2021-10-22

venerdì 22 ottobre 2021 16:23

ESERCIZIO 1

È VERO CHE CON LA + E IL · USUALI L'INSIEME DEI NUMERI REALI È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{Q}$?

UNO SPAZIO VETTORIALE V SU UN CAMPO K È UN INSIEME DOTATO DI 2 OPERAZIONI

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \mapsto v + w$$

$(V, +)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO

ovvero:
- S1) prop. ASSOCIATIVA 1 $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- S2) Prop. COMMUTATIVA $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- S3) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO $0_V \in V$ $v + 0 = v$ $\forall v \in V$
- S4) $\exists$ ELEMENTO OPPOSTO $\forall v \in V$ $\exists -v \in V$ tc $v + (-v) = 0_V$

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

tale che $\forall \alpha, \beta \in K$ $\forall v, w \in V$ si ha
- M1) PROP. ASSOCIATIVA 2 $\alpha(\beta v) = (\alpha \cdot \beta) v$
- M2) PROP DISTRIBUTIVA 1 $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
- M3) PROP DISTRIBUTIVA 2 $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$
- M4) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO $1 \in K$ tc $1 v = v$ $\forall v \in V$

RIPERCORRERE LA DEF $V = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$

$(\mathbb{R}, +)$ È GRUPPO COMMUTATIVO

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +)$ È GRUPPO COMMUTATIVO

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$

S1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \quad v \in \mathbb{R}$

$\alpha(\beta v) = (\alpha \cdot \beta) v$ ✓

S2) $\alpha \in \mathbb{Q} \quad v, w \in \mathbb{R}$

$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ ✓

S3) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \quad v \in \mathbb{R}$

$(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$ ✓

S4) $1 \in \mathbb{Q}$ tc $1 \cdot v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}$ ✓

ESERCIZIO 2

L'INSIEME DELLE MATRICI DIAGONALI DI ORDINE 3 FORMANO UN SOTTOSPAZIO DELL'INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE DI ORDINE 3.

ORDINE

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRICE È QUADRATA SE N° RIGHE = N° COLONNE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE È DIAGONALE SE È QUADRATA E I SUOI ELEMENTI $\neq 0$ SONO SOLO SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$W \subseteq V$ È UN SOTTOSPAZIO SE

- $w_1 + w_2 \in W \qquad \forall w_1, w_2 \in W$
- $\lambda w \in W \qquad \forall \lambda \in K \quad \forall w \in W$

V = SPAZIO MATRICI QUADRATE DI ORDINE 3
W = INSIEME " DIAGONALI " " "

$$w_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$w_1, w_2 \in W$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & b+e & 0 \\ 0 & 0 & c+f \end{pmatrix} \in W \quad \checkmark$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$w = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\lambda w = \lambda \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c \end{pmatrix} \in W$$

ESERCIZIO 3

DIMOSTRA CHE I POLINOMI DI GRADO (MINORE O UGUALE) A 2 A COEF. REALI FORMANO UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $R[x]$

$W \subseteq V$ è SOTTOSP $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \quad \forall w_1, w_2 \in W$

$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$

$p_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \qquad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \quad a_1 \neq 0$
$p_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \qquad a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \quad a_2 \neq 0$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) &= \\
&= \lambda_1 (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) + \lambda_2 (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \\
&= \lambda_1 a_1 x^2 + \lambda_1 b_1 x + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 a_2 x^2 + \lambda_2 b_2 x + \lambda_2 c_2 \\
&= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) x^2 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) x + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)
\end{aligned}$$

$\in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \neq 0$ SEMPRE? CONTROESEMPIO

$p_1(x) = x^2 + x + 2$
$p_2(x) = -x^2 + x + 2$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \dots = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \dots \notin \mathbb{R}_2[x]$

ESERCIZIO 4

$V = \mathbb{R}^5$, CONSIDERIAMO W_1, W_2 SOTTOSPAZI

$V = \mathbb{R}^5$, CONSIDERIAMO W_1, W_2 SOTTOSPAZI CHE SONO COSÌ DEFINITI

$$W_1 \begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad W_2 \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

DETERMINA INTERSEZIONE E SOMMA

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 = x_5 \text{ e } x_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_4 = 0 \text{ e } x_5 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$x_1 - 0 = 0$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 - x_5 = 0,\; x_4 = 0,\; x_5 = 0 \right\}$$

$$\hookrightarrow x_1 = 0$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$W_1 + W_2 = \langle$ tutti i generatori di W_1 e W_2 $\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

ESERCIZIO 5

$\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

$p_1(x) = x + x^2 + x^3$

$p_2(x) = 2 + x^2$

$p_3(x) = 2x + x^2$

$p_4(x) = x - x^3$

$p_5(x) = 1 - x$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$

$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = a v_2 + b v_3 + c v_4 + d v_5$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 + 0 + 0 \\ 1 = 0 + 0 - c + 0 \\ 1 = a + b + 0 + 0 \\ 1 = 0 + 2b + c - d \\ 0 = 2a + 0 + 0 + d \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ c = -1 \\ a + b = 1 \\ 2b + c - d = 1 \\ 2a + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ b = 1 - a \\ 2 - \cancel{2a} - 1 + \cancel{2a} = 1 \\ d = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -1 \\ b = 1 - a \\ \\ d = -2a \end{cases}$$

v_1 È LIN. <u>DIP</u>.

ORA BISOGNA CONTROLLARE I RESTANTI 4...