ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 60-61, 16/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$. $\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U.

Procedimento di Gram-Schmidt:

Base ortogonale di U

$$\begin{cases} u_1' = u_1 \\ u_2' = u_2 - \dfrac{u_2 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1' \\ u_3' = u_3 - \dfrac{u_3 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1' - \dfrac{u_3 \cdot u_2'}{\|u_2'\|^2} u_2' \\ \vdots \\ u_r' = u_r - \dfrac{u_r \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1' - \dfrac{u_r \cdot u_2'}{\|u_2'\|^2} u_2' - \dots - \dfrac{u_r \cdot u_{r-1}'}{\|u_{r-1}'\|^2} u_{r-1} \end{cases}$$

Base ortonormale di U

$$\begin{cases} u_1'' = \dfrac{u_1'}{\|u_1'\|} \\ u_2'' = \dfrac{u_2'}{\|u_2'\|} \\ \vdots \\ u_r'' = \dfrac{u_r'}{\|u_r'\|} \end{cases}$$

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ allora

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ soddisfa } \underbrace{PP^T = P^T P = I}_{P \text{ è ortogonale}} \quad P^{-1} = P^T$$

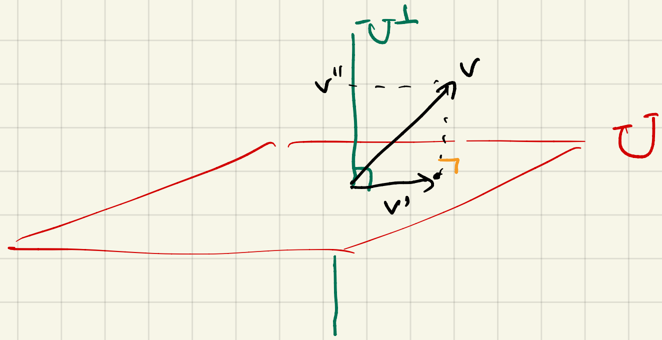
$P = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(id)$

$\underline{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio

$\Pi_U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ proiezione ortogonale

$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ $\quad v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \underset{\in U}{v'} + \underset{\in U^\perp}{v''}$ $\quad \Pi_U(v) = v'$.



$$\underline{v} = \{ \overbrace{\underbrace{u_1'', \dots, u_r''}_{\substack{\text{base}\\ \text{ortonormale}\\ \text{di } U}}, \underbrace{w_1'', \dots, w_{n-r}''}_{\substack{\text{base}\\ \text{ortonormale}\\ \text{di } U^\perp}}}^{\substack{\text{base}\\ \text{ortonormale di } \mathbb{R}^n}} \}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1'' & \cdots & u_r'' & w_1'' & \cdots & w_{n-r}'' \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$P = M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(id)$$

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(\pi_U) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{r \times r} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{(n-r)\times(n-r)} \end{array} \right) = D$$

$$A = M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(\pi_U) = P^{-1} D P = P^T D P$$

$$\boxed{A = P^T D P} \Rightarrow A = A^T$$

A è una matrice di proiezione ortogonale (rispetto alla base canonica) $\Longleftrightarrow$ $\begin{array}{l} A^2 = A \\ A^T = A \end{array}$

Def. Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è detta <u>simmetrica</u> se $A^T = A$.

Def.
$$O(n) = \left\{ P \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} P^TP = I \\ \text{cioè } P \text{ è} \\ \text{ortogonale} \end{array} \right\}$$

Prop. Sia $P \in O(n)$ allora $\det P = 1$ oppure $\det P = -1$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.

Dim.

$$P^TP = I$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(P^TP) = \det(I) = 1 \\ \text{Binet} \to \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel \\ \det(P)\det(P^T) = \det(P)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \det P = \pm 1$$

