ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 48-49, 01/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

$\overbrace{A \text{ e } B}^{\text{matrici quadrate}}$ simili $\Rightarrow$ esiste P invertibile tale che $A = P^{-1} B P$

(A e B rappresentano la stessa funzione lineare rispetto a basi diverse)

$f : V \longrightarrow V$ endomorfismo.

Esiste una base $\underline{v}$ di V tale che

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ Matrice diagonale ?

$\underline{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n v_n$

autovalori

autovettori

$v_1 \neq \vec{0}$

$v_2 \neq \vec{0}$

$\vdots$

$v_n \neq \vec{0}$

Per trovare autovalori di A (matrice $n \times n$)

$$\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{Polinomio caratteristico di grado } \underline{n}} = 0$$

Equazione caratteristica

Autospazio relativo al autovalore λ: (sottospazio vettoriale)

Vettori che soddisfano $(A - \lambda I)v = \vec{0} \Leftrightarrow Av = \lambda v$

λ autovalore $\Rightarrow$

- molteplicità algebrica = molteplicità della radice λ del polinomio caratteristico
- molteplicità geometrica = dimensione dell'autospazio relativo a λ.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)^{1}(\lambda + 1)^{1}$$

Autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ molteplicità algebrica 1

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base dell'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$

$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ base dell'autospazio relativo a $\lambda_2 = -1$

$$\underline{v} = \{v_1, v_2\} \qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = A v_1 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_1$$

$$= 2v_1 + 0 \cdot v_2$$

$$f(v_2) = A v_2 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) v_2$$

$$= 0 \cdot v_1 + (-1) v_2$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Matrice diagonale.}$$

$$\underline{e} = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(e_1) = A e_1 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} = -7e_1 + 6e_2$$

$$f(e_2) = A e_2 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} = -9e_1 + 8e_2$$

$$M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = A$$

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= P^{-1} A P \\ A &= P D P^{-1} \end{aligned}}$$

(A e D sono simili)

$D = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f)$

$A = M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)$

$P = \underbrace{M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(id)}_{\text{Le colonne di } P \text{ sono gli autovettori.}}$ Matrice di cambiamento di base

$P^{-1} = M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(id)$

P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di A
(se gli autovettori costituiscono una base)

D è la matrice diagonale, che ha sulla diagonale gli autovalori di A

A è simile a una matrice diagonale.

Def. Una matrice A si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale.

Questo accade se e solo se esiste una base costituita da autovettori di A.

Se A è una matrice $n \times n$, ciò significa che devono esistere n autovettori linearmente indipendenti.

OSS. Siano λ_i, λ_j autovalori di A con $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Siano V_{λ_i} = autospazio relativo a λ_i

V_{λ_j} = autospazio relativo a λ_j

Allora $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\vec{0}\}$

(V_{λ_i} e V_{λ_j} sono in somma diretta).

Dim.

Sia $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$

allora
$$\left.\begin{aligned} v \in V_{\lambda_i} &\Rightarrow Av = \lambda_i v \\ & \qquad \shortparallel \\ v \in V_{\lambda_j} &\Rightarrow Av = \lambda_j v \end{aligned}\right\} \lambda_i v = \lambda_j v$$

$$\lambda_i v = \lambda_j v \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j) v = \vec{0} \xRightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} v = \vec{0} \quad \blacksquare$$

__Teorema__ (vedi Libro, Cap. 4, p. 144)

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalori di A.
Siano $v_1, v_2, \dots, v_r$ autovettori corrispondenti.

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$ (cioè, se gli autovalori sono tutti distinti) allora gli autovettori $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indip.

__Dim.__ Siano V_{λ_1} autospazio relativo a λ_1

$\vdots$ $\vdots$

V_{λ_r} autospazio relativo a λ_r

Sappiamo $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\vec{0}\}$

Somma diretta

Sia $W = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

Sia
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = \vec{0}$$
$$\underset{V_{\lambda_1}}{\Uparrow} \qquad \underset{V_{\lambda_2}}{\Uparrow} \qquad \underset{V_{\lambda_r}}{\Uparrow}$$
$$\psi \qquad \psi \qquad \psi$$
$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_r = \vec{0}$$

La scrittura di un vettore $w \in W$ della forma
$$w = \underset{V_{\lambda_1}}{u_1} + \underset{V_{\lambda_2}}{u_2} + \dots + \underset{V_{\lambda_r}}{u_r}$$
è unica (perché la somma è diretta)

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_r = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono lin. indip. $\blacksquare$

<u>Conseguenza</u>: Se una matrice A $n \times n$ ha n autovalori con molteplicità algebrica 1, allora la matrice è diagonalizzabile.

<u>Es.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lezione precedente $\Rightarrow$ Autovalori $\lambda_1 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$

1) A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

(non ci sono autovalori reali quindi non ci sono autovettori reali $\Rightarrow$ non esiste una base costituita da autovettori)

2) A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$

(ci sono due autovalori con molt. algebrica 1 e A è 2×2)

<u>Es.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & -8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1) Stabilire se A è diagonalizzabile.

2) Trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $A = PDP^{-1}$.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 4 \\ -3 & -6-\lambda & -8 \\ 3 & 7 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 4 \\ -3 & -6-\lambda & -8 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

3^a riga $+ 2^a$ riga

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda^{+} & 4^{-} & 0^{+} \\ -3^{-} & -6-\lambda^{+} & -2+\lambda^{-} \\ 0^{+} & 1-\lambda^{-} & 0^{+} \end{pmatrix}$$

3^a colonna $- 2^a$ colonna

$$= -(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -3 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppo rispetto alla 3^a riga

$$= -(1-\lambda)(3-\lambda)(-2+\lambda)$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \ldots$$

Autovalori:

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = 2$

Ci sono 3 autovalori reali e distinti (hanno moltiplicità algebrica 1)

$\lambda_1 \rightsquigarrow v_1$ autovettore
$\lambda_2 \rightsquigarrow v_2$ autovettore
$\lambda_3 \rightsquigarrow v_3$ autovettore

3 autovettori lin. indip. $\Rightarrow$ Formano una base $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

autovettori.

Cerchiamo gli autovettori:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-1 & 4 & 4 \\ -3 & -6-1 & -8 \\ 3 & 7 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -8 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}\ 1^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2^a \text{ riga} + 3 \times 1^a \text{ riga}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 - Parametro libero di variare x_3

Se $x_3 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3-3 & 4 & 4 \\ -3 & -6-3 & -8 \\ 3 & 7 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -3 & -9 & -8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga}]{} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -3 & -9 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1^a \text{ riga} \leftrightarrow 2^a \text{ riga} \\ \frac{1}{4}\, 2^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga} + 2 \times 2^a \text{ riga}}]{} \begin{pmatrix} -3 & -9 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 = 9x_2 + 8x_3 = -9x_3 + 8x_3 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 parametro libero di variare x_3.

Se $x_3 = 3$ trovo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = 2}$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 3-2 & 4 & 4 \\ -3 & -6-2 & -8 \\ 3 & 7 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -3 & -8 & -8 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

... Si trova $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \longleftrightarrow \underline{AP = PD}$$

Controllare