1 Urti e fenomeni impulsivi

1.1 Esercizio 1

Un tamponamento coinvolge un veicolo A di massa $m_A = 1100\ kg$, inzialmente fermo, ed un secondo veicolo B di massa $m_B = 2300\ kg$, in moto con una velocità $v_0 = 30\ km/h$ all'istante subito precedente all'urto.

L'urto non è elastico. Per effetto della deformazione dei due mezzi, nel corso dell'urto si determina una dispersione pari al 20% dell'energia cinetica disponible prima dell'urto.

Nell'urto, il veicolo B viene deflesso di un angolo $\beta = 25°$ rispetto la sua iniziale direzione di moto. Il veicolo A, messo in moto nell'impatto con un angolo α, procede in condizione di puro attrito dimanico ed arresta il suo moto dopo aver percorso una distanza pari a $d_A = 2.75\ m$ Il coefficiente di attrito dinamico tra gli pneumatici e l'asfalto è pari a $\mu_d = 0.75$.

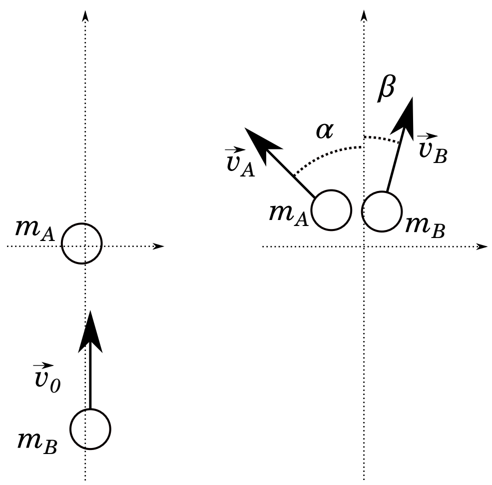
Determinare:

a) Il modulo della velocità v_A del mezzo A subito dopo l'urto (in m/s)

b) Il modulo della velocità v_B del mezzo B subito dopo l'urto (in m/s)

c) L'angolo α a cui viene deflesso il mezzo A dopo l'urto (in gradi)

d) L'accelerazione media $\bar{a}$ risentita dal mezzo A nel corso dell'impatto, se questo si sviluppa in un tempo $\tau = 75\ ms$ (in m/s^2)



---

a) L'impatto trasferisce al mezzo A una certa quantità di moto. Subito dopo l'urto A si trova quindi in moto con una data velocità v_A. Da quell'istante in poi, A si muove di moto uniformemente decelerato, dovuto alla forza di attrito che si sviluppa tra gli pneumatici e l'asfalto.

L'energia cinetica posseduta dal mezzo subito dopo l'urto viene quindi trasformata totalmente in lavoro della forza d'attrito (non conservativa). Pertanto:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = F_{att} d_A \tag{1}$$

La forza di attrito dinamico si può riscrivere come $F_{att} = \mu_d N_A$, dove N_A è il modulo della forza normale. In breve, si ottiene:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \mu_d m_A g d_A \tag{2}$$

E quindi:

$$v_A = \sqrt{2\mu_d g d_A} = 6.36\ m/s \tag{3}$$

b) L'urto non è elastico, in quanto si dissipa energia. E' però nota la quantità di energia dissipata nella collisione, quindi possiamo scrivere:

$$E_{in} - E_{fin} = 0.2E_{in} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Possiamo quindi ricavare v_B attraverso la nostra conoscenza di v_A dal punto precedente.

$$0.8E_{in} = E_{fin} \tag{6}$$
$$\frac{8}{10}\frac{1}{2}m_B v_0^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

Da cui:

$$v_B = \sqrt{\frac{4}{5}v_0^2 - \frac{m_A}{m_B}v_A^2} = \tag{9}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{5}v_0^2 - \frac{m_A}{m_B}2\mu_d g d_A} = 6.02\ m/s \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

c) Nell'urto, anelastico, si conserva comunque la quantità di moto:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_A + \vec{p}_B \tag{12}$$

Per calcolare α può essere conveniente ricavare l'angolo formato tra le quantità di moto dei due mezzi dopo l'urto ($\theta = \alpha + \beta$) , che si ricava semplicemente elevando al quadrato entrambi i mebri della precedente relazione:

$$p_0^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B \cos\theta \tag{13}$$

Da cui:

$$\cos\theta = \frac{p_0^2 - p_A^2 - p_B^2}{2p_A p_B} = \tag{14}$$
$$= \frac{(m_B v_0)^2 - (m_A v_A)^2 - (m_B v_B)^2}{2m_A v_A m_B v_B} = \tag{15}$$
$$= 0.66 \tag{16}$$

