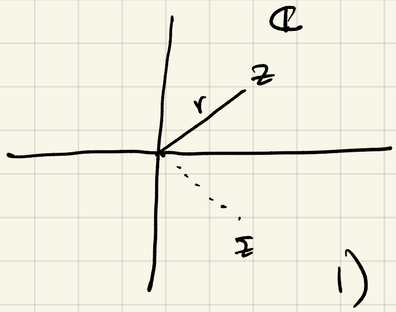
ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 6-7, 11/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Proprietà del modulo di un numero complesso



$$r = |z|$$

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   e $|z| = 0 \iff z = 0_{\mathbb{C}}$.

2) $|\bar{z}| = |z|$

3) $z\bar{z} = |z|^2$

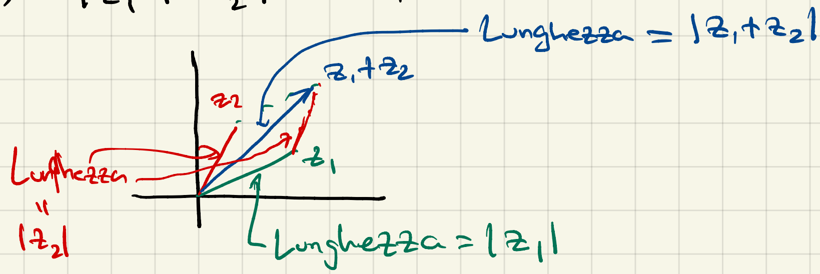
4) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$$|z_1| = r_1 \qquad \begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \qquad z_1 z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{|z_1 z_2| = r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} |z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2 \end{matrix}}_{|z_1||z_2| = r_1 r_2}$$

$$|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$$

5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.



6) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$

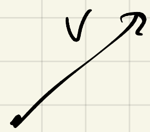
Dim.

$$z \underbrace{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)}_{z^{-1}} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

SPAZI VETTORIALI

Motivazione: Vettori geometrici

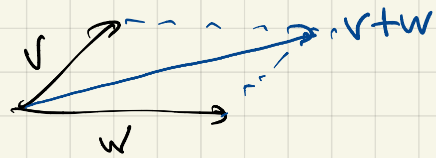
Hanno direzione, verso e lunghezza.

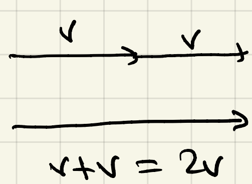


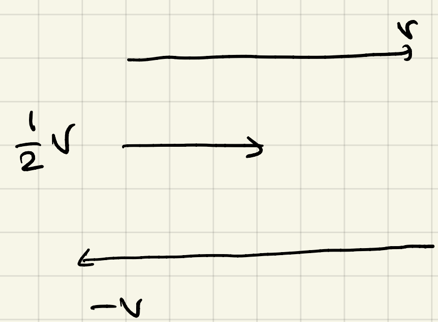
Segmento di retta con una freccia.

(Pensare a uno spostament

Operazioni con i vettori







Due operazioni:

1) Somma di vettori (il risultato è un vettore)

2) Prodotto di un numero (scalare) per un vettore (il risultato è un vettore)

$(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

Def. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale) è un insieme non vuoto V dotato di una operazione $+$, detta somma

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longmapsto v + w$$

(v, w sono elementi che chiamo vettori; $v+w$ è ancora un vettore)

e di una operazione $\cdot$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

(λ è un elemento di $\mathbb{K}$ che chiamo scalare. $\lambda \cdot v$ è un vettore)

detta prodotto per uno scalare che soddisfano le seguenti proprietà:

Per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$ si ha:

$(V, +)$ è un gruppo commutativo

1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (prop. associativa).
2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (prop. commutativa)
3) Esiste un elemento $0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$.
4) Per ogni $v \in V$ esiste un elemento $-v \in V$ tale che $v + (-v) = (-v) + v = 0$
5) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$

6) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$

7) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot v)$

8) $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v \quad \forall v \in V.$

__Esempi__

1.- Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$V = \mathbb{K}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K} \}$$

insieme di sequenze di n numeri separati da virgole.

