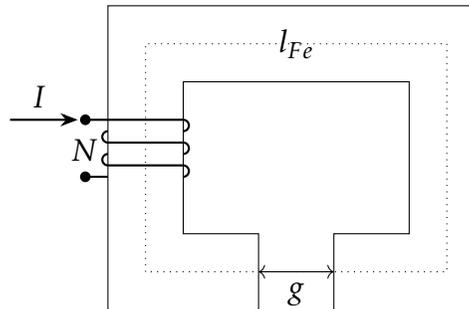


Figura 12.3: Dispositivo magnetico

$$N = 60 \quad I = 2A \quad l_{Fe} = 1.2m \quad g = 2cm \quad S_{Fe} = 60cm^2 \quad \mu_{Fe} = 1000\mu_0 \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$$

Soluzione

Il circuito magnetico associato al dispositivo magnetico si costruisce seguendo i seguenti passi:

1. Si calcola la riluttanza di ciascun tratto elementare in cui viene scomposto il dispositivo magnetico, compresi i tratti in aria. (Eventuali tratti del tubo di flusso che si sviluppano in materiali con $\mu = \infty$ hanno riluttanza nulla.)

Nel caso specifico le riluttanze valgono:

$$\mathcal{R}_{Fe} = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} = \frac{1.2}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 159.15 \cdot 10^3 H^{-1}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 S_{Fe}} = \frac{0.02}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 2652.6 \cdot 10^3 H^{-1}$$

Si noti che la riluttanza del tratto in aria è molto maggiore di quella del tratto nel ferro sebbene quest'ultimo sia molto più lungo (ciò è dovuto alla molto maggiore permeabilità del ferro rispetto all'aria). Questo fatto è tipicamente descritto dicendo (in modo molto approssimato ma ingegneristicamente significativo) che "un millimetro d'aria è come un metro di ferro".

2. Si calcola la forza magnetomotrice (f.m.m.) di ciascun induttore. Nel caso specifico l'unica f.m.m. da determinare vale:

$$\mathcal{F} = NI = 60 \cdot 2 = 120 A$$

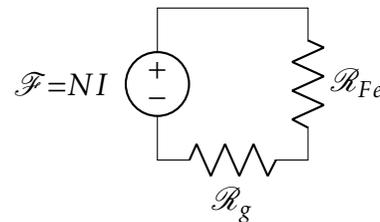


Figura 12.4: Circuito magnetico associato al dispositivo magnetico di figura 12.3

Nel circuito magnetico, alle riluttanze \mathcal{R}_{Fe} ed \mathcal{R}_g sono associate due resistenze e alla \mathcal{F} un generatore ideale di f.m.m. il cui verso si ricava considerando il verso della corrente e il senso di avvolgimento delle spire. Utilizzando la regola della mano destra si deduce

che l'induttore di figura 12.3 produce un flusso da sinistra verso destra e quindi il generatore di f.m.m. andrà inserito nel circuito magnetico figura 12.4 con il segno + a destra.

Nel circuito di figura è facile calcolare il flusso Φ (nell'analogia circuitale corrisponde alla corrente della maglia):

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_g} = \frac{120}{2811.7 \cdot 10^3} = 4.27 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

Per il calcolo dell'induttanza basta considerare che il flusso concatenato dall'induttore è

$$\Phi_N = N \cdot \Phi = 2.56 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Infine si ottiene il valore dell'induttanza L

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{2.56 \cdot 10^{-3}}{2} = 1.28 \text{ mH}$$

L'energia magnetica immagazzinata risulta

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = 2.56 \text{ mJ}$$

12.3 Nucleo ferromagnetico con permeabilità finita e magnete permanente

In figura 12.5 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di lunghezza l_{Fe} , sezione S_{Fe} e permeabilità $\mu_{Fe} = \infty$, un magnete permanente MP di lunghezza l_{MP} e un traferro di lunghezza g . La stessa figura mostra anche la caratteristica magnetica del magnete permanente MP . Calcolare il punto di lavoro del magnete permanente. .

