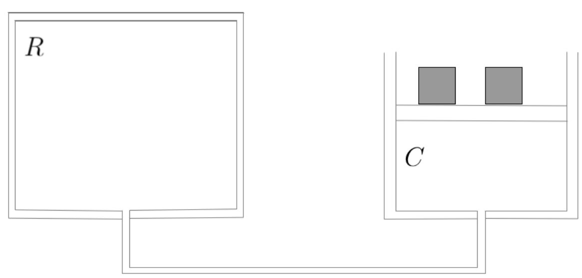
Pool Termodinamica 22 giugno 2021

1 Espansione adiabatica irreversibile

$n = 4.2$ moli di O_2, considerato un gas ideale biatomico, sono contenute in un recipiente R di volume $V_R = 18\,\text{lt}$ ad una pressione iniziale pari a $p = 6.25\,\text{atm}$. Il recipiente è collegato tramite un capillare ad un cilindro C dotato di un pistone mobile sul quale sono posti dei pesi in modo tale che esercitano una pressione costante $p_0 = 1.7\text{atm}$ sul pistone stesso. Inizialmente il pistone è posizionato sul fondo del cilindro. Tutte le pareti del volume R, del cilindro C e del capillare sono isolanti. Ad un certo punto si lascia il pistone libero di scorrere. Il gas fluisce nel capillare in maniera così lenta che si può trascurare l'energia cinetica del pistone. Alla fine della trasformazione si raggiunge un nuovo stato di equilibrio.



Si dica se la trasformazione è reversibile o irreversibile e si calcolino:

1 - la temperatura T_i iniziale del gas in gradi Kelvin ;
2 - il volume finale in lt occupato dal gas;
3 - la temperatura finale T_f del gas in gradi Kelvin;
4 - la variazione di entropia ΔS_s del gas in J/K;
5 - la variazione di entropia dell'universo ΔS_u in J/K.

Soluzione La trasformazione è irreversibile, perché vi è sempre una differenza finita di pressione fra il gas nei due recipienti.

$$T_i = \frac{pV_R}{nR} = \frac{5 \times 1.01325 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{nR} = 326.4\,\text{K}$$

La trasformazione è adiabatica. Detto V_C il volume finale del cilindro, il lavoro svolto dal gas è

$$W = p_0 V_C = nC_v\left(T_i - T_f\right)$$

Inoltre, il gas all'equilibrio occupa il volume $V_R + V_C$. Sfruttando l'equazione di stato dei gas perfetti, si ha

$$p_0\left[V_R + \frac{nC_v\left(T_i - T_f\right)}{p_0}\right] = nRT_f$$

da cui

$$T_f = \frac{p_0 V_R + nC_v T_i}{nC_p} = 258.5\,\mathrm{K}$$

e

$$V_C = \frac{nC_v\left(T_i - T_f\right)}{p_0} = 34.4\,\mathrm{lt}$$

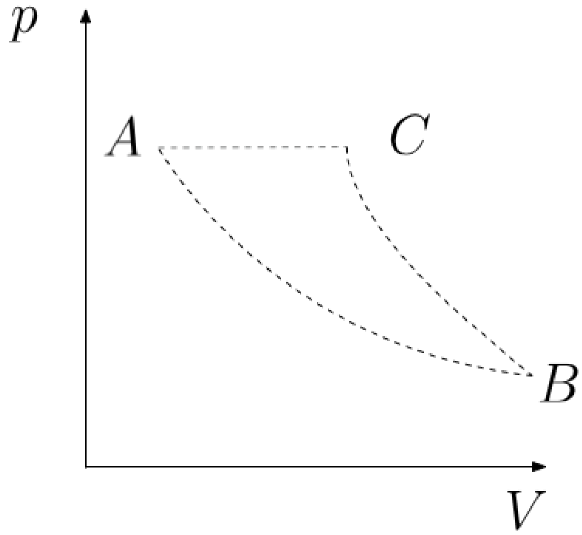
$$V_C + V_R = 52.4\,\mathrm{lt}$$

La variazione di entropia del gas è uguale a quella dell'universo, perché l'ambiente non scambia calore col sistema

$$\Delta S_s = \Delta S_u = n\left[C_v \ln\frac{T_f}{T_i} + R\ln\left(1 + \frac{V_C}{V_R}\right)\right] = 16.96\,\mathrm{J/K}$$

2 Ciclo irreversibile

$n = 5$ moli di gas ideale biatomico sono in equilibrio nel punto A di pressione $p_A = 2.5 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ e temperatura $T_A = 278\,\mathrm{K}$. Da questo stato il gas viene fatto espandere



adiabaticamente verso il vuoto fino a raggiungere uno stato di equilibrio B con volume $V_B = 0.144\,\mathrm{m}^3$. Poi, con una compressione adiabatica irreversibile viene portato nello stato C compiendo sul gas il lavoro $W_{\mathrm{BC}} = -4.23 \times 10^4\,\mathrm{J}$. Infine, il gas viene posto in contatto termico con la sorgente a temperatura T_A e così facendo torna nello stato A in un processo isobaro.

