ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 46-47, 29/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Matrici di cambiamento di base

$$f : V \longrightarrow W \quad \text{lineare}$$

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\underline{w}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ basi di W

A matrice di f rispetto alle basi $\underline{v}, \underline{w}$:

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

A' matrice di f rispetto alle basi $\underline{v}', \underline{w}'$:

$$A' = M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f)$$

Si ha $\begin{cases} A = S^{-1} A' P \\ A' = S A P^{-1} \end{cases}$ (Vedi lezioni 32-33 11/11/2021)

P matrice di cambiamento di base in V

S matrice di cambiamento di base in W.

$$P = M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id) \qquad S = M^{\underline{w}'}_{\underline{w}}(id)$$

$$P^{-1} = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id) \qquad S^{-1} = M^{\underline{w}}_{\underline{w}'}(id)$$

Caso particolare $V = W$.

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo lineare

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V $\qquad A = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f)$, $\quad A' = M_{\underline{v}'}^{\underline{v}'}(f)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = P}}$$

Se A e A' sono le matrici di f rispetto a basi diverse, si ha:

$$A = P^{-1} A' P \iff A' = P A P^{-1}$$

$$\det(A) = \det(P^{-1} A' P)$$
$$= \det(P^{-1}) \det(A') \det(P)$$
$$= \frac{1}{\cancel{\det}(P)} \det(A') \cancel{\det}(P)$$
$$= \det(A') \qquad \Rightarrow \underline{\det(A) = \det(A')}$$

Quindi: Tutte le matrice associate alla stessa funzione lineare f (rispetto a basi diverse) hanno lo stesso determinante (che dipende solo da f e non delle base fissate.

Si pone $\det(f) = \det(A)$, dove A è una matrice associata a f.

Def. Due matrici $n \times n$, A e B, si dicono <u>simili</u> se rappresentano la stessa funzione lineare f, rispetto a basi diverse

(Quindi: $A = P^{-1} B P$, dove P è una matrice invertibile (di cambiamento di base))

OSS: Se A e B sono simili allora $\det(A) = \det(B)$.

Ma attenzione: Se $\det(A) = \det(B)$ ciò non significa che A e B siano necessariamente simili.

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \qquad \det(B) = 0$$

$$P^{-1} A P = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B$$

A e B non sono simili.

A e B simili $\Rightarrow$ $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$.

Data $f: V \to V$ come devo scegliere la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in modo che la matrice $A = M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)$ sia la più "semplice" possibile?

Semplice — Matrice triangolare
— Meglio ancora se si riesce a ottenere una matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

(vedi libro, Cap. 4)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\qquad f: V \longrightarrow V$

$$f(v_1) = \overset{=\lambda_1}{a_{11}} v_1 + \underbrace{\overset{=0}{a_{21}} v_2 + \dots + \overset{=0}{a_{n1}} v_n}_{0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1ª colonna di A

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$$f(v_2) = \overset{=0}{a_{12}} v_1 + \overset{=\lambda_2}{a_{22}} v_2 + \underbrace{\overset{=0}{a_{32}} v_3 + \dots + \overset{=0}{a_{n2}} v_n}_{0}$$

2ª colonna di A

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

ecc...

Conclusione: la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ deve essere scelta in modo che:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$
$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = \lambda_n v_n$$

(Cerchiamo una base di V costituita da <u>autovettori</u> di f)

<u>Def</u>. Un vettore $v \neq \vec{0}$ è detto <u>autovettore</u> di f se <u>$f(v) = \lambda v$</u>. λ si chiama <u>autovalore</u> (vettori propri / valori propri).

In termini di matrici, l'equazione $f(v) = \lambda v$ diventa $Av = \lambda v$.

<u>Probleema</u>: data una funzione lineare $f: V \to V$ oppure data una matrice quadrata A, come si possono calcolare gli autovalori e gli autovettori di f, o di A?

Cerchiamo di risolvere una eq. del tipo:

$$Av = \lambda v$$

incognita (autovettore)

incognita (autovettore)

incognita (autovalore)

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

n equazioni

$n+1$ incognite $x_1,\dots,x_n,\lambda$.

Idea $Av=\lambda v$

$$Av-\lambda v=\vec{0} \qquad \lambda v=\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}}_{I}v$$

$$(A-\lambda I)v=\vec{0}$$

I = matrice identica

Sia $B=A-\lambda I$

$$Bv=\vec{0}$$

Una soluzione esiste sempre $v=\vec{0}$

non è accetabile.