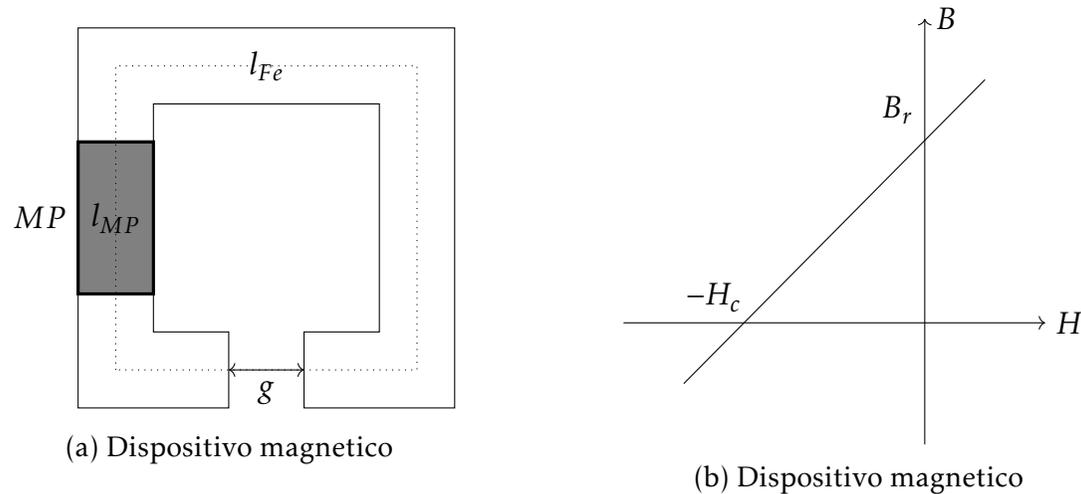


Figura 12.5: Dispositivo magnetico e caratteristica del magnete permanente MP

$$l_{Fe} = 40 \text{ cm} \quad l_{MP} = 5 \text{ cm} \quad g = 2 \text{ mm} \quad S_{Fe} = 6 \text{ cm}^2 \quad \mu_{Fe} = \infty \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad B_r = 1.2 \text{ T} \quad B_r/H_c = \mu_{MP} = 2\mu_0$$

Soluzione

Per risolvere problemi di questo tipo bisogna garantire che sia nullo l'integrale su ogni linea chiusa di $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ e che sia nullo l'integrale su ogni superficie chiusa di $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Nel caso specifico ciò porta a concludere che, indicando con il pedice 0 le grandezze relative al traferro.

$$\begin{aligned} H_{MP}l_{MP} + H_0g &= 0 \\ B_{MP}S_{Fe} - B_0S_{Fe} &= 0 \end{aligned}$$

a queste equazioni vanno aggiunte le relazioni costitutive dei materiali, ovvero:

$$B_0 = \mu_0 H_0$$

$$B_{MP} = B_r \left(1 + \frac{H_{MP}}{H_c}\right) = B_r + \mu_{MP} H_{MP} = B_r + 2\mu_0 H_{MP}$$

Si ha allora che

$$B_{MP} = B_r - 2\mu_0 H_0 \frac{g}{l_{MP}} = B_r - B_{MP} \frac{2g}{l_{MP}}$$

Introducendo il parametro $\epsilon = \frac{2g}{l_{MP}} = 0.08$ si ottiene

$$B_{PM} = B_r / (1 + \epsilon) = 1.11 \text{ T}$$

$$H_{PM} = -\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{B_r}{2\mu_0} = -0.074 \cdot H_c = -35332 \text{ A/m}$$

12.4 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita e due traferri

In figura 12.6 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di sezione S_{fe} e permeabilità μ_{fe} , due tratti in aria di lunghezza g_1 e g_2 , su cui è avvolto un induttore di N spire percorse dalla corrente costante I . Determinare il circuito magnetico equivalente e calcolare l'induttanza L dell'induttore.

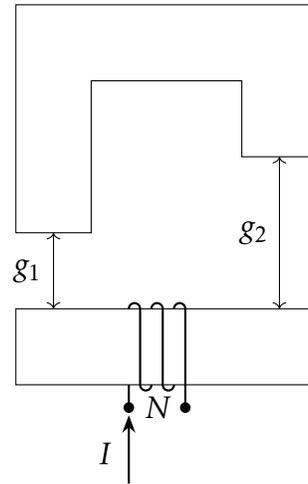


Figura 12.6: Dispositivo magnetico (disegno non in scala)

$$N = 60 \quad I = 2A \quad g_1 = 2\text{ mm} \quad g_2 = 4\text{ mm} \quad S_{fe} = 60\text{ cm}^2 \quad \mu_{fe} = \infty \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Soluzione

Il circuito magnetico associato al dispositivo magnetico si costruisce seguendo i seguenti passi

