ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

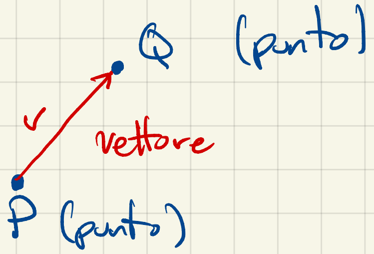
Lezioni 65-66, 22/12/2021

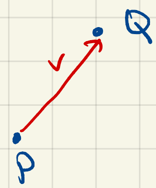
Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

SPAZIO AFFINE
$\left(\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^n\right)$

- insieme di vettori (spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$)
- insieme di punti $\mathbb{R}^n$
- con delle operazioni che coinvolgono punti e vettori

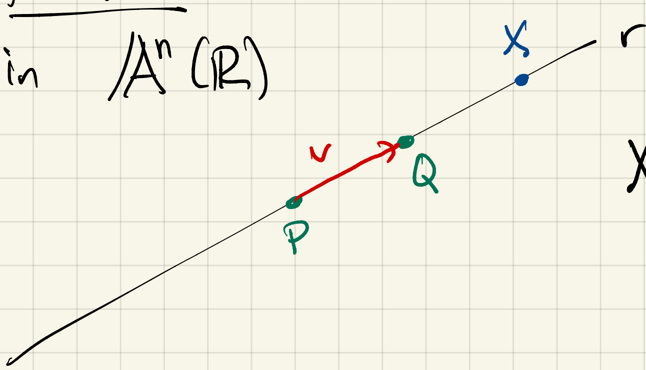




$$v = Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

$$Q = P + v$$

RETTE
in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$



$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P$
"vettore direttore"

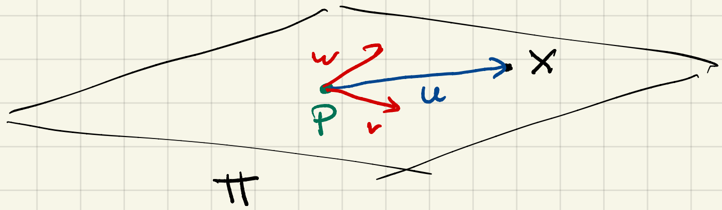
$$X \in r \iff \underbrace{X = P + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{Equazioni parametriche della retta } r}$$

Equazioni parametriche della retta r.

$$r : P + \langle v \rangle$$

PIANI

in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$



$$X = P + \underbrace{u}_{\lambda v + \mu w}$$

Si ottiene:

$$\underbrace{X = P + \lambda v + \mu w}_{\text{equazioni parametriche del piano } \pi.} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\pi : P + \langle v, w \rangle$$

Def. Sottospazi affini (sottovarietà lineari)

Un sottospazio affine $\mathcal{L}$ di $\mathbb{A}^n$ è un insieme della forma

$$\mathcal{L} = \{ P + w \mid w \in W \} = P + W$$

dove $P \in \mathbb{A}^n$ è un punto e $W \leq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale.

La dimensione di $\mathcal{L}$ = dimensione di W.

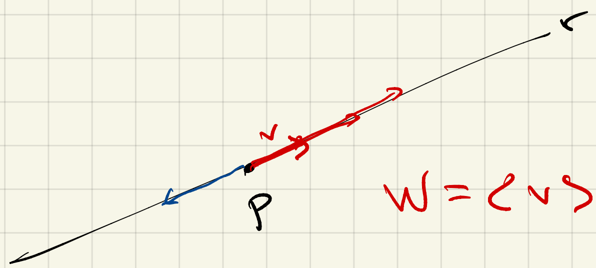
Il sottospazio W è detto giacitura o sottospazio direttore di $\mathcal{L}$.

$\dim(\mathcal{L}) = \dim(W)$

$\mathcal{L} = P + W$ è chiuso per traslazioni in W

$X \in \mathcal{L} \Rightarrow X = P + w$

Se $v \in W$ allora $X + v = (P+w)+v$
$= P + (\underbrace{w+v}_{\in W}) \in \mathcal{L}$.



