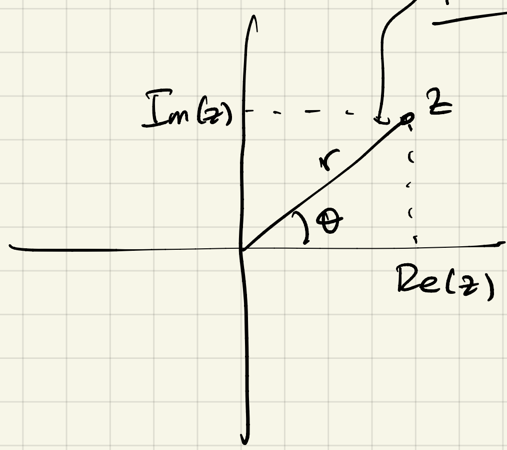
ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 4-5, 07/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Numeri complessi

Rap. grafica



Piano di Gauss
(Argand-Gauss)

$r = |z|$

$\theta = Arg(z) \in [0, 2\pi)$

$\underline{z = re^{i\theta}}$ rap. esponenziale

$z = (Re(z), Im(z))$ Rap. cartesiana

$z = Re(z) + i\,Im(z)$ Rap. algebrica

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ Rap. trigonometrica

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ prodotto

$\mathbb{C}$ somma

gruppi commutativi

$0_{\mathbb{C}} \cdot z = z \cdot 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$ ← Prodotto definito su $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ è un insieme con due operazioni

$\underset{\text{somma}}{+}$, $\underset{\text{prodotto}}{\cdot}$

Lo stesso per $\mathbb{R}$

Sono campi.

Def (vedi Libro, Appendice A, p. 280)

Un campo $\mathbb{K}$ è un insieme non vuoto dotato di due operazioni $+, \cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

$(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo commutativo

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (prop. associativa)

(2) $a+b = b+a$ (prop. commutativa)

(3) $\exists$ un elemento $0 \in \mathbb{K}$ tale che

$$a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

(0 è l'elemento neutro per la somma)

(4) $\forall a \in \mathbb{K}$ esiste un elemento indicato con $-a \in \mathbb{K}$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$

($-a$ è detto l'opposto di a)

$(\mathbb{K}^*, \cdot)$
$\parallel$
$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$
è un gruppo commutativo

(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (prop. associativa)

(6) $a \cdot b = b \cdot a$ (prop. commutativa)

(7) $\exists$ un elemento $1 \in \mathbb{K}$ tale che

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

(1 è l'elemento neutro per il prodotto)

(si suppone $1 \neq 0$)

(8) $\forall a \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$ esiste un elemento che si indica con a^{-1} (oppure $\frac{1}{a}$) tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

(a^{-1} è detto l'inverso di a)

(9) $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

(prop. distributiva)

— o —

A noi interessa

Campo $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Altro esempio: $\mathbb{Q}$

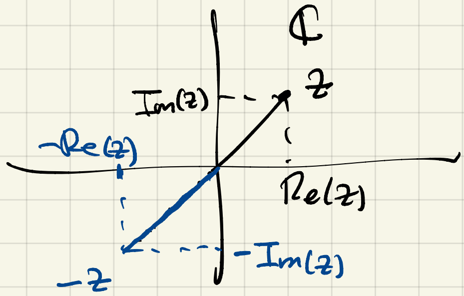
$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

In un campo si possono risolvere equazioni di 1° grado.

$$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{K} \quad a \neq 0$$

$$ax = -b \qquad \text{(esistenza degli opposti)}$$

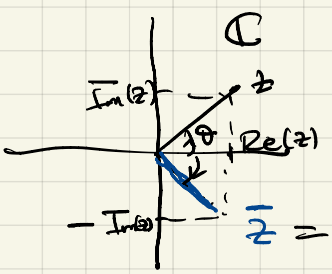
$$x = -\frac{b}{a} \qquad \text{(esistenza degli inversi se } a \neq 0\text{)}$$



$$z = Re(z) + i\, Im(z)$$

$$-z = -Re(z) - i\, Im(z)$$

<u>Coniugo</u>: Riflessione rispetto all'asse reale.



$\bar{z}$ = complesso coniugato di z

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\bar{z} = r e^{-i\theta} = r e^{i(2\pi - \theta)}$$

$$z = Re(z) + i\, Im(z)$$

$$\bar{z} = Re(z) - i\, Im(z)$$

Proprietà

1) $z\bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Dim.