1. Si calcola la riluttanza di ciascun tratto elementare in cui viene scomposto il dispositivo magnetico.

I tratti del tubo di flusso che si sviluppano nel materiale ferromagnetico hanno riluttanza nulla, essendo $\mu_{fe} = \infty$

Le due riluttanze associate ai due tratti che si sviluppano in aria (traferri di lunghezza g_1 e g_2 e sezione pari a quella nel nucleo ferromagnetico S_{fe}) risultano

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 265.26 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{g_2}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 530.52 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

2. Si calcola la forza magnetomotrice (f.m.m.) di ciascun induttore. In questo caso ce n'è uno solo e la sua f.m.m. vale:

$$\mathcal{F} = NI = 60 \cdot 2 = 120 \text{ A}$$

3. Nel circuito magnetico, alle riluttanze \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 sono associate due resistenze e alla \mathcal{F} un generatore ideale di f.m.m. il cui verso si ricava considerando il verso della corrente e il senso di avvolgimento delle spire. Utilizzando la regola della mano destra si deduce che l'induttore di figura 12.6 produce un flusso da sinistra verso destra e quindi il generatore di f.m.m. andrà inserito nel circuito magnetico di figura 12.7 con il segno + a destra.

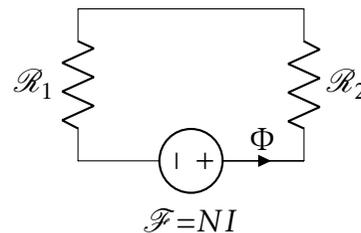


Figura 12.7: Circuito magnetico associato al dispositivo magnetico di figura 12.6

Nel circuito di figura è facile calcolare il flusso Φ (nell'analogia circuitale corrisponde alla corrente della maglia):

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{120}{795.78 \cdot 10^3} = 1.51 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Per il calcolo dell'induttanza basta considerare che il flusso concatenato dall'induttore è

$$\Phi_N = N \cdot \Phi = 9.04 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Infine si ottiene il valore dell'induttanza L

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{9.04 \cdot 10^{-3}}{2} = 4.52 \text{ mH}$$

Osservazioni

Si poteva pervenire in modo molto più rapido al risultato finale ricordando che vale la seguente relazione

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{30^2}{795.78 \cdot 10^3} = 4.52 \text{ mH}$$

dove \mathcal{R}_{eq} è la riluttanza equivalente alla serie di \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 (nell'analogia circuitale corrisponde alla serie di due resistenze).

12.5 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita e tre traferri

In figura 12.8 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di sezione S_{fe} e permeabilità μ_{fe} su cui è avvolto un induttore di N spire percorse dalla corrente costante I . Sono presenti tre tratti in aria di lunghezza g_1 , g_2 e g_3 . Determinare il circuito magnetico equivalente e calcolare l'induttanza L dell'induttore.

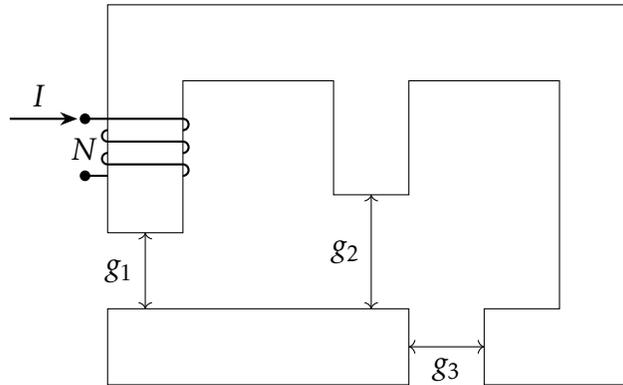


Figura 12.8: Dispositivo magnetico (disegno non in scala)

$$N = 80 \quad I = 2 A \quad g_1 = 2 \text{ mm} \quad g_2 = 4 \text{ mm} \quad g_3 = 6 \text{ mm} \quad S_{fe} = 100 \text{ cm}^2 \quad \mu_{fe} = \infty \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Soluzione

Il circuito magnetico associato al dispositivo magnetico si costruisce seguendo i seguenti passi

1. Si calcola la riluttanza di ciascun tratto elementare in cui viene scomposto il dispositivo magnetico.

I tratti del tubo di flusso che si sviluppano nel materiale ferromagnetico hanno riluttanza nulla, essendo $\mu_{fe} = \infty$

Le riluttanze associate ai tre tratti che si sviluppano in aria (traferri di lunghezza g_1 , g_2 e g_3 e sezione pari a quella nel nucleo ferromagnetico S_{fe}) risultano

