ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 24-25, 03/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

FUNZIONI LINEARI

(vedi Libro, Cap 2, p. 35)

V, W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$$f : V \longrightarrow W$$

<u>Def.</u> f è lineare se:

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}.$

Equivalentemente: $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\quad v_1, v_2 \in V.$$

<u>Proprietà</u>

$f : V \longrightarrow W$ lineare allora $f(\vec{0}) = \vec{0}$

<u>Dim</u> $v \in V \quad 0 \in \mathbb{K} \quad 0 \cdot v = \vec{0}$

$$\Rightarrow f(\vec{0}) = f(0 \cdot v) \underset{\uparrow f \text{ lineare}}{=} 0 \cdot f(v) = \vec{0} \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u> $f : \underset{V}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}} \longrightarrow \underset{W}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2}}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+4\\2x_2-7x_3+x_1\end{pmatrix}$$

f è lineare? $f(\vec{0}) = f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow f$ non è lineare.

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\2x_2-7x_3+x_1\end{pmatrix} \text{ è lineare.}$$

Es

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1x_2\\x_2-x_3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda x_1)(\lambda x_2)\\\lambda x_2-\lambda x_3\end{pmatrix}$$

Se $\lambda = 2$ #

$$= \begin{pmatrix}\lambda^2 x_1x_2\\\lambda(x_2-x_3)\end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\lambda f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1x_2\\x_2-x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1x_2\\\lambda(x_2-x_3)\end{pmatrix}$$

f non è lineare.

Le funzioni lineari sono molto particolari

Terminologia

funzione lineare = <u>omomorfismo</u>

funzione lineare invertibile (biiettiva) = <u>isomorfismo</u>

funzione lineare $f: \underbrace{V}_{\text{dominio}} \longrightarrow \underbrace{V}_{= \text{codominio}}$ = <u>endomorfismo</u>

endomorfismo invertibile (biiettivo) = <u>automorfismo</u>

Supponiamo f è isomorfismo $\boxed{\begin{array}{l} f: V \longrightarrow W \\ \quad v \longmapsto f(v) \end{array}}$

Ad ogni $v \in V$ corrisponde <u>uno ed un solo</u> vettore $w = f(v) \in W$

Ad ogni $w \in W$ corrisponde <u>uno ed un solo</u> vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.

V spazio vettoriale qualsiasi su $\mathbb{K}$. $\dim V = n$.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

Ogni $v \in V$ si può scrivere in <u>modo</u> <u>unico</u> come combinazione lineare

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$V \xrightarrow{f} \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

f è una biiezione.

Vediamo che f è lineare:

$v_1, v_2 \in V$

$$v_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \qquad f(v_1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$v_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \qquad f(v_2) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$f(v_1 + v_2) = ?$

$$v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n$$

$$\Rightarrow f(v_1 + v_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = f(v_1) + f(v_2)$$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda v_1 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

$$= (\lambda \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda \alpha_n) v_n$$

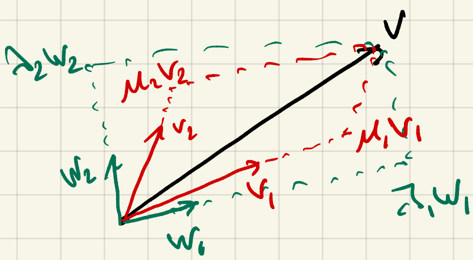
$$\Rightarrow f(\lambda v_1) = (\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n) = \lambda f(v_1)$$

$\Rightarrow f$ è <u>lineare</u>.

Allora f è isomorfismo.

Teorema Tutti gli spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ di dim. n sono isomorfi a $\mathbb{K}^n$. L'isomorfismo dipende dalla scelta di una base dello spazio.

Se $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ allora $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sono chiamati le coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.



$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$
$$= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$$

(λ_1, λ_2) coordinate di v rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$

(μ_1, μ_2) coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$

$f: V \longrightarrow W$ funzione lineare

(vedi Libro, Cap. 2, pag 37)

Nucleo di f

$$\ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = \vec{0} \} \subseteq V$$

Immagine di f

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \mid \text{esiste qualche } v \in V \text{ tale che } w = f(v) \} \subseteq W$$

Teorema $\ker(f)$ è un sottosp. di V.