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \underset{def}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) \underset{def}{=} (\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda a_n)$$

$$0 = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$$

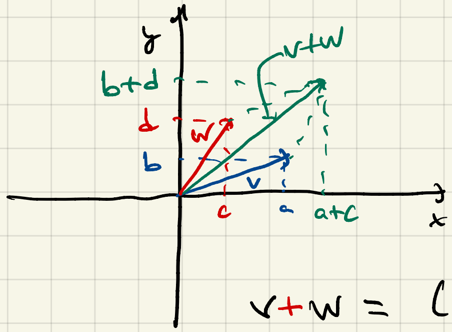
$$v = (a_1, \dots, a_n)$$

$$-v = (-a_1, \dots, -a_n)$$

__Casi particolari.__

(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad n = 2 \quad V = \mathbb{R}^2$

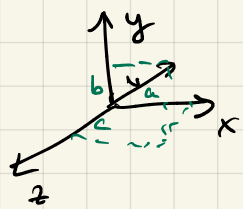
$$\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$



$v = (a, b)$
$w = (c, d)$

$v + w = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

(ii) $n = 3$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{lo spazio}}$

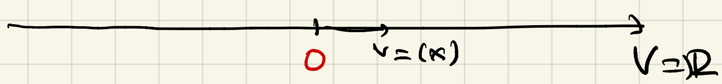


$v = (a, b, c)$

(iii) $n = 4$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}^4$

$$\mathbb{R}^4 = \{ (x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

(iv) $n = 1$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}$



2: Esempio banale $\quad V = \{0\}$ $\quad \mathbb{K}$ - qualsiasi campo

$$0 + 0 = 0$$
$$\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ questo esempio è l'unico $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con un numero finito di elementi.

3.- $V = \mathbb{C}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

$v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ $\quad v_1 + v_2 \underset{def}{=} \underbrace{v_1 + v_2}_{\text{Somma in } \mathbb{C}}$ $\quad$ (Sappiamo che $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo commutativo)

$v \in \mathbb{C}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \cdot v \underset{def}{=} \lambda v \in \mathbb{C}$

Solita molt. in $\mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$0 = 0_{\mathbb{C}}$.

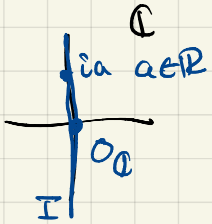
OSS: $\mathbb{R}$ non è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Perché?: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ $v \in \mathbb{R}$ allora $\lambda v \notin \mathbb{R}$ (Es. $\lambda = i$, $v = 1$)

Quindi non possiamo definire

$\lambda \cdot v = \lambda v$

4.- L'insieme $\underbrace{I}_{\substack{\text{numeri} \\ \text{immaginari} \\ \text{puri}}} \subset \mathbb{C}$ $\quad (I = i\mathbb{R})$



$V = I$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

$v_1, v_2 \in I \Rightarrow v_1 = ia_1, \; v_2 = ia_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

$v_1 + v_2 = \underbrace{ia_1 + ia_2}_{\text{Solita somma di } \mathbb{C}} = \overbrace{i\underbrace{(a_1 + a_2)}_{\text{reale}}}^{\text{immaginario puro}} \in I$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad v = ia \qquad a \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot v = \underbrace{\lambda (ia)}_{\text{solito prodotto in } \mathbb{C}} = \overbrace{i(\underbrace{\lambda a}_{\text{reale}})}^{\text{immaginario puro}} \in I$$

$$0 = 0_{\mathbb{C}}$$

6: <u>Spazio di matrici</u>

Una matrice con n righe e k colonne è una tabella di numeri del tipo

$$\text{n righe} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix}}_{k \text{ colonne}} \right. \leftarrow \text{Matrice } n \times k$$

c_{ij} sono i coefficienti della matrice.

$Mat_{n\times k}(\mathbb{K}) = M_{n\times k}(\mathbb{K}) =$ Insieme di tutte le matrice $n \times k$ con coefficienti in $\mathbb{K}$.

$V = M_{n\times k}(\mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$

$$v_1 + v_2 \underset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{K}) = V$$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot v_1 \underset{def}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{K}) = V$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

7.- $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ = Insieme di polinomi con coeff. in $\mathbb{K}$ di grado $\leq n$.

Es. $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ = Polinomi con coeff. in $\mathbb{R}$ di grado ≤ 4.

$$v_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_j \in \mathbb{K}$$

$$v_2 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n, \quad b_j \in \mathbb{K}$$

$$v_1 + v_2 \underset{def}{=} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)$$

$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$$

$$\lambda \cdot v_1 \underset{def}{=} \lambda(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$$

$$= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \dots + (\lambda a_n)x^n \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$$

$0 = 0 + 0x + \dots + 0x^n$ = polinomio zero.

OSS $\mathbb{R}[x]_{\leq k} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ se $k \leq n$.

Alcune proprietà degli Spazi Vettoriali

① $\underbrace{0}_{0 \in \mathbb{K}} \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

② $\underbrace{(-1)}_{\text{l'opposto di } 1_{\mathbb{K}}} \cdot v = \underbrace{-v}_{\text{opposto di } v} \quad \forall v \in V$

③ $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

④ Sia $v \in V$, $v \neq 0$. Se $\lambda \cdot v = 0$ allora $\lambda = 0$.