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 159.15 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{g_2}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 318.30 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{g_3}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 10^{-4}} = 477.45 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

2. Si calcola la forza magnetomotrice (f.m.m.) di ciascun induttore. In questo caso ce n'è uno solo e la sua f.m.m. vale:

$$\mathcal{F} = NI = 80 \cdot 2 = 160 \text{ A}$$

3. Nel circuito magnetico, alle riluttanze \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 ed \mathcal{R}_3 sono associate tre resistenze e alla \mathcal{F} un generatore ideale di f.m.m. il cui verso si ricava considerando il verso della corrente e il senso di avvolgimento delle spire. Utilizzando la regola della mano destra si deduce che l'induttore di figura 12.8 produce un flusso da sinistra verso destra e quindi il generatore di f.m.m. andrà inserito nel circuito magnetico di figura 12.9 con il segno + verso l'alto.

Per determinare il valore dell'induttanza conviene calcolare la riluttanza equivalente (nell'analogia circuitale corrisponde alla serie di \mathcal{R}_1 con il parallelo di \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3)

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} = 159.15 \cdot 10^3 + 190.98 \cdot 10^3 = 350.13 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

e poi utilizzare l'espressione

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{80^2}{350.13 \cdot 10^3} = 18.3 \text{ mH}$$

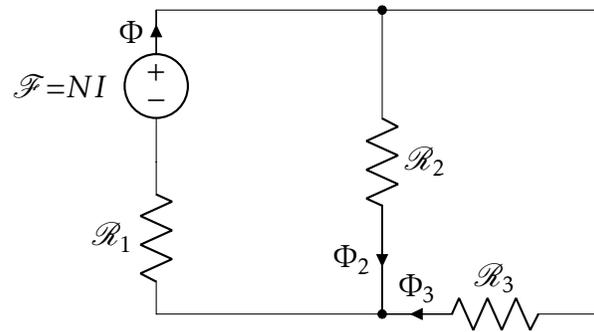


Figura 12.9: Circuito magnetico associato al dispositivo magnetico di figura 12.1

Osservazioni

In alternativa, si poteva passare per il calcolo del flusso Φ (nell'analogia circuitale corrisponde alla corrente del lato in cui è inserito il generatore di f.m.m. \mathcal{F})

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{160}{350.13 \cdot 10^3} = 4.57 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Per il calcolo dell'induttanza basta considerare che il flusso concatenato dall'induttore è

$$\Phi_N = N \cdot \Phi = 36.6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Infine si ottiene il valore dell'induttanza L

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{36.6 \cdot 10^{-3}}{2} = 18.3 \text{ mH}$$

Si noti che, sfruttando l'analogia circuitale, è facile calcolare anche il flusso nei traferri di lunghezza g_2 e g_3 , utilizzando la formula analoga al partitore di corrente tra resistori collegati in parallelo

$$\Phi_2 = \Phi \cdot \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} = 4.57 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{318.30 \cdot 10^3}{318.30 \cdot 10^3 + 477.45 \cdot 10^3} = 1.83 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = \Phi \cdot \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} = 4.57 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{477.45 \cdot 10^3}{318.30 \cdot 10^3 + 477.45 \cdot 10^3} = 2.74 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

12.6 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita, un traferro e due avvolgimenti

In figura 12.10 è rappresentato un dispositivo magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico di sezione S_{fe} e permeabilità μ_{fe} su cui sono avvolti due induttori di N_1 ed N_2 spire percorse dalla correnti costanti I_1 e I_2 , rispettivamente; è presente un tratto in aria di lunghezza g_1 .

Determinare il circuito magnetico equivalente e calcolare le autoinduttanze L_1 ed L_2 e la mutua induttanza M tra i due induttori.

