ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 14-15, 20/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$S \subseteq V$

$\langle S \rangle =$ Sottospazio generato generato da S $= \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1, \dots, v_n \in S \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$

= Insieme di tutte le combinazioni lineare dei vettori di S.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V

se $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Cioè: $\forall v \in V \Rightarrow$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Esempi $\quad V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2,1), \quad v_2 = (0,3), \quad v_3 = (1,-1)$

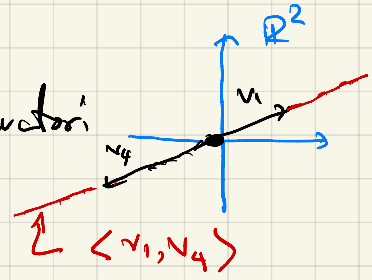
① $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori

② $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di generatori

③ $\{v_1\}$ non è un sistema di generatori

④ $v_4 = (-6,-3) = -3v_1$

$\{v_1, v_4\}$ non è un sistema di generatori



Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$v_1, \dots, v_n \in V$

Cerchiamo scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le incognite.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ è una soluzione (detta banale)

<u>Domanda importante:</u>

Ci sono altre soluzioni?

→ SI $\Rightarrow$ I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono <u>linearmente dipendenti</u>

→ NO $\Rightarrow$ I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u>

<u>Def.</u> 1) Diremo che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica soluzione a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ è $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2) Diremo che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se non sono linearmente indipendenti. Cioè, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ con i λ_i non tutti nulli.

Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. diciamo che l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è <u>libero</u>.

<u>Es.</u> $V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2,1)$, $v_2 = (0,3)$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 0 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1, v_2$ sono lin. indip.

<u>Es.</u> $V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2,1)$, $v_2 = (0,3)$, $v_3 = (1,-1)$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

Ci sono infinite soluzioni
Una per ogni valore di λ_1.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I vettori sono lin. <u>dip.</u>

Es.

$V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2, 1)$

$v_4 = (-6, -3)$

$$v_4 = -3v_1 \implies \underbrace{3v_1 + v_4 = \vec{0}}$$

$\implies v_1, v_4$ sono linearmente dipendenti.

Dal punto di vista geometrico v_1, v_2 sono linearmente dipendenti $\iff$ sono paralleli

$$\left(\begin{cases} v_1 = a v_2 \\ \text{oppure} \\ v_2 = a v_1 \end{cases} \text{per uno scalare } a \in \mathbb{K}\right)$$

__Dim__

$\Rightarrow)$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$

Sup. $\lambda_1 \neq 0$

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2$$

$$v_1 = \underbrace{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{a \in \mathbb{K}} v_2$$

$$v_1 = a v_2$$

$\implies v_1$ e v_2 sono paralleli.

$\Leftarrow)$ Se v_1 e v_2 sono paralleli

$$v_1 = a v_2 \implies v_1 - a v_2 = \vec{0}$$

$$\underbrace{1 \cdot v_1 - a v_2}_{\text{Comb. lineare con al meno uno scalare diverso da } 0} = \vec{0}$$

$1 \neq 0$

$\implies v_1$ e v_2 sono linearmente dipendenti ☒

Attenzione: Questa interpretazione geometrica vale solo per due vettori.

Avevamo visto che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin. dip. ma non sono paralleli.

Es. $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = (2, 0, 1)$$
$$v_2 = (-1, 1, 0)$$
$$v_3 = (3, 3, 1)$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$$

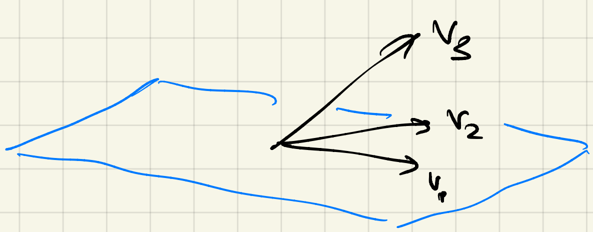
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(-\lambda_3) - (-3\lambda_3) + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono <u>linearmente indipendenti</u>

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme libero.



v_1, v_2, v_3 **non** sono sullo stesso piano.

Es. $V=\mathbb{R}^3$

$v_1=(2,0,1)$
$v_2=(-1,1,0)$
$v_3=(1,1,1)$

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=\vec{0}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}2(-\lambda_3)-(-\lambda_3)+\lambda_3=0\\ \lambda_2=-\lambda_3\\ \lambda_1=-\lambda_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=0\\ \lambda_2=-\lambda_3\\ \lambda_1=-\lambda_3\end{cases}$$

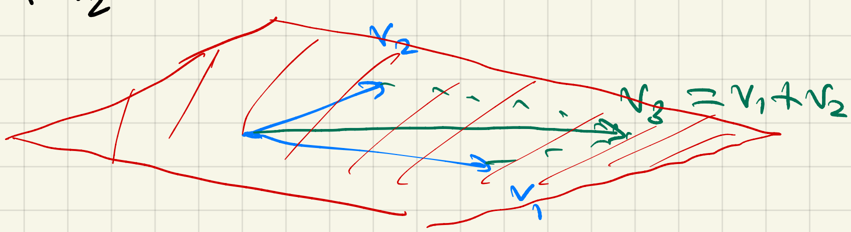
Ci sono infinite soluzioni

I vettori sono <u>linearmente dipendenti</u>

Se $\lambda_3=-1 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=1$.

$$1\cdot v_1+1\cdot v_2-1\cdot v_3=\vec{0}$$

$$v_3=v_1+v_2$$



v_1, v_2, v_3 stanno sullo stesso piano.