L'angolo θ corrispondente, trascurando la soluzione non fisica con $\theta > \pi$, è quindi pari a $\theta = 49.07°$, da cui si ottiene:

$$\alpha = \theta - \beta = 24.07° \tag{17}$$

d) L'impulso trasferito al mezzo A è pari alla variazione della quantità di moto nel corso dell'urto, pertanto:

$$\vec{J}_A = \Delta\vec{p}_A = \vec{p}_A - 0 \tag{18}$$

Riscrivendo il teorema dell'impulso, si eplicita come la quantità di moto scambiata nel processo sia legata alla forza impulsiva sviluppatasi nell'urto:

$$\vec{J}_A = \Delta \vec{p}_A = \int_0^{\tau} \vec{F}(t)\, dt \tag{19}$$

Considerando una forza media $\bar{F}$ scambiata nel lasso di tempo in esame τ, possiamo ricavare:

$$p_A = \bar{F}\tau \tag{20}$$

Infine, applicando direttamente la seconda legge della dinamica, possiamo ricavare l'accelerazione media che A risente durante l'urto:

$$p_A = \bar{F}\tau = m_A \bar{a} \tau \tag{21}$$

Quindi:

$$\bar{a} = \frac{p_A}{m_A \tau} = \frac{v_A}{\tau} = 84.8\ m/s^2 \tag{22}$$

1.2 Esercizio 2

Un cubetto di lato $a = 8.2\ cm$ e massa $m = 120\ g$ è posto su di un tavolino su cui è libero di scivolare senza attrito. Il cubetto è posto in moto con velocità iniziale $v_0 = 1.56\ m/s$ diretta verso il bordo del tavolo. Quando il cubo raggiunge il limitare del tavolo, questo urta contro un piccolo vincolo rigido (di dimensione trascurabile rispetto a quelle del cubo), iniziando quindi a ruotare attorno ad esso. Si ricorda che il momento d'inerzia di un cubo rispetto un proprio spigolo è pari a $I = \frac{8}{3}ma^2$.

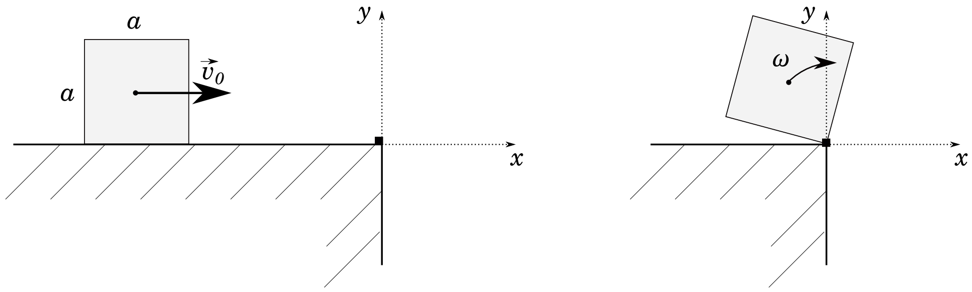
Determinare:

a) La velocità angolare con la quale il cubo inizia a ruotare subito dopo l'urto (in rad/s)

b) Il vettore impulso trasferito $\vec{J}$ al cubo nel corso dell'urto (in Ns)

c) La massima quota y_{max} raggiunta dal centro di massa del cubo dopo l'urto (in m)

d) Quale velocità iniziale massima v' sarebbe stato possibile imporre al cubo affinché questo non cada dal tavolo (in m/s)



---

a) Nell'urto si conserva il momento angolare, se riferito rispetto all'asse passante per il vincolo.

$$\Delta\vec{L}_O = 0 \tag{23}$$

Il momento angolare iniziale e finale del moto si ricavano facilmente:

$$\vec{L}_O^i = -m\frac{a}{2}v_0\hat{k} \tag{24}$$
$$\vec{L}_O^f = +I\omega\hat{k} \tag{25}$$
$$\tag{26}$$

Di conseguenza:

$$\omega = \frac{m\frac{a}{2}v_0}{I} = \tag{27}$$
$$= \frac{m\frac{a}{2}v_0}{\frac{8}{2}ma^2} = \tag{28}$$
$$= \frac{3}{16}\frac{v_0}{a} = 3.57\ rad/s \tag{29}$$

b) Si sfrutta il teorema dell'impulso e si calcola quindi la variazione della quantità di moto totale del cubo tra gli istanti subito precedente e successivo all'urto.