$W = \langle v \rangle$

Se $\dim(W) = 1 \Rightarrow \mathcal{L} = P + W$ è una retta

Se $\dim(W) = 2 \Rightarrow \mathcal{L} = P + W$ è un piani

⋮

Se $\dim(W) = n-1 \Rightarrow \mathcal{L} = P + W$ è un iperpiano

Se $\{w_1, \dots, w_r\}$ è una base di W allora

$$\mathcal{L} = P + W = \{ P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \}$$

$$X \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \underbrace{X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r}_{\text{Eq. parametriche di } \mathcal{L}} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R},$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(1)} \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \; w_r = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda_1 \alpha_1^{(1)} + \ldots + \lambda_r \alpha_1^{(r)} \\ x_2 = p_2 + \lambda_1 \alpha_2^{(1)} + \ldots + \lambda_r \alpha_2^{(r)} \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda_1 \alpha_n^{(1)} + \ldots + \lambda_r \alpha_n^{(r)} \end{cases}$$

Eq. parametriche di $\mathcal{L}$ in componenti.

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

Possiamo sempre eliminari i r parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ da queste n equazioni ottenendo $n-r$ equazioni lineari indipendenti

$\Rightarrow$ Equazioni cartesiane di $\mathcal{L}$

OSS: Le equazioni cartesiane non sono univoche.

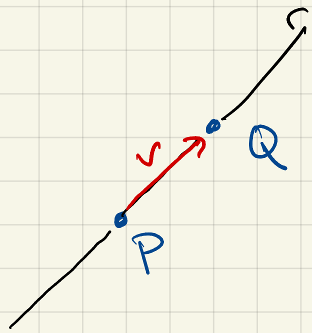
OSS: Le soluzioni di un qualunque sistema lineare $\underset{r \times n}{A} \underset{n \times 1}{X} = \underset{r \times 1}{B}$

formano un sottospazio affine:

$$\mathcal{L}: \underbrace{P}_{\text{soluzione particolare}} + \underbrace{W}_{\text{nucleo di } A}$$

$$\dim W = n - \text{rango}(A)$$

Es. 1 Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$r: X = P + \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Oppure $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$r: X = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}^{P} + \lambda \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}^{v} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

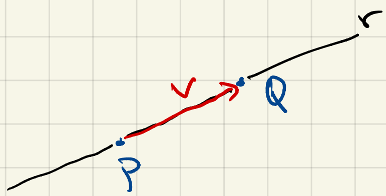
$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$ ← Eq. parametriche di r.

$$\begin{cases} \lambda = x - 1 \\ \boxed{y = 3 - 2(x-1) = 5 - 2x} \end{cases}$$

$$r: \{ 2x + y = 5$$ Equazione cartesiana di r.

Es. Trovare eq. parametriche e cartesiane della retta r in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



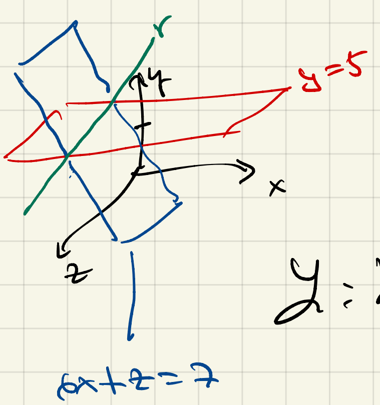
$$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$r: X = P + \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 \\ z = 7 - 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}} \leftarrow$$

Eq. parametriche di r



$$\begin{cases} y = 5 \\ z = 7 - 6x \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} y = 5 \\ 6x + z = 7 \end{cases}}$$

Eq. cartesiane di r.

