ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 63-64, 20/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

$A, P \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$

A è simmetrica $\Leftrightarrow A = A^T$

P è ortogonale $\Leftrightarrow P^{-1} = P^T$

$P^T P = I$

(le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$)

(anche le righe di P)

Def. $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base ortonormale di autovettori.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base ortonormale di autovettori. $P = (v_1 \dots v_n)$ è una matrice ortogonale.

$P^T = P^{-1}$

$$\underset{\displaystyle P^T A P}{\overset{\|}{P^{-1} A P}} = \underbrace{D}_{\text{diagonale}}$$

$$\Rightarrow \underline{A = P D P^T}$$

$$\Rightarrow A^T = (P D P^T)^T = (P^T)^T D^T P^T$$

$$= P D P^T = A$$

<u>Quindi:</u> Se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora A è simmetrica.

Teorema Spettrale (vedi libro Cap. 5, p. 210)

A matrice $n \times n$ $\quad (A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}))$

1) Se A è simmetrica allora A è ortogonalmente diagonalizzabile.

2) Se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora A è simmetrica.

Dim 2) OK ✓

1) vedere lezione asincrona #62.

Dimostriamo qualcosa di più semplice:

Prop. Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica.
Sia v_i autovettore relativo all'autovalore λ_i
Sia v_j autovettore relativo all'autovalore λ_j

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ allora v_i e v_j sono ortogonali.

Dim.

$$Av_i = \lambda_i v_i$$
$$Av_j = \lambda_j v_j$$

$$v_i \cdot (Av_j) = v_i \cdot (\lambda_j v_j) = \lambda_j v_i \cdot v_j$$

$$\underbrace{v_i^T A v_j}_{\in \mathbb{R}} = (v_i^T A v_j)^T = v_j^T A^T v_i = v_j^T A v_i$$

A è simmetrica

$$v_j^T A v_i = v_j \cdot (A v_i) = v_j \cdot (\lambda_i v_i) = \lambda_i v_i \cdot v_j$$

$$\Rightarrow \lambda_j (v_i \cdot v_j) = \lambda_i (v_i \cdot v_j)$$

$$\Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i)(v_i \cdot v_j) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Se } \lambda_j \neq \lambda_i \Rightarrow v_i \cdot v_j = 0 \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare P ortogonale tale che $P^T A P$ sia diagonale (una tale P esiste perché A è simmetrica)

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+3)$$

<u>Autovalori</u> $\quad \underbrace{\lambda_{1,2} = 3}_{m.a = 2} \qquad \lambda_3 = -3$

<u>Autovettori</u>

<u>$\lambda_3 = -3$</u> $\quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

x_2, x_3 sono parametri liberi di variare

$$\left.\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

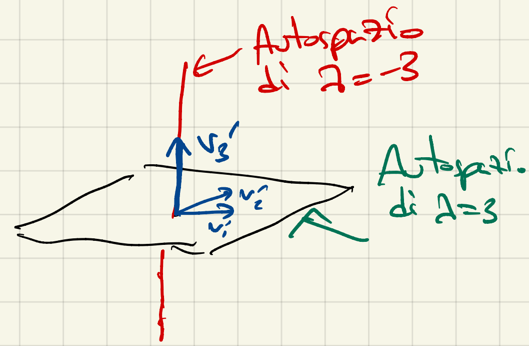
$$v_1' \cdot v_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \checkmark \qquad v_2' \cdot v_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

OK

$$v_1' \cdot v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

v_1' e v_2' <u>non</u> sono ortogonali.

Cerco una base ortonormale dell'autospazio relativo a $\lambda = 3$ con il procedimento di Gram-Schmidt.



$$v_1'' = v_1'$$

$$v_2'' = \underbrace{v_2' - \frac{v_2' \cdot v_1'}{\|v_1'\|^2} v_1'}_{\text{Combinazione lineare di } v_1' \text{ e } v_2' \Rightarrow \text{Autovettore relativo a } \lambda = 3}$$

$v_2' \cdot v_1' = 1$ $\quad v_1'' = v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_1'\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$

$$v_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ oppure $v_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Base ortogonale

$$v_1'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|v_1''\| = \sqrt{2}$ $\quad \|v_2''\| = \sqrt{6}$ $\quad \|v_3''\| = \sqrt{3}$

Normalizzare:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

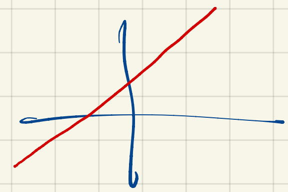
Allora

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA AFFINE

Spazio vettoriale = insieme di vettori

Abbiamo bisogno di un nuovo tipo di "spazio"