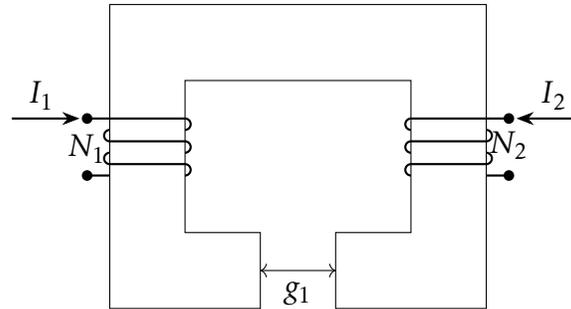


Figura 12.10: Dispositivo magnetico (disegno non in scala)

$$N_1 = 60 \quad N_2 = 100 \quad I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = 4 \text{ A} \quad g_1 = 2 \text{ mm} \quad S_{fe} = 60 \text{ cm}^2 \quad \mu_{fe} = \infty \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Soluzione

Il circuito magnetico associato al dispositivo magnetico si costruisce seguendo i seguenti passi

1. Si calcola la riluttanza di ciascun tratto elementare in cui viene scomposto il dispositivo magnetico.

I tratti del tubo di flusso che si sviluppano nel materiale ferromagnetico hanno riluttanza nulla, essendo $\mu_{fe} = \infty$

La riluttanza associata al tratto che si sviluppa in aria (traferro di lunghezza g_1 e sezione pari a quella nel nucleo ferromagnetico S_{fe}) risulta

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 265.3 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

2. Si calcola la forza magnetomotrice (f.m.m.) di ciascun induttore:

$$\mathcal{F}_1 = N_1 \cdot I_1 = 60 \cdot 2 = 120 \text{ A}$$

$$\mathcal{F}_2 = N_2 \cdot I_2 = 100 \cdot 4 = 400 \text{ A}$$

3. Nel circuito magnetico, alla riluttanza \mathcal{R}_1 è associata una resistenza e a ciascuna delle f.m.m. un generatore ideale il cui verso si ricava considerando il verso della corrente e il senso di avvolgimento delle spire. Utilizzando la regola della mano destra, si deduce che l'induttore di N_1 spire di figura 12.10 produce un flusso verso l'alto e quindi il generatore di f.m.m. andrà inserito nel circuito magnetico di figura 12.11 con il segno + verso l'alto, mentre l'induttore di N_2 spire produce un flusso verso il basso e quindi il corrispondente generatore di f.m.m. andrà inserito con il segno + verso il basso.

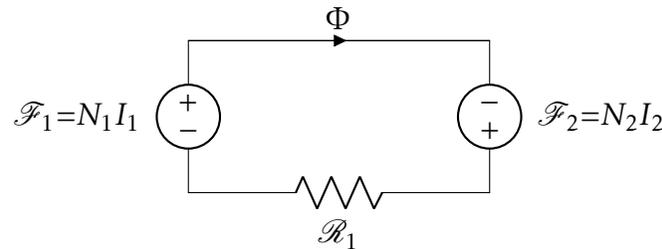


Figura 12.11: Circuito magnetico associato al dispositivo magnetico di figura 12.10

Il flusso Φ circolante nel circuito magnetico risulta

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{R}_1} + \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{R}_1} = \Phi' + \Phi''$$

dove Φ' e Φ'' rappresentano i contributi al flusso totale dovuti rispettivamente alle correnti I_1 e I_2 quando agiscono da sole (sovrapposizione degli effetti).

Applicando la definizione di autoinduttanza si ha:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{N_1}}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{N_1 \Phi'}{I_1} = \frac{N_1^2 \cdot I_1}{\mathcal{R}_1} \cdot \frac{1}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1} = \frac{60^2}{265.3 \cdot 10^3} = 13.57 \text{ mH}$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{N_2}}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{N_2 \Phi''}{I_2} = \frac{N_2^2 \cdot I_2}{\mathcal{R}_2} \cdot \frac{1}{I_2} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_1} = \frac{100^2}{265.3 \cdot 10^3} = 37.7 \text{ mH}$$

dove Φ_{N_1} e Φ_{N_2} sono i flussi concatenati con i due induttori.

Per le mutue induttanze si ha:

$$M_{12} = \left. \frac{\Phi_{N_1}}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{N_1 \Phi''}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot I_2}{\mathcal{R}_1} \cdot \frac{1}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{60 \cdot 100}{265.3 \cdot 10^3} = 22.62 \text{ mH}$$

$$M_{21} = \left. \frac{\Phi_{N_2}}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{N_2 \Phi'}{I_1} = \frac{N_2 \cdot N_1 \cdot I_1}{\mathcal{R}_1} \cdot \frac{1}{I_1} = \frac{N_2 \cdot N_1}{\mathcal{R}_1} = \frac{100 \cdot 60}{265.3 \cdot 10^3} = 22.62 \text{ mH}$$

Osservazioni

Si osservi che le mutue induttanze sono uguali tra loro: $M_{12} = M_{21} = M$.

