ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 10-11, 14/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$W \subseteq V$ è sottospazio se W è spazio vettoriale con le stesse operazioni di V.
(W è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale)

Proposizione: W è sottospazio se e solo se

1) W è chiuso per la somma di vettori
($w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$)

2) W è chiuso per la moltiplicazione fra scalari e vettori.
($\lambda \in \mathbb{K}$, $w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$)

(b) $V = \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$

1) $\left.\begin{array}{l} w_1 = (x_1, 0, z_1) \\ w_2 = (x_2, 0, z_2) \end{array}\right\} \in W$

$w_1 + w_2 = (x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{x_3}, 0, \underbrace{z_1 + z_2}_{z_3})$

$= (x_3, 0, z_3) \in W$

$\Rightarrow W$ è chiuso per la somma.

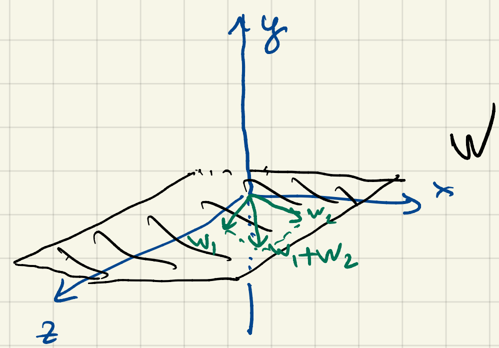
2) $w = (x, 0, z) \in W, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda w = \lambda(x, 0, z) = (\lambda x, \lambda 0, \lambda z) = (\underbrace{\lambda x}_{x_1}, 0, \underbrace{\lambda z}_{z_1})$$

$$\lambda w = (x_1, 0, z_1) \in W$$

$\Rightarrow W$ è chiuso per la molt. fra scalari e vettori.

$\Rightarrow W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.



⑦ $V = \mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

$W = I = i\mathbb{R} =$ insieme dei numeri immaginari puri.

1) $w_1, w_2 \in W$

$w_1 = ib_1, \quad w_2 = ib_2 \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$

$$w_1 + w_2 = ib_1 + ib_2 = i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3 \in \mathbb{R}} = \underbrace{ib_3}_{\text{Immaginario puro}} \in W$$

$\Rightarrow W$ è chiuso per la somma.

2) $w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

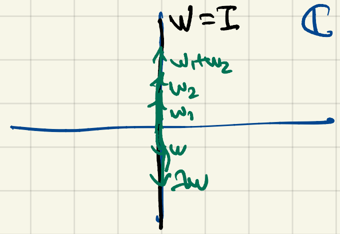
$w = ib \qquad b \in \mathbb{R} \qquad b_1 \in \mathbb{R}$

$$\lambda w = \lambda(ib) = i(\underbrace{\lambda b}_{b_1}) = ib_1 \in W$$

Immaginario puro.

$\Rightarrow W$ è chiuso per la molt. fra scalari e vettori.

$\Rightarrow W$ è sottosp. di $\mathbb{C}$.



EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Considero l'equazione

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = \vec{0} \quad (*)$$

per le n-incognite $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

Si chiama **equazione lineare omogenea con n-incognite**

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ è una <u>soluzione</u> di $(*)$ se $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$.

<u>Esempio</u>:

$$\underbrace{\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}}$$

è un'equazione lineare omogenea.

$$\underbrace{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^2$.

Teorema L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Dim.

1) Sup. $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ sono soluzioni $\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$

$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = \vec{0}$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\overbrace{\alpha_1+\beta_1}^{\lambda_1}, \dots, \overbrace{\alpha_n+\beta_n}^{\lambda_n})$$

è una soluzione?

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = (\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)}_{\vec{0}} + \underbrace{(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)}_{\vec{0}}$$

$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ è soluzione.

$\Rightarrow$ L'insieme delle soluzioni è chiuso per la somma.

2) Sia $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ una soluzione.

$\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$.

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow$ $\lambda\vec{\alpha}$ è soluzione?

$$\lambda\vec{\alpha} = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\underbrace{\lambda\alpha_1}_{\beta_1}, \dots, \underbrace{\lambda\alpha_n}_{\beta_n})$$

$$= (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = (\lambda\alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda\alpha_n) v_n$$

$$= \lambda \underbrace{(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)}_{\vec{0}} = \lambda \vec{0} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \lambda\vec{\alpha}$ è soluzione.

Quindi, l'insieme delle soluzioni è chiuso per il prodotto fra vettori e scalari.

$\Rightarrow$ L'insieme delle soluzioni è sottospazio di $\mathbb{K}^n$ $\blacksquare$

<u>Esempio</u>: $\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

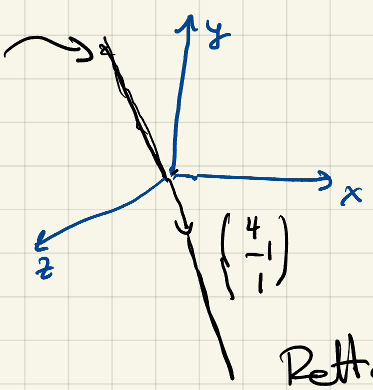
L'insieme delle soluzioni è un <u>sottospazio di $\mathbb{R}^3$</u> (per il teorema precedente)

$\begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

Le soluzioni sono vettori in $\mathbb{R}^3$ della forma $\begin{pmatrix} 4x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

con $x_3 \in \mathbb{R}$.

