ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 34-35, 15/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Precisazione:

Funzione Lineare = Applicazione Lineare = Omomorfismo di spazi vettoriali.

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$f: V \longrightarrow W$ lineare.

Sia $w \in W$.

La preimmagine di w è definita da

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

(preimmagine di w = Immagine inversa di w
= Antiimmagine di w)

$$f^{-1}(\vec{0}) = \ker(f)$$

Sia $U \subseteq W$ sottospazio.

La preimmagine di U è definita

da $f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\} \subseteq V$

($f^{-1}(U)$ = Immagine inversa di U = Antiimmagine di U)

<u>Prop.</u> $f^{-1}(U)$ è un sottosp. vettoriale di V.

<u>Dim.</u> Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(U) \Rightarrow v_1+v_2 \overset{?}{\in} f^{-1}(U)$

$$v_1, v_2 \in f^{-1}(U) \Rightarrow \begin{cases} f(v_1) \in U \\ f(v_2) \in U \end{cases}$$

$$U \text{ è sottosp. di } W \Rightarrow \underbrace{f(v_1)+f(v_2)}_{f(v_1+v_2)} \in U$$

Quindi $f(v_1+v_2) \in U \Rightarrow v_1+v_2 \in f^{-1}(U)$

Allora $f^{-1}(U)$ è chiuso per la somma vettoriale.

Sia $v \in f^{-1}(U)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow \lambda v \in f^{-1}(U)$

$$v \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(v) \in U$$

$$U \text{ è sottosp. di } W \Rightarrow \underbrace{\lambda f(v)}_{f(\lambda v)} \in U$$

$$\Rightarrow f(\lambda v) \in U \Rightarrow \lambda v \in f^{-1}(U).$$

Allora $f^{-1}(U)$ è chiusa per il prodotto fra scalari e vettori.

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ è sottosp. di V. ■

SISTEMI LINEARI

(vedi Libro Cap. 2, p. 67)

Sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$A = (a_{ij})$ $\quad A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\quad$ Matrice dei coefficienti.

m righe
n colonne

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Vettore delle incognite $\qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Vettore dei termini noti

Sistema: $\underline{AX = B}$

Se $m = n$ e A è invertibile allora:

moltiplichiamo per A^{-1} (a sinistra)

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

"invertire una matrice" $\longleftrightarrow$ "risolvere sistemi di eq. lineari"

$$\underbrace{A}_{\substack{\text{matrice}\\ m\times n}}\underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{B}_{m\times 1}$$

Sia f la funzione lineare che manda X in AX:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad f \quad} f(X) = AX = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f : \underset{\dim n}{V} \longrightarrow \underset{\dim m}{W} \qquad V = \mathbb{K}^n,\ W = \mathbb{K}^m$$

Se $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base canonica

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

Le colonne di A $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base $\underline{w}$.

$$\text{Se} \quad \underbrace{AX}_{f(X)} = \underbrace{B}_{B \in \mathrm{Im}(f)}$$

(B è combinazione lineare delle colonne di A)

Le soluzioni sono:

$$f^{-1}(B) = \{X \mid \underbrace{f(X)}_{AX} = B\}$$

Caso particolare: Se $B = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

allora $f^{-1}(\vec{0}) = \{X \mid f(X) = \vec{0}\} = \underbrace{\ker(f)}_{\text{sottosp. vettoriale.}}$

$$\underbrace{AX = \vec{0}}$$

Sistema lineare omogeneo

Nullità rango:

$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V = n$

$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = n - \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\text{rango di } A}$

rango di A $\|$ massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti

La dimensione dello spazio delle soluzioni $= \dim(\ker(f))$

$= \underbrace{n}_{\text{numero di incognite}} - \underbrace{\text{rango di } A}_{\text{\# di colonne lin. indip.}}$

Per un sistema non-omogeneo:

$$AX = B$$

$\underbrace{AX = \vec{0}}$ sistema omogeneo associato.

Le soluzioni sono $\ker(f)$.

Sia $\overline{X}$ una soluzione particolare di $AX=B$.

Sia Y una soluzione di $AY=\vec{0}$ $(Y \in \ker(f))$

Allora $\overline{X}+Y$ è un'altra soluzione di $AX=B$!

Infatti: $$A(\overline{X}+Y) = A\overline{X}+AY = B+\vec{0} = B$$

Viceversa: $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ soluzioni di $AX=B$.

Poniamo $Y = \overline{X}_2 - \overline{X}_1$

$$\Rightarrow AY = A(\overline{X}_2-\overline{X}_1) = A\overline{X}_2 - A\overline{X}_1 = B-B=\vec{0}$$

$Y = \overline{X}_2 - \overline{X}_1$ è una soluzione del sistema omogeneo.

$$\overline{X}_2 = \underbrace{\overline{X}_1}_{\text{Soluzione particolare}} + \underbrace{Y}_{\text{Soluzione del sistema omogeneo.}}$$

$\Rightarrow$ Le soluzioni di $AX=B$ sono tutte del tipo $= \{\overline{X}+Y \mid Y \text{ è soluzione di } AX=\vec{0}\}$

$= \overline{X}+\ker(f)$

$$\boxed{f^{-1}(B) = \overline{X}+\ker(f) \quad \text{con} \quad \overline{X}\in f^{-1}(B)}$$

Esempio: Consideriamo il sistema $AX=B$

con $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

a) Risolvere $AX=\vec{0}$

b) Trovare per quali $B\in\mathbb{R}^2$ il sistema $AX=B$ ammette soluzioni

c) Risolvere $AX=B$ con $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Si ha
$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$X \longmapsto f(X)=AX$$

a) $AX=\vec{0}$: $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+6x_2-4x_3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=3x_2-2x_3 \\ -6x_2+4x_3+6x_2-4x_3=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1=3x_2-2x_3 \\ 0=0 \end{cases}$ infinite soluzioni $\forall \underbrace{x_2,x_3}$

due parametri liberi di variare.

