ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 26-27, 04/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

$f: V \longrightarrow W$ è lineare se
1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = \vec{0} \} \subseteq V$$

Sottospazi

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \mid \text{esiste } v \in V \text{ tale che } f(v) = w \} \subseteq W$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \Rightarrow \{w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)\}$ sono generatori di $\mathrm{Im}(f)$

(non necessariamente una base)

Teorema (vedi libro, Cap. 2, pag. 38)

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V}$$

Es.

$$f : \underset{V}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{W}{\mathbb{R}^3}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad w_2 = f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad w_3 = f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ \lambda_3 = 3\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Infiniti soluzioni

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ sono dipendenti

$$\lambda_2 = 1,\quad \lambda_1 = -4,\quad \lambda_3 = 3$$

$$-4w_1 + w_2 + 3w_3 = \vec{0} \Rightarrow w_2 = 4w_1 - 3w_3$$

$$\mathrm{Im}(f) = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle$$

Sono lin. indip.

$\{w_1, w_3\}$ sono una base di $\mathrm{Im}(f)$

$$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$$

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(f) : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_3 = 3x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ 1 parametro libero di variare.

$$\dim(\ker(f)) = 1 \quad \text{Base di } \ker(f) = \{(-4, 1, 3)\}$$

<u>Dim</u> $\left(\dim V = \dim \ker(f) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \right)$

$$f : V \longrightarrow W$$

Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $\ker(f)$

$\Rightarrow \dim \ker(f) = r$

$\ker(f) \subseteq V$ sottosp.

Completo la base di $\ker(f)$ a una base di V:

$$\{ \underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\in \ker(f)}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_{r+s}}_{\substack{\text{vettori di } V \\ \text{ma } \notin \ker(f)}} \}$$

$\dim V = r + s$

$$\begin{array}{c|cccccccc} & v_1, & v_2, & \dots & v_r, & v_{r+1}, & \dots & , v_{r+s} \\ f & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{0} & \underbrace{f(v_{r+1})}_{w_1} & \dots & \underbrace{f(v_{r+s})}_{w_s} \end{array}$$

Sono generatori di $\mathrm{Im}(f)$

$\mathrm{Im}(f)$ è generata da $\{w_1, \dots, w_s\}$.

I vettori $\{w_1, \dots, w_s\}$ sono lin. indip.?

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s = \vec{0}$$

$$\underbrace{\lambda_1 f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_s f(v_{r+s})}_{} = \vec{0}$$

f è lineare $\quad f(\underbrace{\lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s}}_{\in \ker(f)}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

(Perché $\{v_1, \dots, v_r\}$ è una base di $\ker(f)$)

$$\underbrace{-\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r + \lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s} = \vec{0}}_{}$$

Combinazione lineare di $\underbrace{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}}_{\text{base di } V}$ uguale a $\vec{0}$.

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_r = 0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_s = 0$$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_s$ sono lin. indip.

e quindi $\{w_1, \dots, w_s\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Allora $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$

$\dim(\ker(f)) = r, \quad \dim(V) = r+s$

$$\Rightarrow \dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \quad \blacksquare$$

Def. (vedi Libro Cap. 2, p. 39-40)

$\dim(\ker(f))$ si chiama la nullità di f.

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ si chiama rango di f

$$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rango}(f) = \dim V$$

Es. $f: V = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 = W$ lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$\dim(\ker(f)) = ?$ base di $\ker(f) = ?$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = ?$ base di $\mathrm{Im}(f) = ?$

$$\ker(f) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = \vec{0} \}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + x_3 \\ -2x_1 + 12x_1 + 4x_3 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3x_1 + x_3 \\ 10x_1 = -3x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{9}{10}x_3 + x_3 = \frac{1}{10}x_3 \\ x_1 = -\frac{3}{10}x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{10}x_3 \\ x_1 = -\frac{3}{10}x_3 \end{cases}$$

1 parametro libero di variare x_3.