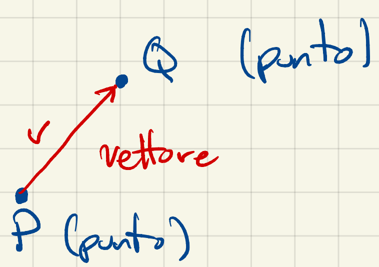
SPAZIO AFFINE
- insieme di vettori (spazio vettoriale)
- insieme di punti
- con delle operazioni che coinvolgono punti e vettori

<u>Def.</u> Uno spazio affine $\mathbb{A}$ è dato di:

1) Uno <u>spazio vettoriale</u> V (spazio delle traslazioni)

2) Un insieme S che chiameremo <u>insieme dei punti</u> di $\mathbb{A}$

3) una nuova operazione:

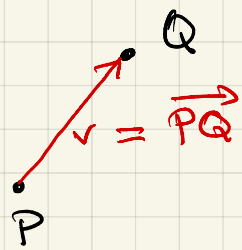


$$(\underset{\text{punto}}{P}, \underset{\text{vettore}}{v}) \longmapsto \underset{\text{punto}}{Q}$$

Si scriverà $Q = P + v$ ← somma "punto" + "vettore"

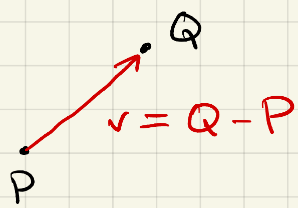
Q è il punto P traslato lungo il vettore v.

Se P, Q sono punti:



vettore che congiunge P e Q

Si scrive $v = Q - P$



<u>Esempio</u> Spazio affine standard di dimensione n sul campo $\mathbb{R}$ $\quad (\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^n)$

$V = \mathbb{R}^n$ (spazio vettoriale)

$S = \mathbb{R}^n$ (insieme di punti)

<u>vettore</u> $\quad v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

<u>punto</u> $\quad P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$

Operazione $\quad \overset{\text{punto}}{P} + \overset{\text{vettore}}{v} = \overset{\text{punto}}{Q}$

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + a_1 \\ \vdots \\ p_n + a_n \end{pmatrix}$$

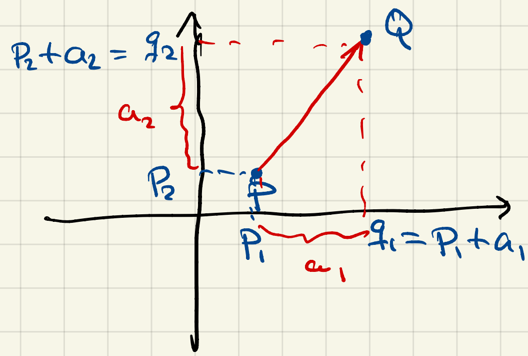
$$((P+v)+v)+v = P+3v$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$

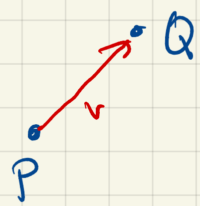
$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 + a_1 \\ p_2 + a_2 \end{pmatrix}$$



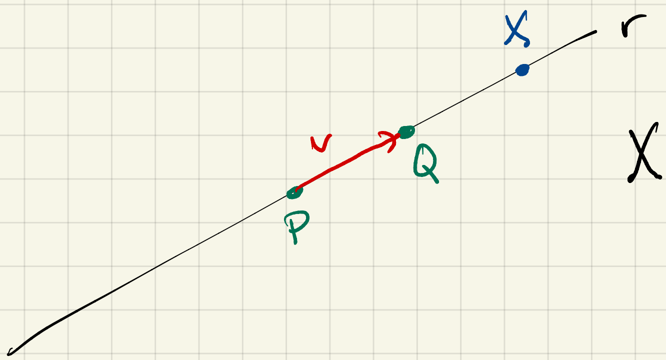
Viceversa, dati due punti $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ si ha



$$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rette in uno spazio affine

(vedi Libro p. 254)



$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ "vettore direttore"

$$X \in r \iff \underbrace{X = P + \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Equazioni parametriche della retta r.

Per determinare una retta: basta dare un punto P sulla retta e un vettore v (v indica la direzione della retta. v è detto "vettore direttore").