Inoltre, essendo il circuito lineare, le correnti sono ininfluenti nel calcolo della auto e mutue induttanze che dipendono solo dai parametri fisici e geometrici del dispositivo magnetico.

12.7 Nucleo ferromagnetico con permeabilità infinita, due traferri e due avvolgimenti

Del dispositivo magnetico di figura 12.12, immerso in aria, sono noti i valori degli spessori dei traferri g_1 e g_2 , delle correnti e dei numeri di spire dei due avvolgimenti, nonché lo spessore S dei traferri. Assumendo infinita la permeabilità del nucleo ferromagnetico, calcolare:

- i coefficienti di auto e mutua induzione
- l'energia magnetica complessivamente immagazzinata nel sistema

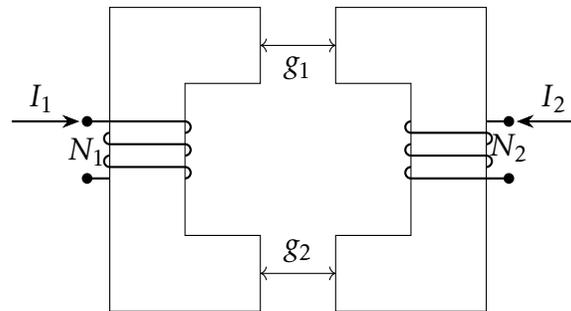


Figura 12.12: Circuito magnetico

$$I_1 = 0.3 \text{ A} \quad I_2 = 0.5 \text{ A} \quad N_1 = 350 \quad N_2 = 455 \quad g_1 = 1.2 \text{ mm} \quad g_2 = 1.2 \text{ mm} \quad S = 90 \text{ cm}^2 [1 \text{ mm}]$$

Soluzione

La rete elettrica equivalente è mostrata in figura 12.13.

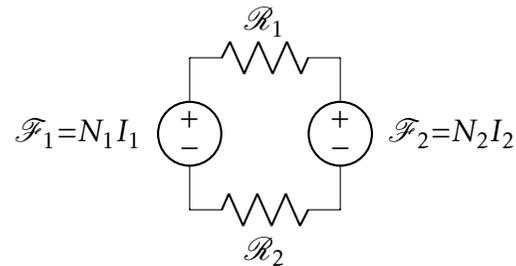


Figura 12.13: Rete equivalente

Le riluttanze dei trasferri valgono

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 S} = 106.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{g_2}{\mu_0 S} = 106.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Il calcolo del coefficiente di auto induzione prevede di valutare il flusso totale concatenato con l'avvolgimento i -esimo, $\Phi_{N_i} = N_i \Phi_i$, generato dalla corrente che vi fluisce, avendo spento tutti gli altri generatori di forza magnetomotrice. Il flusso Φ_i viene calcolato dalla legge di Hopkinson come $\Phi_i = \frac{N_i I_i}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$.

Si ha pertanto che i flussi totali concatenati valgono

$$\Phi_{N_1} = N_1 \Phi_1 = \frac{N_1^2 I_1}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 173 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{N_2} = N_2 \Phi_2 = \frac{N_2^2 I_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 488 \text{ mWb}$$

e i coefficienti di autoinduzione valgono

$$L_1 = \frac{\Phi_{N_1}}{I_1} = 577 \text{ mH}$$

$$L_2 = \frac{\Phi_{N_2}}{I_2} = 976 \text{ mH}$$

I coefficienti di mutua induzione si ottengono invece valutando il flusso totale concatenato con un avvolgimento, tenuto spento, generato dalla corrente che fluisce nell'altro. Si ha quindi

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{N_{12}}}{I_2} = \frac{\Phi_{N_{21}}}{I_1} = -\frac{N_1(N_2I_2)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)I_2} = -\frac{N_2(N_1I_1)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)I_1} = -750 \text{ mH}$$

Il segno negativo dipende dal fatto che le spire sono avvolte in senso contrario e quindi la corrente che fluisce in un avvolgimento spinge nell'altro un flusso opposto a quello che sarebbe generato dalla corrente dello stesso.

Per il calcolo dell'energia si utilizza la formula che contempla la somma di tutti i termini energetici, propri e mutui

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 = 35.4 \text{ mJ}$$

Alternativamente si poteva calcolare l'energia a partire dal flusso $\Phi = \frac{N_1I_1 - N_2I_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$, da esso l'induzione nei traferri $B = \frac{\Phi}{S}$, e quindi l'energia magnetica come $W = 2\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu\mu_0}St_1$.