ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 40-41, 22/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

A matrice $m \times n$

$$A \xrightarrow[\text{elementari sulle righe}]{\text{Operazioni}} A' \quad \text{matrice in forma a scala}$$

Esiste B matrice $m \times m$ invertibile tale che $BA = A'$.

Per trovare la matrice B:

$$\underbrace{(A}_{\text{matrice } m\times n} \mid \underbrace{I)}_{\text{matrice identica } m\times m} \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elementari}} (\overbrace{A'}^{A'=BA \text{ matrice in forma a scala.}}, \underbrace{B)}_{\text{matrice } B \text{ cercata.}}$$

<u>Esempio:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Op. elem.}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

A' forma a scala — B matrice cercata

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Siano $v_1 = (3, -1, 4)$

$v_2 = (2, -2, 1)$

$v_3 = (0, 4, 5)$

$v_4 = (-1, 3, 2)$

$\dim(\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle) = 2$

Ultime 2 righe di B dicono che:

$$\begin{cases} 0 \cdot v_1 - v_2 + v_3 - 2v_4 = \vec{0} \\ v_1 - 2v_2 + 0 \cdot v_3 - v_4 = \vec{0} \end{cases}$$

Relazioni di dip. lineare tra i vettori v_1, v_2, v_3, v_4.

Esercizio $V = \mathbb{R}^4$

$u_1 = (2, 0, 1, -1)$

$u_2 = (1, 1, 2, 0)$

$w_1 = (-1, 1, 0, 0)$

$w_2 = (-2, 0, 1, 0)$

$w_3 = (0, 0, 0, 1)$

$U = \langle u_1, u_2 \rangle$ $\qquad$ $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

1) Calcolare dimensione e base di U e W.

2) Calcolare dimensione e base di $U + W$ e $U \cap W$.

1) u_1 e u_2 sono lin. indip. $\Rightarrow \dim U = 2$

Base di U è $\{u_1, u_2\}$

w_1, w_2, w_3 sono lin. indip.?

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{array}$$

2ª riga $-2\times$ 1ª riga $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

Forma a scala di A

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow \dim W = 3.$ Base di $W = \{w_1, w_2, w_3\}$

2) $v \in U \cap W \Rightarrow v \in U,\ v \in W$

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \beta_3 w_3 = \vec{0}$$

Sistema di 4 eq. lineari per 5 incognite

Oppure:

$$\begin{array}{c} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_3 \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1ª riga $\leftrightarrow$ 2ª riga

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2^a \text{ riga} - 2\times 1^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga} + 1^a \text{ riga} \\ 4^a \text{ riga} + 2\times 1^a \text{ riga}}} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga} \\ 4^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga}}} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4^a \text{ riga} + 2\times 3^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\times 5^a \text{ riga} + 4^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} & & & & \boxed{3 \quad -2 \quad 2 \quad 1 \quad 3} & & & & \end{array}\right)$$

A' forma a scala di A

B tale che $BA = A'$.

Coeff. di una relazione di dip. lineare fra le righe di A

$$\text{rango}(A) = 4$$

$$\Rightarrow \dim(\langle \underbrace{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3}_{\text{generatori di } U+W} \rangle) = 4$$

$$\Rightarrow \dim(U+W) = 4 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$$

$$3u_1 - 2u_2 + 2w_1 + w_2 + 3w_3 = \vec{0}$$

$$v = \underbrace{3u_1 - 2u_2}_{\in U} = \underbrace{-2w_1 - w_2 - 3w_3}_{\in W} \in U \cap W$$

$$v = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{4} = \underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{3} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{1}$$

Base di $U \cap W$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Base di $U+W$ è qualsiasi base di $\mathbb{R}^4$.

Ad esempio la base canonica.

MATRICE INVERSA

Sia A una matrice $m \times n$ (m righe, n colonne)

Def. A è invertibile se esiste B tale che $AB = I$, $BA = I$.

Se A è invertibile, scriviamo $B = A^{-1}$.