Es. $V=\mathbb{R}^3$

$v_1=(1,-1,0)$
$v_2=(0,2,3)$
$v_3=(-4,1,5)$
$v_4=(6,1,0)$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4=\vec{0}}$$

Sistema di 3 equazioni per 4 incognite $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$

Ci sono infinite soluzioni

I vettori sono <u>linearmente dipendenti</u>.

<u>Prop.</u> (vedi Libro, Cap. 1, pag 20)

Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$. I vettori dati sono <u>linearmente dipendenti</u> se e solo se uno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \underbrace{\dots}_{\text{manca } v_i} + \lambda_n v_n$$

Attenzione: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sono lin. dip. $\Leftarrow$ $2v_1 - v_2 + 0 \cdot v_3 = \vec{0}$

È vero che $v_2 = 2v_1 + 0 \cdot v_3$ (v_2 è comb. lineare di v_1 e v_3)

<u>Ma</u>: non possiamo scrivere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2.

<u>Dim.</u>

$\Rightarrow$) Sup. $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti.

Esistono $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$$

Ci sarà qualche $a_j \neq 0$

$$a_i v_i = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - \underbrace{\dots}_{\text{manca } v_i} - a_n v_n$$

$$a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \underbrace{-\frac{a_1}{a_i}}_{\lambda_1} v_1 \underbrace{-\frac{a_2}{a_i}}_{\lambda_2} v_2 - \dots \underbrace{-\frac{a_n}{a_i}}_{\lambda_n} v_n$$

manca v_i

$$\Rightarrow v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \underbrace{\dots}_{\text{manca } v_i} + \lambda_n v_n$$

$\Rightarrow v_i$ si scrive come comb. lineare dei rimanenti.

$\Leftarrow$) Sup. $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ manca v_i

Allora $\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}}$

Combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ uguale a $\vec{0}$

$-1 \neq 0 \Rightarrow$ I vettori sono linearmente dipendenti. $\boxtimes$

Def. Una **base** di uno spazio vettoriale V è un sistema di generatori di V costituito da vettori linearmente indipendenti

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V significa
- $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ è libero

<u>Es.</u> $V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2,1)$, $v_2 = (0,3)$, $v_3 = (1,-1)$, $v_4 = (-6,-3)$

	Generatori	Linearmente Indipendenti	Base
$\{v_1, v_2, v_3\}$	✓	✗	✗
$\{v_1, v_2\}$ Base di $\mathbb{R}^2$	✓	✓	✓
$\{v_1\}$	✗	✓	✗
$\{v_1, v_4\}$	✗	✗	✗

<u>Es.</u> $V = \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1, 2, -1)$

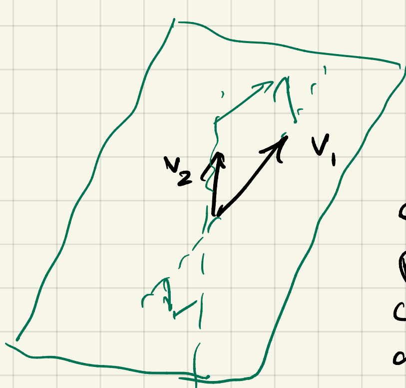
$v_2 = (0, 3, 1)$

Sono linearmente indipendenti? SI (perché non sono paralleli)

Sono generatori di $\mathbb{R}^3$?

$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v$



$\langle v_1, v_2 \rangle$ è il piano che contiene a v_1, v_2

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = b \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = c \end{cases}$$

a, b, c sono parametri liberi di variare.

λ_1, λ_2 sono incognite.

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = \dfrac{b-2a}{3} \\ \lambda_2 = c+a \end{cases}$$

Il sistema ha una soluzione se e solo se

$$c+a = \frac{b-2a}{3} \iff 5a - b + 3c = 0$$

Non c'è soluzione per qualsiasi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ad esempio per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ non è un sistema di generatori

$\{v_1, v_2\}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Es. $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, 2, -1)$
$v_2 = (0, 3, 1)$
$v_3 = (0, 0, 1)$

Sono generatori? $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = b \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = \dfrac{b-2a}{3} \\ \lambda_3 = a - \left(\dfrac{b-2a}{3}\right) + c \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= \frac{b-2a}{3} \\ \lambda_3 &= \frac{5a}{3} - \frac{b}{3} + c \end{aligned}}$$

Soluzione unica.

v_1, v_2, v_3 sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

v_1, v_2, v_3 sono lin. indip.?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0} \Rightarrow$$

La soluzione unica è
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
$(a=0, b=0, c=0)$

v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.