Se $Pv = \lambda v$, $v \neq 0$, allora

$$\|Pv\|^2 = \|\lambda v\|^2 = (|\lambda|\|v\|)^2 = \lambda^2 \|v\|^2$$

$$\parallel$$

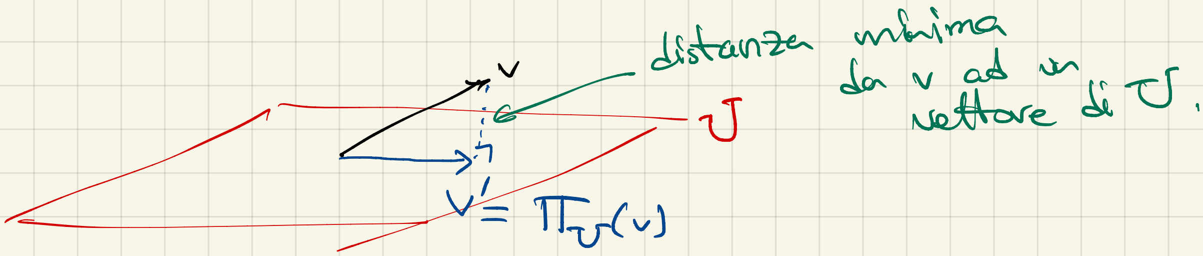
$$(Pv)\cdot(Pv) = (Pv)^T Pv = v^T \underbrace{P^TP}_{I} v = v^Tv = \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2\|v\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \blacksquare$$

Teorema Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio. Sia $v \in \mathbb{R}^n$

Allora $\|v - \Pi_U(v)\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$

Cioè: $\Pi_U(v)$ è l'elemento di U più vicino a v.



Dim.

$$v = \underbrace{\overset{\overset{U}{\cup\!\!\!|}}{v'}}_{\Pi_U(v)} + \underbrace{\overset{\overset{U^\perp}{\cup\!\!\!|}}{v''}}_{v - \Pi_U(v)}$$

Sia $u \in U$.

$$\|u - v\|^2 = \|u - \overbrace{(\Pi_U(v) + v - \Pi_U(v))}^{v}\|^2$$

$$= \|\underbrace{(u - \Pi_U(v))}_{\in U} + \underbrace{(\Pi_U(v) - v)}_{-v'' \in U^\perp}\|^2$$

$$= \Big(\underset{U}{(u - \Pi_U(v))} + \underset{U^\perp}{(\Pi_U(v) - v)}\Big) \cdot \Big(\underset{U}{(u - \Pi_U(v))} + \underset{U^\perp}{(\Pi_U(v) - v)}\Big)$$

$$= \|u - \Pi_U(v)\|^2 + \underbrace{\|\Pi_U(v) - v\|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|u - \Pi_U(v)\|^2 \iff \|u - v\| \geq \|u - \Pi_U(v)\| \quad \blacksquare$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

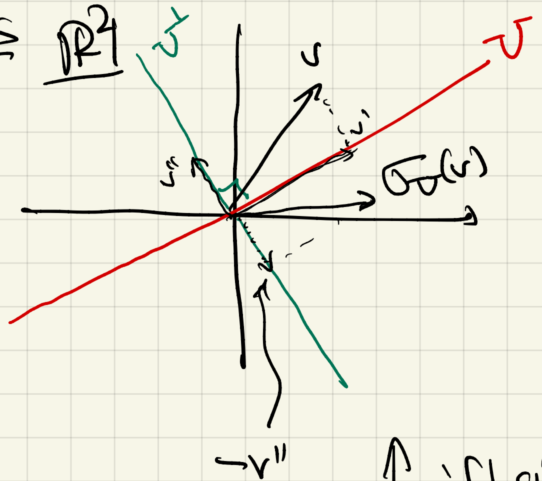
$v \in \mathbb{R}^n$ $\qquad v = \underset{\substack{\cap \\ U}}{v'} + \underset{\substack{\cap \\ U^\perp}}{v''}$

Def. La riflessione di asse U è definita da

$$\sigma_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v = v' + v'' \mapsto v' - v''$$

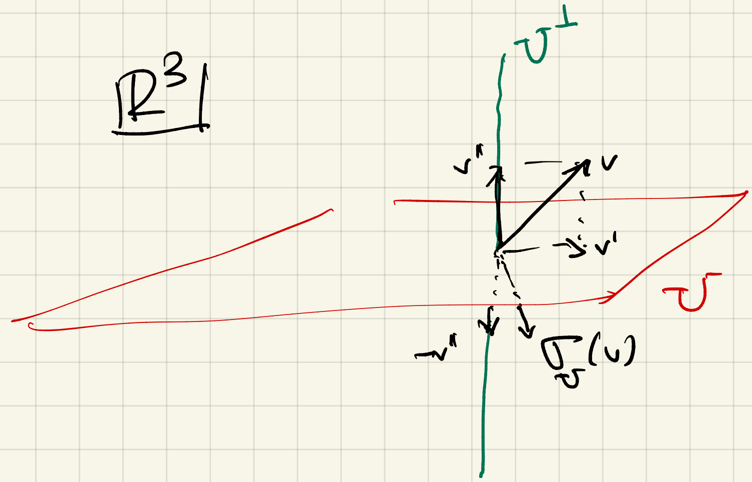
(è la simmetria di asse U e direzione $U^\perp$)