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

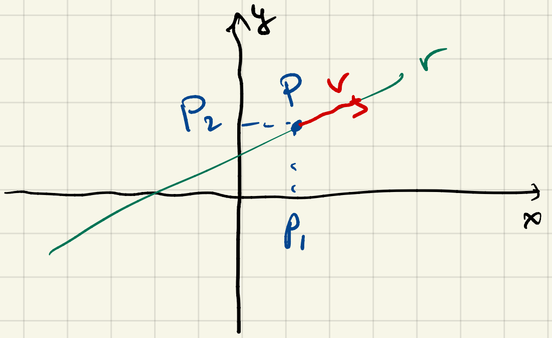
$$X = P + \lambda v \iff \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda a_1 \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda a_n \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Equazioni parametriche della retta r)

Per trovare le equazioni cartesiane (senza parametri) basta ricavare λ da una equazione e sostituire il vallore nelle altre equazioni.

Es. Retta nel piano ($\mathbb{R}^2$)

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$v = (a_1, a_2)$

$$\underbrace{\begin{cases} x = P_1 + \lambda a_1 \\ y = P_2 + \lambda a_2 \end{cases}}_{\text{Eq. parametriche.}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \frac{x - P_1}{a_1} \qquad (a_1 \neq 0)$$

$$y = P_2 + \left(\frac{x - P_1}{a_1}\right) a_2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}_{m} x + \underbrace{\left(P_2 - \frac{a_2 P_1}{a_1}\right)}_{q} = mx + q$$

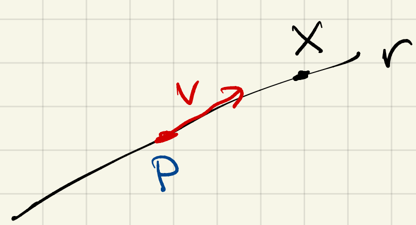
$$\boxed{y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. angolare}}}{m} x + q}$$

Equazione cartesiana della retta

Es. Retta nello spazio tridimensionale.

$$X = P + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



$$r : \begin{cases} x_1 = P_1 + \lambda a_1 \\ x_2 = P_2 + \lambda a_2 \\ x_3 = P_3 + \lambda a_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

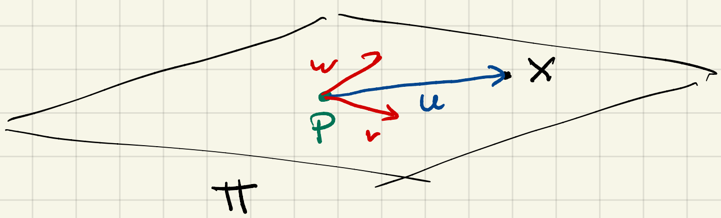
$$\lambda = \frac{x_1 - P_1}{a_1} \qquad (\text{se } a_1 \neq 0)$$

Sostituendo nelle due equazioni rimanenti si ottiene

$$\underbrace{r: \begin{cases} x_2 = P_2 + \left(\frac{x_1 - P_1}{a_1}\right) a_2 \\ x_3 = P_3 + \left(\frac{x_1 - P_1}{a_1}\right) a_3 \end{cases}}_{\text{Equazioni cartesiane di una retta in } \mathbb{A}^3.}$$

← 2 equazioni di 1° grado

Esempio **Piano in uno spazio affine.**



$$X = P + \underbrace{u}_{\lambda v + \mu w}$$

Si ottiene:

$$\underbrace{X = P + \lambda v + \mu w}_{\text{equazioni parametriche del piano } \pi.} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\pi : X = P + \lambda v + \mu w, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\pi : \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(eq. parametriche del piano)

Ricavo $\lambda = \ldots$

Ricavo $\mu = \ldots$

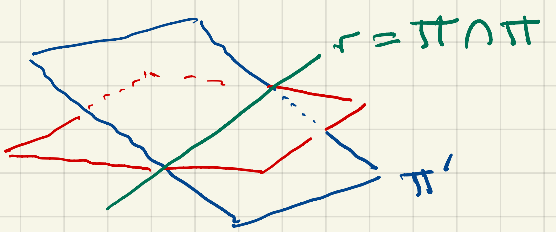
Alla fine si ottiene una eq. di $1°$ grado in x_1, x_2, x_3

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\pi : \quad ax + by + cz + d = 0}_{\text{equazione cartesiana di un piano in } \mathbb{A}^3.}$$

Retta r in $\mathbb{A}^3$:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \leftarrow \text{determina un piano } \pi \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & \leftarrow \text{determina un piano } \pi' \end{cases}$$



Def. Sottospazi affini (sottovarietà lineari)

Un sottospazio affine $\mathcal{L}$ di $\mathbb{A}^n$ è un insieme della forma

$$\mathcal{L} = \{ P + w \mid w \in W \} = P + W$$

dove $P \in \mathbb{A}^n$ è un punto e $W \leq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale.

La dimensione di $\mathcal{L}$ = dimensione di W.

Il sottospazio W è detto giacitura o sottospazio direttore di $\mathcal{L}$.