Dim.

$$v_1, v_2 \in \ker(f) \overset{?}{\Longrightarrow} v_1 + v_2 \in \ker(f)$$

$$\Downarrow$$

$$f(v_1) = \vec{0}$$

$$f(v_2) = \vec{0}$$

$$f(v_1+v_2) \overset{f \text{ è lineare}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f(v_1+v_2) = \vec{0} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker(f).$$

Sia $v \in \ker(f)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\overset{?}{\Longrightarrow} \lambda v \in \ker(f)$

$$f(\lambda v) \overset{f \text{ è lineare}}{=} \lambda f(v) \overset{v \in \ker(f)}{=} \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda v \in \ker(f)$$

$\Rightarrow \ker(f)$ è chiuso per la somma e per la molt. fra scalari e vettori

$\Rightarrow$ è un sottosp. di V. $\blacksquare$

<u>Teorema</u> $\mathrm{Im}(f)$ è un sottosp. vettoriale di W.

<u>Dim.</u> $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow w_1 + w_2 \overset{?}{\in} \mathrm{Im}(f)$

$\Downarrow$

$w_1 = f(v_1)$ $\quad v_1, v_2 \in V$
$w_2 = f(v_2)$

Quindi: $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \overset{f \text{ è lineare}}{=} f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V})$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f)$

$w \in \mathrm{Im}(f), \quad \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \overset{?}{\in} \mathrm{Im}(f)$

$\Downarrow$

$w = f(v) \quad v \in V$

$\lambda w = \lambda f(v) \overset{f \text{ è lineare}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V}) \Rightarrow \lambda w \in \mathrm{Im}(f)$

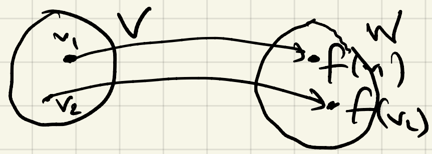
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f)$ è un sottosp. vett. di W. $\blacksquare$

<u>Teorema</u> $f: V \to W$ lineare.

f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{\vec{0}\}$.

<u>Dim.</u> $\Rightarrow$) Supp. che f sia iniettiva

[f iniettiva $\Leftrightarrow$ Se $v_1 \neq v_2$ allora $f(v_1) \neq f(v_2)$]



Sappiamo che $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Quindi se $v \in V$, $v \neq \vec{0}_V$ allora $f(v) \neq f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

$\Rightarrow f(v) \neq \vec{0}_W \Rightarrow v \notin \ker(f). \Rightarrow \ker(f) = \{\vec{0}_V\}$.

$\Leftarrow$) Supp. che $\ker(f) = \{\vec{0}\}$

Voglio dimostrare che f è iniettiva.

Supp. $v_1 \neq v_2 \overset{?}{\Rightarrow} f(v_1) \neq f(v_2)$

Se fosse $f(v_1) = f(v_2)$ allora

$\underbrace{f(v_1) - f(v_2)}_{} = \vec{0}$ f è lineare

Allora $f(v_1 - v_2) = \vec{0}$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(f) \overset{= \{\vec{0}\}}{\Rightarrow} v_1 - v_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow v_1 = v_2$ <u>ASSURDO</u>.

Quindi $f(v_1) \neq f(v_2) \Rightarrow f$ è iniettiva $\boxtimes$

Def. $f: V \longrightarrow W$ è <u>suriettiva</u> se

$$\mathrm{Im}(f) = W$$

Es. $f: V \to W$ lineare.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$$\underbrace{w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2), \dots,\ w_n = f(v_n)}_{\text{vettori } \in \mathrm{Im}(f)}$$

Sono una base di $\mathrm{Im}(f)$? NO (in generale)

Es.

$$f: \underset{V}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{W}{\mathbb{R}^3} \quad \text{lineare}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Base di $V = \mathbb{R}^3$, base canonica $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad w_2 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad w_3 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ sono una base di $Im(f)$?

Sono lin. indip.?

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ \lambda_3 = 3\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Infinite soluzioni

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ sono lin. dip.

e quindi <u>non</u> sono una base di $Im(f)$.

$f: V \longrightarrow W$ lineare

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V

allora $\{w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)\}$ è un <u>insieme di generatori</u> di $Im(f)$.

Dim

Sia $w \in \operatorname{Im}(f)$.

$w \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow w = f(v)$ per qualche $v \in V$.

$\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (perché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V)

$$\Rightarrow \overbrace{f(v)}^{w} = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$\overset{f \text{ lineare}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

$$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n.$$

$\Rightarrow w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ sono generatori di $\operatorname{Im}(f)$ ▨

Teorema (vedi libro, Cap. 2, pag. 38)

$f: V \to W$ lineare. ($\dim V$ finita)

Allora $\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim V.}$