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \tag{30}$$
$$= \vec{p}^f - \vec{p}^i = \tag{31}$$
$$= m\left(\vec{v}^f - \vec{v}^i\right) \tag{32}$$

La velocità del centro di massa del cubo dopo l'impatto si ricava dalla velocità angolare:

$$\begin{aligned}
\vec{v}^f &= \vec{\omega} \times \vec{r} = && (33)\\
&= \left(-\omega\hat{k}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\hat{\imath} + \sin\frac{\pi}{4}\hat{\jmath}\right)\right) = && (34)\\
&= \omega\frac{a}{2}\left(\hat{k}\times\hat{\imath} - \hat{k}\times\hat{\jmath}\right) = && (35)\\
&= \omega\frac{a}{2}\left(+\hat{\jmath} + \hat{\imath}\right) && (36)
\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= m\left(\omega\frac{a}{2}\left(+\hat{\jmath}+\hat{\imath}\right) - v_0\hat{\imath}\right) = && (37)\\
&= m\omega\frac{a}{2}\hat{\jmath} + m\left(\omega\frac{a}{2} - v_0\right)\hat{\imath} = && (38)\\
&= \left(-1.69\times10^{-1}\hat{\imath} + 1.76\times10^{-2}\hat{\jmath}\right) Ns && (39)
\end{aligned}$$

c) Dopo l'urto il cubo ruota attorno al vincolo, innalzando così il suo centro di massa. Al raggiungimento della massima quota il cubo si troverà temporaneamente in quiete.

$$mgy_0 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgy_{max} \tag{40}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
y_{max} &= y_0 + \frac{1}{2mg}I\omega^2 = && (41)\\
&= \frac{a}{2} + \frac{1}{2mg}\frac{8}{3}ma^2\left(\frac{3}{16}\frac{v_0}{a}\right)^2 = && (42)\\
&= \frac{a}{2} + \frac{3}{64}\frac{v_0^2}{g} = 5.26\ cm && (43)
\end{aligned}$$

d) Perché il cubo cada dal tavolo deve sussistere la condizione che il centro di massa superi la verticale rispetto il vincolo.

Si può quindi ricavare la massima velocità iniziale massima v' come quella che innalza il centro di massa del cubo fino alla verticale, e cioé fino alla quota $y' = \sqrt{2}a/2$.

$$y' = \frac{a}{2} + \frac{3}{64}\frac{v'^2}{g} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \tag{44}$$

Quindi:

$$v' = \sqrt{\frac{32}{3}ag\left(\sqrt{2}-1\right)} = 1.89\ m/s \tag{45}$$

2 Elettrostatica

2.1 Esercizio 1

Una sfera piena isolante di raggio $R_0 = 4.5\ cm$ è carica con densità ρ variabile con il raggio $\rho(r) = \rho_0\, r$, con $\rho_0 = 3.5\ \mu C/m^4$. La sfera è posta all'interno di una sfera conduttrice cava di raggio interno $R_1 = 15\ cm$ ed esterno $R_2 = 16\ cm$, sulla quale non è depositata alcuna carica libera.

Si ricorda che l'integrale di volume di una sfera di raggio a si può scrivere come:

$$Vol = \int dV = \int_0^a 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{46}$$

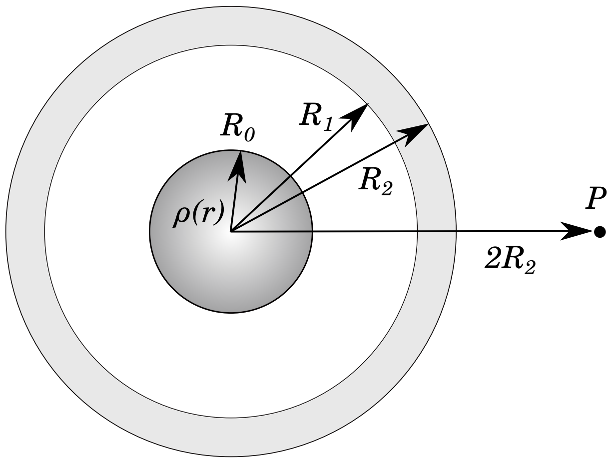
Determinare:

a) La carica elettrica contenuta nell'intera sfera isolante Q_0 (in C)

b) Il modulo del campo elettrico $\vec{E'}$ a distanza $R_0/2$ dal centro del sistema (in V/m)