Es $\mathbb{R}^2$



riflessione di asse una retta

$\mathbb{R}^3$



riflessione di asse un piano

$$\underline{v} = \underbrace{\{\overbrace{u_1'', \dots, u_r''}^{\text{base ortonormale di } U}, \overbrace{w_1'', \dots, w_{n-r}''}^{\text{base ortonormale di } U^\perp}\}}_{\text{Base ortonormale di } \mathbb{R}^n}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1'' & \cdots & u_r'' & w_1'' & \cdots & w_{n-r}'' \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$P = M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(id)$$

$$P^T = P^{-1}$$

$\sigma_U(u_i'') = u_i''$ ← autovettore relativo a $\lambda = 1$

$\sigma_U(w_j'') = -w_j''$ ← autovettore relativo a $\lambda = -1$.

$\underline{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica.

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\sigma_v) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} \end{array}\right) = D$$

$$A = M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(\sigma_v) = P D P^{-1} = P D P^T$$

$$A = PDP^T \qquad A^T = (PDP^T)^T$$
$$= (P^T)^T D^T P^T$$
$$= PDP^T = A$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = Id \\ A = A^T \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$ A è la matrice di una riflessione (rispetto alla base canonica)

<u>Def.</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare

f è isometria $\Leftrightarrow$ $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

<u>f rispetta angoli e lunghezze.</u>

<u>Teorema</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare.

Allora sono fatti equivalenti:

1) f è isometria
2) f preserva la norma di vettori ossia $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
3) La matrice di f rispetto ad una

$1) \Rightarrow 2)$
$\Uparrow \qquad \Downarrow$
$4) \Leftarrow 3)$

base ortonormale (es. base canonica di $\mathbb{R}^n$)

è ortogonale

4) f manda basi ortonormali in basi ortonormali

Dim

$1) \Rightarrow 2)$ $\underbrace{f \text{ isometria}}$ (Ipotesi) devo dimostrare f preserva la norma

$$\|f(v)\|^2 = f(v) \cdot f(v) = v \cdot v = \|v\|^2 \quad \blacksquare$$

$2) \Rightarrow 3)$ Ipotesi: f preserva la norma. devo dimostrare la matrice di f rispetto ad una base ortonormale è ortogonale.

OSS $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

$v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\underline{v}$

ortogonale $\longrightarrow P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ Allora $v = P\lambda$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \|P\lambda\|^2 = (P\lambda)\cdot(P\lambda) = (P\lambda)^T P\lambda$$
$$= \lambda^T \underbrace{P^T P}_{I} \lambda = \|\lambda\|^2$$

Quindi $\|v\|^2 = \|\lambda\|^2$

$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) = A$

$$\|v\|^2 \overset{\text{Ipotesi}}{=} \|f(v)\|^2 \overset{\text{oss.}}{=} \|A\lambda\|^2$$

oss. $\rightarrow$ $\| \quad \|\lambda\|^2$

$$\lambda^T\lambda = (A\lambda)^T(A\lambda) = \lambda^T A^T A \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda^T(I - A^TA)\lambda = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$I - A^TA = 0 \Leftrightarrow I = A^TA$$

$$\Updownarrow$$

A è ortogonale $\boxtimes$

3) $\Rightarrow$ 4)

Ipotesi

Matrice di f rispetto a una base ortonormale è ortogonale

devo dimostrare

f manda basi ortonormali in basi ortonormali

Per ipotesi $M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) = A$ è ortogonale

Sia $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale.

$$f(v_1) = Av_1$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = Av_n$$

Dobbiamo controllare che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sia una base ortonormale.

$$f(v_i)\cdot f(v_j) = (Av_i)\cdot(Av_j) = (Av_i)^T A v_j = v_i^T \underbrace{A^T A}_{I} v_j = v_i^T v_j = v_i \cdot v_j$$

perché A è ortogonale

$$f(v_i)\cdot f(v_j) = v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

4) $\Rightarrow$ 1)

Ipotesi

f manda basi ortonormali in basi ortonormali

devo dimostrare

f è isometria cioè $f(v)\cdot f(u) = v\cdot u$ $\forall v,u \in \mathbb{R}^n$.