$z = a + ib$

$a = Re(z)$

$b = Im(z)$

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

allora $\bar{z} = a - ib$

$$z\bar{z} = \underbrace{(a+ib)}_{z}\underbrace{(a-ib)}_{\bar{z}} = a^2 + b^2 + i(-ab+ab)$$
$$= a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$$
$$= |z|^2 \quad \blacksquare$$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Dim.

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$

$\bar{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1}$

$\bar{z}_2 = r_2 e^{-i\theta_2}$

$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$

Uguali

4) $\bar{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

5) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

6) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Dim.

Se $z = a+ib$ $\quad (a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z))$

$\Rightarrow \bar{z} = a - ib$

$$z+\bar{z} = (a+\cancel{ib}) + (a-\cancel{ib}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$z-\bar{z} = (\cancel{a}+ib) - (\cancel{a}-ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \quad \boxtimes$$

Def. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Un polinomio nella variable x a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un'espressione della forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}.$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Il più grande $d \in \mathbb{N}$ tale che $a_d \neq 0$ si chiama il grado del polinomio.

Notazione: $\mathbb{K}[x]$ = Insieme dei polinomi nella var. x a coeff. in $\mathbb{K}$.

Def. Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Un numero $\alpha \in \mathbb{K}$

si chiama radice di $p(x)$ se

$p(\alpha) = 0$.

Es. $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$

Radici di $p(x)$ sono $\alpha_1 = \sqrt{2}$
$\alpha_2 = -\sqrt{2}$

Teorema Fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n > 0$ ammete n radici, eventualmente coincidenti, e si fattorizza in $\mathbb{C}[x]$ in un prodotto di polinomi di primo grado:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$
$$= a_n (x-\alpha_1)^{m_1} (x-\alpha_2)^{m_2} \cdots (x-\alpha_r)^{m_r}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono le radici distinte di $p(x)$

Appartengono a $\mathbb{C}$

$m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sono le molteplicità delle radici.

Radici sono:

$$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\alpha_r, \dots, \alpha_r}_{m_r}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$

Esempi

1) $p(x) = x^2 - 2$ radice $\alpha_1 = \sqrt{2}$
$\alpha_2 = -\sqrt{2}$

$$p(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

2) $p(x) = x^2 + 1$ radice $\alpha_1 = i$
$\alpha_2 = -i$

$$p(x) = (x + i)(x - i)$$

3) $p(x) = x^2 - 2x + 1$

radice $\alpha_1 = 1$
$\alpha_1 = 1$

$$p(x) = (x-1)^2$$

1 è radice con molteplicità 2.

Teorema Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x)$ anche $\bar{\alpha}$ lo è.

Dim

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Sia α radice di $p(x) \Rightarrow p(\alpha) = 0$

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$$

Prendo coniugato complesso

$$\overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n} = \overline{0}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1\alpha} + \dots + \overline{a_n\alpha^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n}(\overline{\alpha})^n = 0$$

$\left.\begin{array}{l} \overline{a_0} = a_0 \\ \overline{a_1} = a_1 \\ \vdots \\ \overline{a_n} = a_n \end{array}\right\}$ Perché sono reali

$$\underbrace{a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots + a_n\overline{\alpha}^n}_{p(\overline{\alpha})} = 0$$

Quindi $p(\overline{\alpha}) = 0 \iff \overline{\alpha}$ è radice $\blacksquare$

Teorema Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Allora $p(x)$ si scomporre in un prodotto di fattori irreducibili di primo e secondo grado a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Dim.

Per il teorema fondamentale $p(x)$ si scomporre in $\mathbb{C}[x]$ in fattori di primo grado.

Le radici reali restano in fattori che appartengono a $\mathbb{R}[x]$ $(x-r)$ $r \in \mathbb{R}$

Le radici complesse sono a coppie

$\alpha, \bar{\alpha}$ allora danno luogo a

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = \underbrace{x^2 - \underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{2\mathrm{Re}(\alpha)} x + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{|\alpha|^2}}_{\text{Polinomio di grado 2 a coefficienti reali}}$$

numeri reali

Polinomio di grado 2
a coefficienti reali

<u>Esempio</u>:

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Radici: $\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = i$
$\alpha_3 = -i$

$$p(i) = i^3 - \underbrace{i^2}_{-1} + i - 1$$
$$= -i + 1 + i - 1 = 0$$

$i^3 = i\,i^2$
$= i(-1) = -i$

$$p(x) = (x-1)\underbrace{(x-i)(x+i)}_{x^2+1}$$

$$p(x) = (x-1)(x^2+1)$$