ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 36-37, 17/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

Sistema di Equazioni lineari $S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longmapsto AX = B$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $m \times 1$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longmapsto f(X) = AX = B$$

Soluzioni di $S = f^{-1}(B)$

Il sistema ammette soluzioni $\Longleftrightarrow B \in \operatorname{Im}(f)$

$\Longleftrightarrow$ B è combinazione lineare delle colonne di A

$\Longleftrightarrow \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|B)$

(Teorema di Rouché Capelli)

Supponiamo che $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|B)$

$\Rightarrow$ Il sistema ammette soluzioni. Quanti?

Sup. che $\operatorname{rango}(A) = r$.

$\operatorname{rango}(A) = \dim(\operatorname{Im} f) =$ Numero di colonne lin. indip. di A.

$$\dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{r} = n \quad \text{(Nullità-Rango)}$$

$$\dim(\ker(f)) = n - r$$

$$f^{-1}(B) = \underbrace{\bar{X}}_{\text{Soluzione particolare}} + \underbrace{\ker(f)}_{\text{dimensione } n-r}$$

- Se $\underset{\text{rango di } A}{r} = \underset{\text{Numero di incognite}}{n}$

  $\Rightarrow$ La soluzione è **unica**.

- Se $r < n$ ci sono ∞ soluzioni

  (∞^{n-r} soluzioni)

  $n-r$ parametri liberi di variare.

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

(vedi Libro Cap. 2 p. 74)

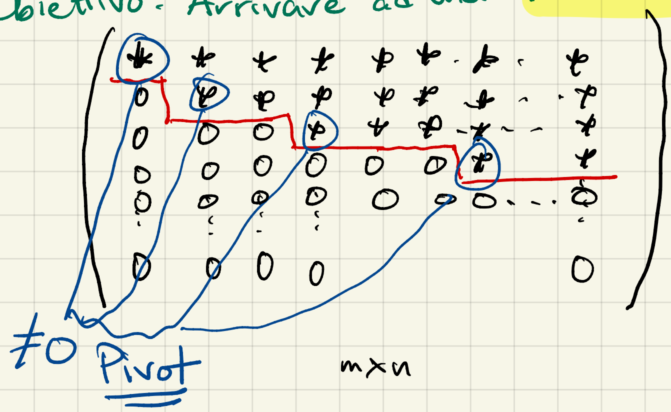
Operazioni elementari sulle righe:

1) Scambiare due righe fra loro.
2) Moltiplicare una riga per un numero $\neq 0$.
3) Sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre righe.

Obiettivo: Arrivare ad una Matrice a Scala

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Operazioni elementari sulle righe}}$$

$m \times n$



Matrice in forma a scala = Il primo elemento diverso da zero di ciascuna riga si trova a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Primo elemento diverso da zero di ciascuna riga si chiama <u>pivot</u>.

Ridurre la matrice A alla sua forma a scala è utile per:

1) Calcolare il rango di A
2) Risolvere il sistema $AX=\vec{0}$.

<u>Esempio</u>

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a \text{ riga} \leftrightarrow 3^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2^a \text{ riga} \leftrightarrow 3^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[4^a \text{ riga} + (-1)\, 2^a \text{ riga}]{} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4^a \text{ riga} + (-1)\, 3^a \text{ riga}]{} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>pivot</u>

Interpretazione dell'algoritmo di Gauss I

1) Facciamo operazioni con le righe $\Rightarrow$ Il numero di righe linearmente indipendenti non cambia.

Numero di righe linearmente indipendenti di A = Numero di righe lin. indip. della matrice in forma a scala = Numero di pivot $=$ Numero di righe non nulle della matrice a scala.

Pivot

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & & * \\ 0 & * & * & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

lin. indip.

Pivot

$$\lambda_1(* \ * \cdots *) + \lambda_2(0 \ * \ * \cdots *) + \lambda_3(0\,0\,0\, * \cdots *) = \vec{0}$$

Pivot

$$\begin{cases} *\,\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ *\,\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ *\,\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

2) Matrice $A \longmapsto \underbrace{AX = \vec{0}}_{\text{Sistema omogeneo.}}$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Facciamo operazioni con le equazioni

$\Rightarrow$ Le soluzioni non cambiano.

Numero di pivot $=$ Numero di righe non nulle della matrice a scala $=$ Numero di equazioni indipendenti.

$$A \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elementari}} \underbrace{A'}_{\text{matrice a scala}}$$

$$\boxed{\text{Soluzioni di } AX = \vec{0}} = \boxed{\text{Soluzioni di } A'X = \vec{0}}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elementari}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

1) A ha 3 righe linearmente indipendent.

2) $AX = \vec{0} \Longleftrightarrow A'X = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 \quad = 0 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 + x_4 \quad = 0 \\ \qquad\qquad 3x_3 \qquad + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Sostituzione all'indietro:
$$\begin{cases} 4x_1 = -x_2 - 2x_4 \\ 2x_2 = -4x_3 - x_4 = 4x_5 - x_4 \\ x_3 = -x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x_4 - 2x_5 - 2x_4\right) = -\frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + 2x_5 \\ x_3 = -x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + 2x_5 \\ x_3 = -x_5 \end{cases}$$

2 parametri liberi di variare x_4 e x_5.

Interpretazione dell'algoritmo di Gauss II

Sia $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$X \longmapsto f(X) = AX$$

$A \xrightarrow[\text{elem. sulle righe}]{\text{Operazioni}} A' \Rightarrow A'$ è la matrice di f rispetto a una base diversa di $\mathbb{K}^m$.

Sappiamo:

$$\underset{\substack{\| \\ \text{Numero di colonne} \\ \text{lin. indip. di } A}}{\text{Rango di } A} = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \underset{\substack{\| \\ \text{Numero di colonne} \\ \text{lin. indip. di } A'}}{\text{Rango di } A'}$$

Quindi: Il numero di colonne linearmente indipendenti (il rango) non cambia quando si fanno operazioni elementari sulle righe.

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(\underbrace{A'}_{\text{forma a scala}})$$

Colonne di A': Pivot $\neq 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{linearmente indip.}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Comb. lineare}} \text{ delle colonne con pivot.}$$

Quindi

rango(A) = Numero di pivot = Numero di righe della matrice a scala.

Infatti abbiamo trovato: A qualsiasi matrice

$$\underbrace{\underbrace{\text{Numero di righe linearmente indipendenti}}_{\text{Rango per righe}} = \underbrace{\text{Numero di colonne linearmente indipendenti.}}_{\text{Rango per colonne.}}}_{\text{Rango}}$$

Rango(A) = Numero di righe non nulle della sua forma a scala

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

$\downarrow$ Forma a scala

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(X) = AX$

$f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

$\dim(\ker(f)) = 2$

(per nullità-rango)

Es. Sia $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x) = AX \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1ª riga} \leftrightarrow \text{2ª riga}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3ª riga} - 2\times \text{1ª riga}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3ª riga} - \text{2ª riga}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rango}(A) = 2 \qquad \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

Base di $\mathrm{Im}(f)$: Prendo due colonne di A linearmente indipendenti $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Nullità-rango $\Rightarrow \dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{2} = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}.$$

Per trovare una base di $\ker(f)$ devo risolvere $f(X) = \vec{0} \Leftrightarrow AX = \vec{0}$

Lavoro con la matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2\left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4\right) - 4x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}\right\} \text{2 parametri liberi di variare}$$

Base di $\ker(f)$: $\left\{ \underset{\substack{x_4 = 0 \\ x_3 = 2}}{\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{x_3 = 0 \\ x_4 = 2}}{\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$