$$\mathcal{L}: \{ ax + by + cz + d = 0$$

Se Rango $A = 1$
$\Updownarrow$
$(a, b, c) \neq \vec{0}$

$$AX = B$$

$(a, b, c) \rightarrow A$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow X$, $B \leftarrow -d$

$$\dim \mathcal{L} = \underbrace{3}_{\#\text{ incognite } (x,y,z)} - \underbrace{1}_{\text{Rango }(A)} = 2$$

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2\end{array}\right\}$ sottospazi affini di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = ?$$

Eq. cartesiane di $\mathcal{L}_1$: $A_1 X = B_1$

Eq. cartesiane di $\mathcal{L}_2$: $A_2 X = B_2$

$$\overline{X} \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \iff \Sigma : \begin{cases} A_1 \overline{X} = B_1 \\ A_2 \overline{X} = B_2 \end{cases}$$

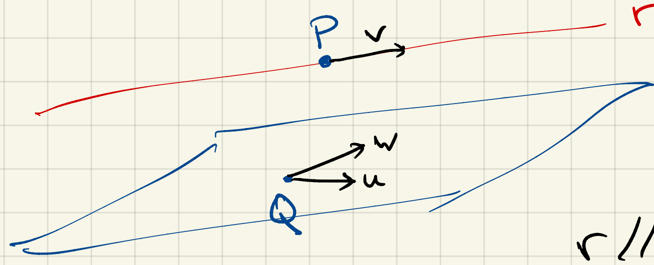
Per trovare $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ metto a sistema le eq. cartesiane di $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Se Σ non ha soluzioni $\iff$ $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \underbrace{\emptyset}_{\text{insieme vuoto}}$

Se Σ ha soluzioni $\iff$ $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ è un sottospazio affine.

Def. Se $\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_1 = P_1 + W_1 \\ \mathcal{L}_2 = P_2 + W_2\end{array}\right\}$ sottospazi affini

Diremo che $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono <u>paralleli</u> se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$.



$r = P + \langle v \rangle$

$\pi = Q + \langle u, w \rangle$

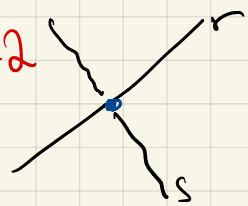
$r \parallel \pi \iff \langle v \rangle \subseteq \langle u, w \rangle$

Posizione Reciproche

r, s due rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$r \cap s$

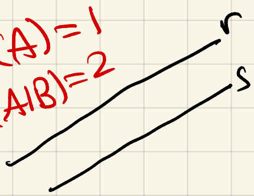
rango(A)=2



incidenti

$r \cap s =$ un punto

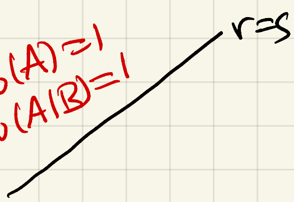
rango(A)=1
rango(A|B)=2



parallele

$r \cap s = \emptyset$

rango(A)=1
rango(A|B)=1



parallele e coincidenti

$r \cap s = r = s$

In generale

$r: ax + by = c$

$s: a'x + b'y = c'$

$$r \cap s : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$r \cap s: \quad AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(i) Se $\text{rango}(A) = 2 \Rightarrow A$ è invertibile.

$AX = B$ ha una unica soluzione $X = A^{-1}B$.

$\Rightarrow r \cap s =$ un punto. Le rette sono incidenti.

(ii) Se rango$(A) = 1$ → a) rango$(A|B) = 1$

$\Rightarrow$ il sistema ammete soluzioni

$\dim(r \cap s) = 2 - 1 = 1$

\# incognite — rango

$\Rightarrow r$ e s sono coincidenti

(r e s hanno la stessa giacitura) $r // s$

→ b) rango$(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sistema non ammette soluzioni

$r \cap s = \emptyset$

Stesso ragionamente è valido per

π, σ due piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$\pi: ax + by + cz = d$