$\dim(\ker(f))=2$

Base di $\ker(f)$ = Spazio delle soluzioni è data

dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>$\ker(f)$ è il piano in $\mathbb{R}^3$ generato da v_1 e v_2.</u>

b) $AX=B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=b_1 \\ -2x_1+6x_2-4x_3=b_2 \end{cases}$

1^a eq. molt. per 2: $\left.\begin{cases} 2x_1-6x_2+4x_3=2b_1 \\ -2x_1+6x_2-4x_3=b_2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow b_2=-2b_1$

Quindi il sistema $AX=B$ ha soluzioni se e solo se $b_2=-2b_1$.

$$AX=B \Leftrightarrow B\in \mathrm{Im}(f)$$

$\mathrm{Im}(f)$ è generato dalle colonne di A!

$\mathrm{Im}(f)=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\right\rangle$ $\quad \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix}b_1=\lambda\\ b_2=-2\lambda\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; b_2=-2b_1\right\}$$

Rango di A = Massimo # di colonne linearmente indip. = 1

c) $AX=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=5 \\ -2x_1+6x_2-4x_3=-10 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=5+3x_2-2x_3 \\ -10-6x_2+4x_3+6x_2-4x_3=-10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=5+3x_2-2x_3 \\ 0=0 \end{cases}$$

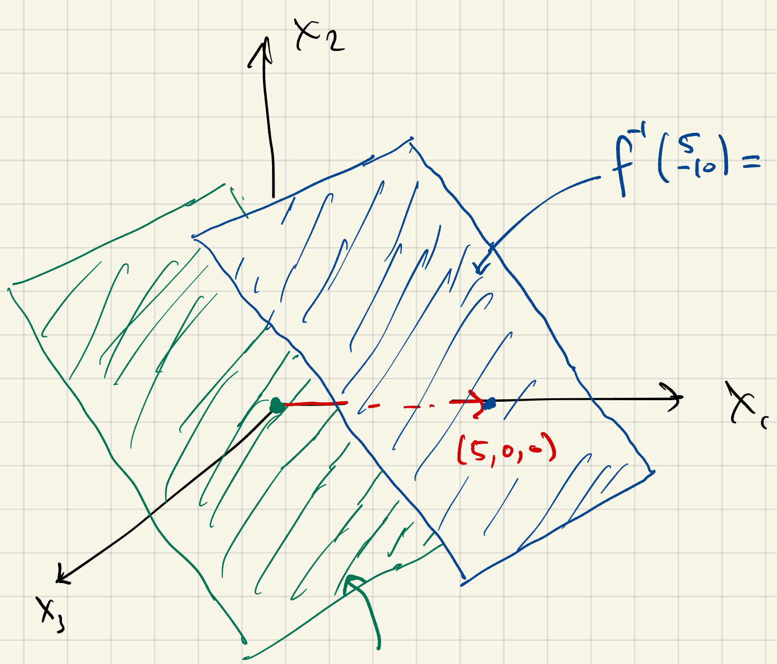
Le soluzioni di $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ sono $f^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall x_2, x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall x_2, x_3 \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{X}} + \underbrace{\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall x_2, x_3 \right\}}_{\ker(f)}$$

Cioè $f^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker(f)$



$f^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\bar{X}} + \ker(f)}$ Piano parallelo a $\ker(f)$ ma traslato per $\bar{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker(f)$ = piano passante per l'origine.

Sistema di eq. lineari

$AX = B$ $\quad A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrice dei coeff.

$m = \#$ di eq.
$n = \#$ di incog.

$X = \mathbb{K}^n$ vettore delle incognite

$B \in \mathbb{K}^m$ vettore noto.

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longmapsto AX$$

$\dim(\ker f)$ = dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \vec{0}$.

$$\dim(\ker f) = n - \underbrace{\text{rango di } A}_{\text{massimo numero di colonne lin. indip. di } A.}$$

$\boxed{\text{Im} f \text{ è generata da le colonne di } A}$

Infatti:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{A_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{A_2} x_2 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_n} x_n$$

Colonne di A

$$= \underbrace{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}_{\text{Comb. lineare delle colonne.}}$$

$$AX = B \Leftrightarrow B = \underbrace{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}_{\text{B è comb. lineare delle colonne di A.}} \qquad B \in \mathrm{Imf}.$$

Teorema di Rouché - Capelli

(vedi Libro Cap. 2, p. 73)

Il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni se e solo se $\mathrm{rango}(\underbrace{A}_{\text{matrice incompleta del sistema}}) = \mathrm{rango}(\underbrace{A|B}_{\text{matrice completa del sistema}})$

Dim. Il sistema $AX=B$ ha soluzioni

$\Updownarrow$

B è comb. lineare delle colonne di A.

$\Updownarrow$

B è lin. dip. dalle colonne di A.

$A \rightsquigarrow \mathrm{rango}(A) = r$

$(A|B) \rightsquigarrow \mathrm{rango}(A|B)$:

- r — se B è dip. dalle colonne di A
- $r+1$ — se B è lin. indip. dalle colonne di A

$\Rightarrow AX = B$ ha soluzione se e solo se

$\mathrm{rango}(A|B) = \mathrm{rango}(A)$ ☒