Insieme delle soluzioni



Retta passante per <u>l'origine</u>.

4 possibilità

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$
$\begin{cases} \bullet\ W = \{(0,0,0)\} \\ \bullet\ W = \text{una retta passante per l'origine} \\ \bullet\ W = \text{un piano passante per l'origine} \\ \bullet\ W = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

$v_1, \dots, v_n \in V$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{\text{Combinazione lineare dei vettori } v_1, \dots, v_n.} \in V$$

<u>Prop:</u> Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$v_1, \dots, v_n \in V$

Sia $W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ = Insieme di tutte le combinazioni lineare di $v_1, \dots, v_n$.

Allora W è un sottospazio di V.

<u>Dim</u>

1) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow$ $w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$w_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$w_1 + w_2 = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$$

$$= \underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{\lambda_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\lambda_n} v_n$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in W$$

$w_1 + w_2 \in W$ (W è chiuso per la somma)

2) $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\lambda w = \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \overbrace{(\lambda\alpha_1)}^{\lambda_1} v_1 + \dots + \overbrace{(\lambda\alpha_n)}^{\lambda_n} v_n$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in W$$

$\Rightarrow \lambda w \in W$ (W è chiuso per la molt. fra vettori e scalari)

$\Rightarrow W$ è sottosp. di V

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

U, W sottospazi vettoriali di V.

(Intersezione) $U \cap W = \{v \in V \mid v \in U$ e $v \in W\}$

(Unione) $U \cup W = \{v \in V \mid v \in U$ o $v \in W\}$

Sono sottosp. di V?

$\boxed{U \cap W}$ $w_1, w_2 \in U \cap W$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 \in U, & w_1 \in W \\ w_2 \in U, & w_2 \in W \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} U \text{ è sottosp.} \Rightarrow \underset{U}{w_1} + \underset{U}{w_2} \in U \\ W \text{ è sottosp.} \Rightarrow \underset{W}{w_1} + \underset{W}{w_2} \in W \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 + w_2 \in U \cap W$$

$\Downarrow$

$U \cap W$ è chiuso per la somma.

$v \in U \cap W \Rightarrow v \in U$ è $v \in W$.

$\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{l} U \text{ è sottosp.} \Rightarrow \lambda \underset{U}{v} \in U \\ W \text{ è sottosp.} \Rightarrow \lambda \underset{W}{v} \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda v \in U \cap W$$

$\Rightarrow U \cap W$ è chiuso per la molt. fra vettori e scalari

Quindi $U \cap W$ è un sottospatio di V

OSS: $U \cap W$ non può essere vuota

$\vec{0} \in U \cap W$. Può accadere che $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

$\boxed{U \cup W}$

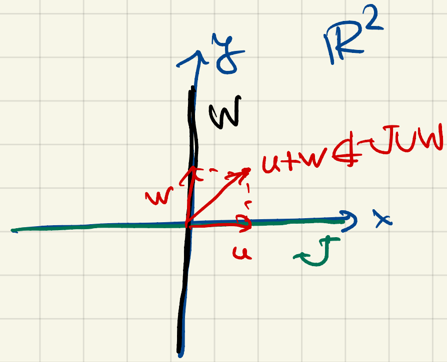
$v_1, v_2 \in U \cup W$

$v_1 \in U$ o $v_1 \in W$

$v_2 \in U$ o $v_2 \in W$

$v_1 + v_2 \overset{?}{\in} U \cup W$

Esempio



$$V = \mathbb{R}^2$$

$$U = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$(1, 0) \in U$ $\qquad$ $(1,0) + (0,1) = (1,1) \begin{matrix} \notin U \\ \notin W \end{matrix}$

$(0, 1) \in W$

$\Rightarrow (1,1) \notin U \cup W.$

$\Rightarrow U \cup W$ non è chiuso per la somma.

$U \cup W$ non è in generale un sottosp. vettoriale

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Siano W_1, W_2 sottosp. vettoriali di V.

Allora $W_1 \cup W_2$ è sottosp. vettoriale di $V \iff W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

Dim.

"$\Leftarrow$" Ip. $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_2$

oppure

$W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_1$

} L'unione è sottosp.

"$\Rightarrow$") Sup. $W_1 \cup W_2$ è sottosp.

Dim. per assurdo,

Sup. che $W_1 \nsubseteq W_2$ e $W_2 \nsubseteq W_1$

Allora esistono $\begin{cases} w_1 \in W_1 \text{ tale che } w_1 \notin W_2 \\ w_2 \in W_2 \text{ tale che } w_2 \notin W_1 \end{cases}$

Sia $w = w_1 + w_2$.

$W_1 \cup W_2$ è sottosp. $\Rightarrow w \in W_1 \cup W_2$ allora

$w \in W_1$ oppure $w \in W_2$.

Se $w \in W_1 \Rightarrow \underset{W_1}{w} - \underset{W_1}{w_1} \in W_1$ ← Perché W_1 è sottosp.

Ma $w - w_1 = (\underbrace{w_1 + w_2}_{w}) - w_1 = w_2$

$\Rightarrow w_2 \in W_1$ ASSURDO

Se $w \in W_2 \Rightarrow \underset{W_2}{w} - \underset{W_2}{w_2} \in W_2$ ← Perché W_2 è sottosp.

Ma $w - w_2 = (w_1 + w_2) - w_2 = w_1 \in W_2$

ASSURDO

$\Rightarrow W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ $\blacksquare$