$\sigma: a'x + b'y + c'z = d'$

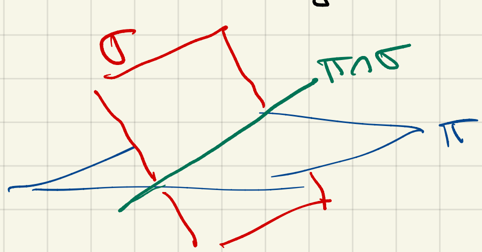
$\pi \cap \sigma: AX = B \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

$1 \leq \text{Rango}(A) \leq 2 \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$

(i) Rango$(A) = 2 \Rightarrow$ Il sistema ha ∞^1 soluzioni

Rango$(A|B) = 2$

$\underset{3}{\#\text{incognite}} - \underset{2}{\text{rango}(A)} = 1$



$\dim(\pi \cap \sigma) = 1.$

(ii) $\text{Rango}(A) = 1$

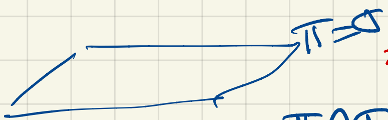
$\pi // \sigma$

a) $\text{Rango}(A|B) = 1$

Il sistema ammette ∞^2 soluzioni

$\underset{3}{\#\text{incognite}} - \underset{1}{\text{rango}(A)} = 2$

$\dim(\pi \cap \sigma) = 2$

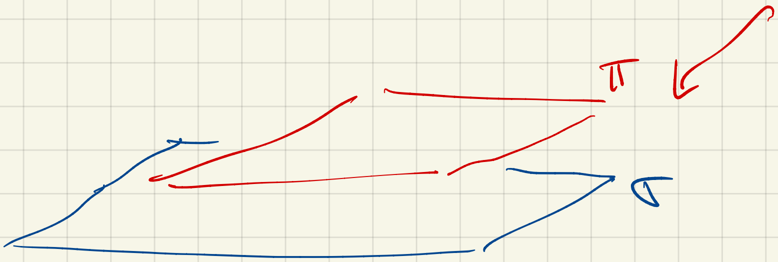


$\pi \cap \sigma = \pi = \sigma$

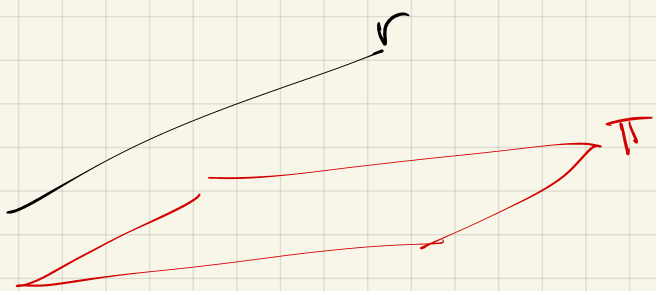
b) $\text{Rango}(A|B) = 2$

Il sistema non ammette soluzioni

$\pi \cap \sigma = \emptyset$



Posizione reciproche di una retta ed un piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$\pi: \{ a''x + b''y + c''z = d''$$

$r \cap \pi$: $AX = B$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$

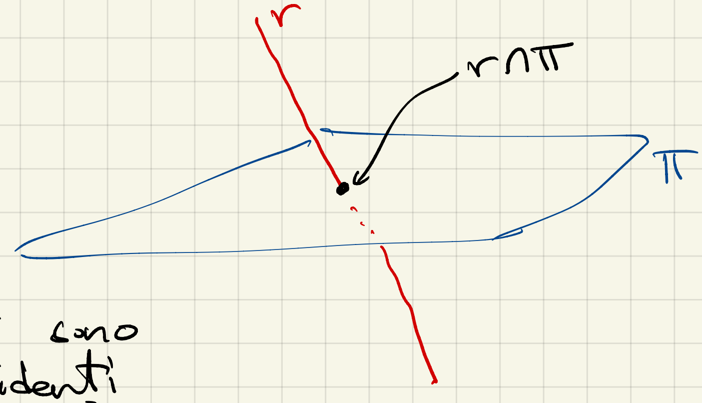
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$2 \leq \text{rango}(A) \leq 3$

(i) Se $\text{rango}(A) = 3 \Rightarrow A$ è invertibile.