$\dim(\ker(f)) = 1$ $\quad x_3 = 10$

Base di $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$

$\left(\dim \underbrace{\ker(f)}_{1} + \dim(\mathrm{Im}(f)) \right.$
$\qquad \qquad \qquad \| $
$\qquad \qquad \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Base di $\mathrm{Im}(f)$ è qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$. Ad esempio la base canonica.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$

FUNZIONI LINEARI E BASI

(vedi Libro Cap. 2, p. 41)

Teorema Una funzione lineare $f: V \to W$ è completamente determinata dalla conoscenza di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ove $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V.

Dim. $v \in V \qquad f(v) = ?$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

Conoscendo $f(v_1), \dots, f(v_n)$ posso calcolare $f(v)$

Sia $f: V \to W$ lineare

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $(\dim V = n)$

$\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W $(\dim W = m)$

$f(v_1) \in W$ $\quad f(v_1) = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$

$f(v_2) = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$

$\vdots$

$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$f(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$

$f(v_2) = a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m$

$\vdots$

$f(v_n) = a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m.$

Colonna j di una matrice A.

$$\underset{\dim n}{f: V} \longrightarrow \underset{\dim m}{W} \longleftrightarrow A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Conclusione: Ad una funzione lineare $f: V \to W$ si può associare una matrice A. La matrice A dipende delle basi scelte (di V e di W).

Base dello spazio di arrivo

$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$ = matrice di $f: V \to W$ rispetto alla base $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W.

Base dello spazio di partenza

Es. $f: V = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 = W$ lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \qquad \underline{w} = \left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3w_1 - 2w_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -w_1 + 4w_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_1 - w_2$$

Siano V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f : V \longrightarrow W \text{ tale che } f \text{ è lineare} \}$$

$\mathrm{Hom}(V, W)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$f+g : V \longrightarrow W$ è definita da

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

$\lambda \in \mathbb{K}, \quad f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$\lambda f : V \longrightarrow W$ è definita da

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

Vediamo che $f+g$ così definita è lineare.

1) $v_1, v_2 \in V \qquad (f+g)(v_1+v_2) = (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2)$ ✓

$$\begin{aligned}(f+g)(v_1+v_2) &= f(v_1+v_2) + g(v_1+v_2) \\ &= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) \\ &= \underbrace{f(v_1) + g(v_1)} + \underbrace{f(v_2) + g(v_2)} \\ &= (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2)\end{aligned}$$

2) $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(f+g)(\lambda v) \stackrel{?}{=} \lambda (f+g)(v) \checkmark$$

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda v) &= f(\lambda v) + g(\lambda v) \\ &= \lambda f(v) + \lambda g(v) \\ &= \lambda (f(v) + g(v)) \\ &= \lambda (f+g)(v)\end{aligned}$$

Quindi $f+g \in \mathrm{Hom}(V,W)$

Similarmente si dimostra che $\lambda f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

$\vec{O} \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$\vec{O}_{\mathrm{Hom}(V,W)} : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto 0$$

$\forall v \in V \quad \vec{O}_{\mathrm{Hom}(V,W)}(v) = \vec{o} \qquad \ker(\vec{O}_{\mathrm{Hom}(V,W)}) = V$

Consideriamo $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$$L : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$$
$$L(f) = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g) = ?$$

matrici $m \times n$

Sia $A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$ $\quad B = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$$

$$g(v_j) = b_{1j} w_1 + \dots + b_{mj} w_m$$

$$\begin{aligned}(f+g)(v_j) &= f(v_j) + g(v_j) \\ &= (a_{1j} + b_{1j}) w_1 + \dots + (a_{mj} + b_{mj}) w_m\end{aligned}$$

Quindi, la colonna j di $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g)$ è

$$\begin{pmatrix} a_{1j} + b_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} + b_{mj} \end{pmatrix}$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$L(f+g)$

$$= A + B = \underbrace{M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)}_{L(f)} + \underbrace{M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)}_{L(g)}$$