Si calcolino

1 - il volume V_A in litri;

2 - il lavoro W_{AB} compiuto dal gas nell'espansione AB;

3 - la temperatura T_B in K del gas nel punto B;

4 - la temperatura dello stato C, T_C in K;

5 - la variazione di entropia, in J/K, dell'universo ΔS_u nel ciclo.

Soluzione

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 46.2\,\mathrm{lt}$$

$$W_{\mathrm{AB}} = 0 \quad \text{perché espansione libera}$$

$$T_B = T_A = 278\,\mathrm{K}$$

Nel ramo BC, adiabatico,

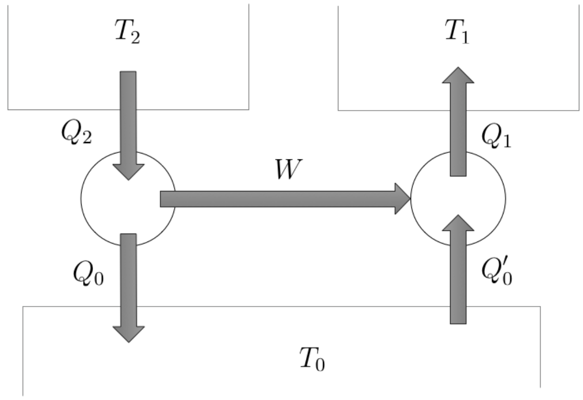
$$W_{\mathrm{BC}} = nC_v\,(T_C - T_A) \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A - \frac{W_{\mathrm{BC}}}{nC_v} = 685\,\mathrm{K}$$

La variazione di entropia del sistema è zero, perché il gas compie un ciclo. Nelle trasformazioni AB e BC non viene scambiato calore con l'ambiente. L'ambiente assorbe calore solo nell'isobara a temperatura T_A. Quindi,

$$\Delta S_u = \Delta S_{a,\mathrm{CA}} = -\frac{nC_p\,(T_A - T_C)}{T_A} = 213\,\mathrm{J/K}$$

3 Due macchine termiche

Due macchine termiche in figura lavorano fra le temperature $T_2 = 550\,\mathrm{K}$, $T_1 = 325\,\mathrm{K}$ e



$T_0 = 273\,\mathrm{K}$. Il valore assoluto del lavoro W prodotto dalla prima macchina ed assorbito dalla seconda vale $|W| = 2.80 \times 10^3\,\mathrm{J}$. La seconda macchina (quella di destra) è dunque un frigorifero. Le macchine lavorano in sincronia ed ad ogni ciclo completo del complesso delle due macchina si ha un'energia inutilizzabile $E_{\rm in} = 2.3 \times 10^3\,\mathrm{J}$. Si sa anche che $Q_1/|Q_0'| = \alpha = 0.84$.

1 - si determini se il complesso delle due macchine formi una macchina reversibile oppure no.

2 - Si determini se e quale delle due macchine sia reversibile.

3 - si calcoli il rendimento della macchina di sinistra $\eta_{\rm sx}$;

4 - si calcoli in J il valore del calore scambiato Q_1.

Soluzione Il rendimento della macchina di destra è

$$\eta_{\rm dx} = 1 - \left|\frac{Q_0'}{Q_1}\right| = 1 - 0.84 = 1 - \frac{T_0}{T_1} = 16\,\%$$

Quindi la macchina frigorifera a destra è reversibile, perché il suo rendimento eguaglia quello del ciclo di Carnot fra le stesse temperature.

Siccome vi è energia inutilizzabile, questo significa che il complesso delle due macchine forma una macchina irreversibile. Siccome quella di destra è reversibile, necessariamente deve essere irreversibile quella di sinistra.

La variazione di entropia dell'universo è legata alla quantità di energia inutilizzabile

$$E_{\rm in} = T_0 \Delta S_u \quad \Rightarrow \quad \Delta S_u = \frac{E_{\rm in}}{T_0} = 8.425\,\mathrm{J/K}$$

Questa $\Delta S_u = \Delta S_a(1)$, della macchina di sinistra.