Voglio che ci siano altre soluzioni ($\neq\vec{0}$)

Quindi questo sistema $Bv=\vec{0}$ deve ammettere più di una soluzione $\Rightarrow$ Vogliamo che B non sia invertibile.

$$\Rightarrow \boxed{\det B=0}$$

Si conclude che λ soddisfa

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

Una equazione per l'incognita λ.

Risolvendo questa equazione si trovano gli autovalori λ della matrice A.

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

$\det(A-\lambda I) \leftarrow$ polinomio caratteristico della matrice A

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

è un polinomio di grado n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det(A-\lambda I) = 0 \quad \text{equazione caratteristica}}$

Es. $A = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Calcolare gli autovalori di A.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -7-\lambda & -9 \\ 6 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-7-\lambda)(8-\lambda) - (-9)(6)$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 56 + 54$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

Equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

<u>Es.</u> Calcolare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(1)$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 + 1$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 7$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$ (eq. caratteristica)

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$
$$\in \mathbb{C}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

<u>Oss.</u> Non esistono sempre autovalori reali!
Ma esistono <u>sempre</u> autovalori complessi (Teo. Fond. Algebra).

Es. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Calcolare gli autovalori di A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(4-\lambda) - (-1)(4)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$ "due soluzioni reali coincidenti"

Equazione caratteristica $(\lambda - 2)^2 = 0$

L'unico autovalore è $\lambda = 2$ (con molteplicità 2)

Def. Se nel polinomio caratteristico di A compare un fattore del tipo $(\lambda - a)^r$, si dice che l'autovalore $\lambda = a$ ha <u>molteplicità r</u> (questa è detta la <u>molteplicità algebrica</u> di un autovalore).

Teorema Due matrici simili A e B hanno <u>lo stesso polinomio caratteristico</u> (e quindi hanno anche gli stessi autovalori)

(vedi Libro, Cap. 4, p. 142)

Dim. A e B simili $\Leftrightarrow$ esiste una matrice invertibile P (matrice di cambiamento di base) tale che $A = P^{-1}BP$

$\det(A - \lambda I)$ = pol. caratteristico di A

$$= \det(P^{-1}BP - \lambda I) \qquad \lambda P^{-1} I P = P^{-1}(\lambda I)P$$

$$= \det(P^{-1}BP - P^{-1}(\lambda I)P)$$

$$= \det(P^{-1}(B - \lambda I)P)$$

$$= \det(P^{-1}) \det(B - \lambda I) \det(P)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(P)}} \det(B - \lambda I) \cancel{\det(P)}$$

$= \det(B - \lambda I)$ = pol. caratteristico di B. $\blacksquare$

Autovettori

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda I)v = \vec{0}$$

Sostituire il valore di λ trovato.

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema di eq. lineari
Le soluzioni (non nulle) sono gli autovettori che corrispondono all'autovalore λ.

Def. Sia λ un autovalore di A.

L'insieme delle soluzioni del sistema $(A-\lambda I)v=\underline{0}$ è un sottospazio vettoriale che contiene gli autovettori relativi all'autovalore λ. È detto autospazio relativo all'autovalore λ.

La dimensione di questo autospazio è detta la molteplicità geometrica dell'autovalore λ.

Es. $A=\begin{pmatrix}-7 & -9\\ 6 & 8\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)^{1}(\lambda+1)^{1}$$

Autovalori $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ molteplicità algebrica 1

Calcolare gli autospazi (gli autovettori).

$\lambda_1=2$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-7-2 & -9\\ 6 & 8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -9\\ 6 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-9 & -9\\ 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9x_1 - 9x_2 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 parametro libero di variare

L'autospazio ha dimensione 1.

$$\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Base}} \leftarrow \text{autovettore di } \lambda_1 = 2.$$

Moltiplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è uguale a 1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{2}_{\lambda_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \checkmark$$

$\lambda_2 = -1$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -7-(-1) & -9 \\ 6 & 8-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un parametro libero di variare.

$$\begin{cases} -6x_1 - 9x_2 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda_2 = -1$

è $1 \Rightarrow$ Moltiplicità geometrica di $\lambda_2 = -1$ è 1.

Base : $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2$ autovettore di $\lambda_2 = -1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{(-1)}_{\lambda_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2}$$