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\quad P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$P^T P = I$

Per ipotesi

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\quad Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \cdots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q^T Q = I$

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbb{R}^n \qquad u = P\alpha \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in \mathbb{R}^n \qquad w = P\beta \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$$u\cdot w = (P\alpha)\cdot P\beta = (P\alpha)^T P\beta = \alpha^T \underbrace{P^T P}_{I} \beta = \alpha^T \beta = \alpha\cdot\beta$$

$\boxed{u\cdot w = \alpha\cdot\beta}$ (1)

$$f(u) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = Q\alpha$$

$$f(w) = f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \beta_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = Q\beta$$

$$f(u)\cdot f(w) = (Q\alpha)\cdot(Q\beta) = (Q\alpha)^T Q\beta$$

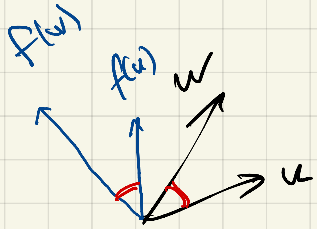
$$= \alpha^T \underbrace{Q^T Q}_{I} \beta = \alpha^T\beta = \alpha\cdot\beta$$

$$\boxed{f(u)\cdot f(w) = \alpha\cdot\beta} \quad (2)$$

$(1) = (2)$

$\Downarrow$

f è isometria



f isometria: f rispetta angoli
è lunghezze.

$\mathbb{R}^2$ Isometrie di $\mathbb{R}^2$.

$P \in SO(2)$

$P^T P = I$

$\det(P) = 1$

$P \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$

$P \in O(n)$

$\det(P) = 1$

$\Downarrow$

$P \in SO(n)$

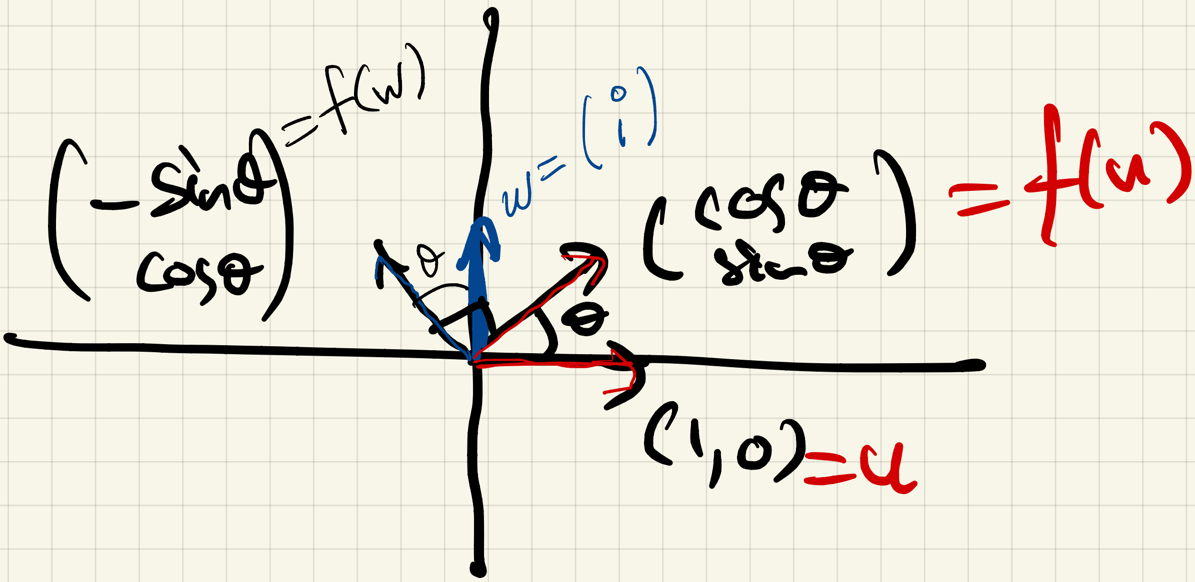
$SO(n) = \{P \in O(n) \mid \det P = 1\}$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P P^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione antioraria per θ.



$$P = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

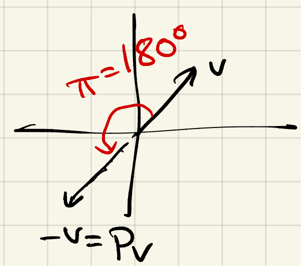
$$\theta = 0 \Rightarrow P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow P = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{soddisfa}}$$

$P^2 = I$

$P^T = P$

riflessione di asse $\{0\}$.



Se $P \in O(2)$ e $\det P = -1$

$P \notin SO(2)$

allora $P = \begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$P^T = P \qquad P^2 = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P è riflessione

$$P\begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos\theta\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos\theta\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin\theta\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta - \frac{\theta}{2}) \\ \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$.