$$\Delta S_u \equiv \Delta S_a(1) = -\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_0}{T_0} = -\frac{Q_2}{T_2} - \frac{W - Q_2}{T_0}$$

da cui

$$Q_2 = -\frac{\Delta S_u + W/T_0}{\left(T_2^{-1} - T_0^{-1}\right)} = 10.126\,\mathrm{kJ}$$

e

$$Q_0 = W - Q_2 = -7.326\,\mathrm{kJ}$$

Il rendimento della macchina di sinistra vale

$$\eta_{\mathrm{sx}} = 1 - \frac{|Q_0|}{Q_2} = 0.2765$$

Per calcolare i calori scambiati dalla macchina di destra, basta notare che, invertendo i segni di calore e lavoro, il rendimento non cambia, visto che è una macchina reversibile. Quindi

$$\eta_{\mathrm{dx}} = \eta_R = 1 - \frac{T_0}{T_1} = 16\,\%$$

$$Q_1 = \frac{-W}{\eta_R} = -17.5\,\mathrm{kJ}$$

$$Q_0' = W - Q_1 = 20.3\,\mathrm{kJ}$$

4 Macchina frigorifera

Durante un suo ciclo, una macchina frigorifera irreversibile assorbe calore Q_1 ad una sorgente fredda a temperatura $T_1 = 255\,\mathrm{K}$ e cede calore $Q_2 = -95\,\mathrm{kJ}$ alla sorgente calda a temperatura $T_2 = 278\,\mathrm{K}$. Il lavoro viene ricavato facendo compiere ad $n = 2.5\,\mathrm{moli}$ di gas ideale biatomico un'espansione adiabatica reversibile fra lo stato A ($T_A = 450$,K, $V_A = 80\,\mathrm{lt}$) e lo stato B ($V_B = 0.25\,\mathrm{m}^3$). Si calcolino la temperatura T_B dello stato del gas dopo l'espansione adiabatica e il lavoro W assorbito dalla macchina frigorifera. Si calcoli il calore Q_1 e l'efficienza ξ della macchina frigorifera, definita come il modulo del rapporto fra calore assorbito e lavoro prodotto. Si calcoli infine la variazione di entropia dell'universo ad ogni ciclo.

Soluzione

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 285.3\,\mathrm{K}$$

$$W = nC_v\,(T_B - T_A) = -8.56\,\mathrm{kJ}$$

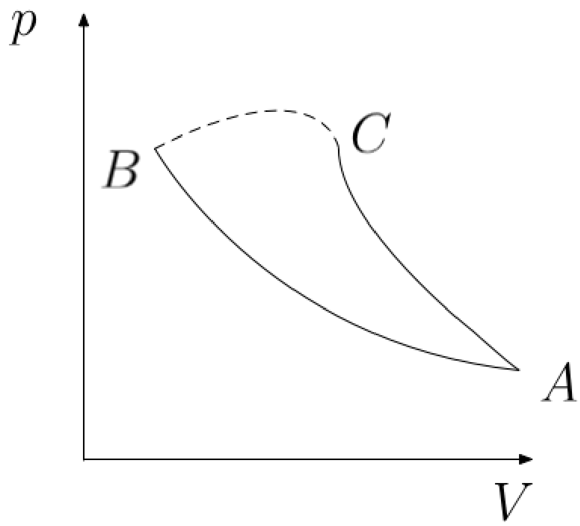
$$Q_1 = W - Q_2 = 86.44\,\mathrm{kJ}$$

$$\xi = \frac{Q_1}{|W|} = 10.1$$

$$\Delta S_u = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 2.75\,\mathrm{J/K}$$

5 Ciclo incognito

Un gas ideale biatomico si trova in equilibrio nel punto A alla pressione $p_A = 0.325\,\mathrm{MPa}$, alla temperatura $T_A = 188\,\mathrm{K}$ occupando un volume $V_A = 57.72\,\mathrm{lt}$. In maniera isoterma reversibile il gas viene compresso fino ad occupare il volume $V_B = 10\,\mathrm{lt}$. Poi, fornendo al gas una quantità di calore pari a $Q_{\mathrm{BC}} = 43.905\,\mathrm{kJ}$, il gas subisce una trasformazione che lo porta in C. La variazione di entropia dell'ambiente nella trasformazione BC vale $\Delta S_{a,\mathrm{BC}} = -174.92\,\mathrm{J/K}$. A partire da C, il gas subisce un'espanzione adiabatica reversibile che lo riporta nello stato iniziale.



Si calcolino il numero di moli del gas, il lavoro scambiato nel ciclo, il rendimento del ciclo e se la trasformazione BC sia reversibile o irreversibile.

Soluzione

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 12$$

Calore ceduto dal gas nella trasformazione AB

$$Q_c = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -32.885\,\mathrm{kJ}$$

$$W = Q_{\mathrm{BC}} + Q_c = 11.02\,\mathrm{kJ}$$

$$\Delta S_{a,\mathrm{AB}} = -\frac{Q_c}{T_A} = 174.92\,\mathrm{J/K} = -\Delta S_{a,\mathrm{BC}}$$

Questo significa che $\Delta S_a = 0$ e quindi la trasformazione BC è reversibile.

$$\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{BC}}} = 0.251$$