Il sistema ha soluzione unica $X = A^{-1}B$

$\Rightarrow r \cap \pi =$ un Punto



r e π sono
<u>incidenti</u>

(ii) Se rango $(A) = 2 \Rightarrow$

r e π sono paralleli

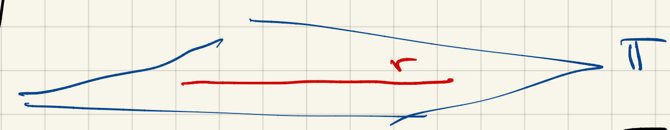
a) $\text{rango}(A|B) = 2$

ci sono ∞^1 soluzioni

$\#$ incognite $-$ Rango(A)

$3 - 2 = 1$

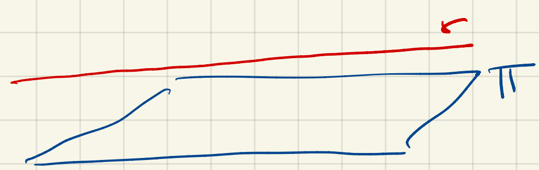
$\dim(r \cap \pi) = 1$



$r \cap \pi = r$ $\quad r \subseteq \pi$

b) $\text{rango}(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ Non ci sono soluzioni



$r \cap \pi = \emptyset$

Posizione reciproche di due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

$$r \cap s : \Big\{ \; AX = B \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{pmatrix}$$

$$2 \leq \text{rango}(A) \leq 3$$

(i) Se $\text{rango}(A) = 3 \Rightarrow$

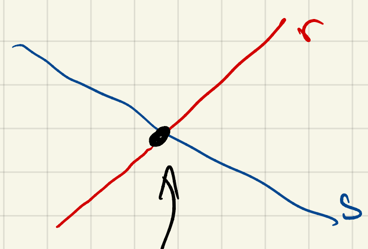
(a) Se $\text{rango}(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ La soluzione è unica.

$\#$incognite $-$ rango
$3 - 3 = 0$

$\dim(r \cap s) = 0$

$r \cap s =$ un punto.

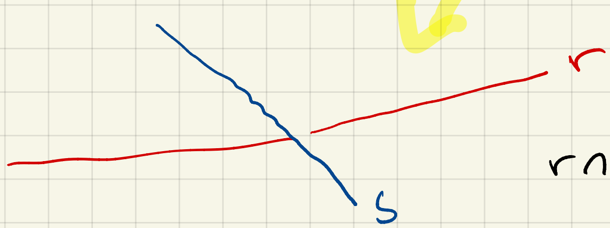


incidenti
$r \cap s =$ un punto

(b) Se $\text{rango}(A|B) = 4$

$\Rightarrow$ Non ci sono soluzioni

$r \cap s = \emptyset$



$r \cap s = \emptyset$

r e s sono rette sghembe
(non sono paralleli)

(ii) Se rango $(A) = 2$

$\Rightarrow r \parallel s$

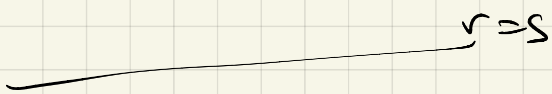
a) rango $(A|B) = 2$

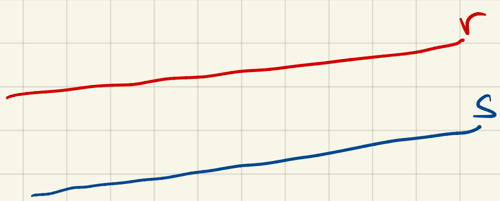
$r = s \qquad r \cap s = r = s$

b) rango $(A|B) = 3$

non ci sono soluzioni

$r \cap s = \emptyset$





← Parallele (stessa giacitura)