A corrisponde a una funzione lineare

$$f : V \longrightarrow W \qquad \begin{aligned} m &= \dim(W) \\ n &= \dim(V) \end{aligned}$$

Se la matrice A^{-1} (inversa di A) esiste

allora corrisponde

$$f^{-1} : W \longrightarrow V \quad \text{inversa di } f \qquad \left(\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= id_W \\ f^{-1} \circ f &= id_V \end{aligned} \right)$$

Quindi A è invertibile $\Leftrightarrow$ f è invertibile

$\Leftrightarrow$ f è <u>biiettiva</u> (iniettiva e suriettiva)

$\Leftrightarrow$ f è <u>isomorfismo</u>.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{n = m}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{A \text{ è una matrice quadrata.}}_{\text{condizione necessaria (non sufficiente)}}$

OSS. Se $m = n$ allora $f : V \longrightarrow W$ è <u>iniettiva</u> se e solo se è <u>suriettiva</u>.

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim V = n = m$$

Dim.

1) Supp. che f sia iniettiva $\Rightarrow \ker(f) = \{\vec{0}\}$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = n = m$$

$$\underbrace{\operatorname{Im}(f)}_{\dim\, m} \subseteq \underbrace{W}_{\dim\, m} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = W$$

$\Rightarrow f$ è suriettiva.

2) Supp. che f è suriettiva.

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = W \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W) = m = n$$

Quindi $\dim(\ker(f)) + \underbrace{n}_{\dim(\operatorname{Im}(f))} = n \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$

$\Rightarrow \ker(f) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow f$ è iniettiva.

$\dim(\operatorname{Im} f) = \text{rango}(A)$

$\dim(\ker(f)) =$ nullità di A.

Sia A una matrice **quadrata** $n \times n$

A è invertibile (A^{-1} esiste) $\Leftrightarrow$
- f è biettiva
- $\Updownarrow$
- $\text{rango}(A) = n$ → (le righe di A sono lin. indip.) → (le colonne di A sono lin. indip.)
- $\Updownarrow$
- nullità di $A = 0$
- Il sistema $AX = \vec{0}$ ha soluzione unica $X = \vec{0}$.

Sia A $n \times n$ invertibile. (A ha rango n)

Come calcolare A^{-1}?

A invertibile $\Rightarrow$ rango$(A) = n$.

n pivot $\neq 0$

$$A \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elementari}} A' = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & * \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow$ Operazioni elementari sulle righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare A^{-1}:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{elementari sulle righe}]{\text{operazioni}} (I \mid B)$$

Matrice B tale che $BA = I$

$\Rightarrow \boxed{B = A^{-1}}$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Calcolare A^{-1}.

A' forma a scala $\Rightarrow$ rango$(A) = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3^a \text{ riga} - 1^a \text{ riga}]{2^a \text{ riga} - 1^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1^a \text{ riga} - 3^a \text{ riga}}]{}\ \xrightarrow[2^a \text{ riga} + 3^a \text{ riga}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1^a \text{ riga} - 2 \times 2^a \text{ riga}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matrice cercata.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

Es. Calcolare la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2^a \text{ riga} + 2 \times 1^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga} - 3 \times 1^a \text{ riga}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

← Forma a scala (rango (A) = 3 ok)

$$\xrightarrow[3^a \text{ riga} + \frac{3}{5} \times 2^a \text{ riga}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{7}\, 3^a \text{ riga}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2^a \text{ riga} - 3^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5/7 & 10/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}\ 2^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1^a \text{ riga} - 2^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6/7 & -2/7 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 9/7 & -3/7 & -5/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2} \times 1^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 3/7 & -1/7 & -1/14 \\ 1/7 & 2/7 & 1/7 \\ 9/7 & -3/7 & -5/7 \end{matrix}}_{\text{Matrice cercata.}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 & -1/14 \\ 1/7 & 2/7 & 1/7 \\ 9/7 & -3/7 & -5/7 \end{pmatrix}$$

Matrice non-invertibile $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Proviamo a calcolare A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1ª riga} \leftrightarrow \text{2ª riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3ª riga} - 2\,\text{1ª riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Matrice in forme a scala

$$\xrightarrow[\text{3ª riga} - \text{2ª riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{rango}(A) = 2$

$\Downarrow$

A non è invertibile.

Non possiamo andare avanti.