c) La densità di carica presente sulle superfici interna σ_1 ed esterna σ_2 del guscio sferico (in C/m^2)

d) Il lavoro che una forza esterna deve compiere per portare una carica puntiforme $q = +0.8\ nC$ dall'infinito ad un punto P posto a distanza $r_P = 2R_1$ (in J)



a) La carica totale interna alla sfera si ricava integrando la funzione densità di carica nel volume:

$$Q_0 = \int \rho(r)\, dV = \int_0^{R_0} \rho_0 r\, 4\pi r^2\, dr = \tag{47}$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^{R_0} r^3\, dr = \tag{48}$$

$$= 4\pi\rho_0 \frac{1}{4}(R_0)^4 = \tag{49}$$

$$= \pi\rho_0 R_0^4 = 4.51 \times 10^{-11}\ C \tag{50}$$

b) Per calcolare il valore del campo elettrico si sfrutta la legge di Gauss:

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{51}$$

Dove è necessario riferirsi, sia per il calcolo del flusso del campo elettrico, che la carica interna, ad una superficie chiusa di raggio $R_0/2$. La carica elettrica q_{int} non è infatti pari alla carica Q_0 calcolata in precedenza.

Il flusso è pari a:

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E' 4\pi (\frac{R_0}{2})^2 = E' \pi R_0^2 \tag{52}$$

Ripercorredo il calcolo del precedente punto, la carica interna è pari a:

$$q_{int} = \int \rho(r)\, dV = \int_0^{\frac{R_0}{2}} \rho_0 r\, 4\pi r^2\, dr = \tag{53}$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^{\frac{R_0}{2}} r^3\, dr = \tag{54}$$

$$= 4\pi\rho_0 \frac{1}{4} (\frac{R_0}{2})^4 = \tag{55}$$

$$= \pi\rho_0 \left(\frac{R_0}{2}\right)^4 \tag{56}$$

Di conseguenza:

$$E' \pi R_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \pi \rho_0 \frac{R_0^4}{16} \tag{57}$$

E quindi:

$$E' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R_0^2}{16} = 50.0\ V/m \tag{58}$$

c) Per effetto del fenomeno di induzione elettrica, sulla faccia interna della sfera cava conduttrice si presenta una carica pari a quella della sfera isolante, ma di segno opposto.

La carica presente sulla superficie esterna della sfera cava è infine pari a quella contenuta sull'intera sfera isolante, e di ugual segno.

La densità di carica superficiale sulle due facce è quindi semplicemente pari a:

$$\sigma_1 = -\frac{Q_0}{4\pi R_1^2} = -1.60 \times 10^{-10}\ C/m^2 \tag{59}$$

$$\sigma_2 = +\frac{Q_0}{4\pi R_2^2} = +1.40 \times 10^{-10}\ C/m^2 \tag{60}$$

d) Si calcola il potenziale elettrico dovuto alle sfere in P.

Esternamente alla sfera cava conduttrice, il campo elettrico va come:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \tag{61}$$

Possiamo quindi calcolare il potenziale in P, ponendo nullo il potenziale all'infinito, come:

$$V_P = -\int_\infty^{r_P} E(r) dr = \tag{62}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r_P} \tag{63}$$

Il lavoro compiuto da una forza esterna nel portare la carica q dall'infinito a P è quindi pari all'inverso del lavoro compiuto dalla forza elettrostatica.

$$W_{ext} = -W_{el} = -(-\Delta U_{el}) = +qV_P = \tag{64}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ_0}{2R_1} = 1.08 \times 10^{-9}\ J \tag{65}$$

2.2 Esercizio 2

Un sistema di due condensatori in serie è realizzato da un capacitore C_1 di capacità $C_1 = 57\ pF$ e un secondo condensatore C_2, di capacità variabile. Il condensatore C_2 è formato da una coppia di piani metallici paralleli tra loro, di area $A = 14\ cm^2$, liberi di essere posizionati a una distanza d variabile. Si desidera realizzare un sistema con capacità equivalente pari a $C = 12\ pF$.

Determinare

a) La distanza d a cui è necessario porre i due piani del condensatore C_2 se il condensatore fosse posto in aria, in m

b) La differenza di potenziale V_2 ai capi di C_2 nel caso l'intera serie di condensatori fosse collegata ad una differenza di potenziale $V = 3.3\ V$, in V

Se invece la distanza tra le armature di C_2 fosse fissata a $d' = 1.25\ mm$ e interamente riempita di dielettrico, calcolare:

c) La costante dielettrica relativa ε_r del mezzo posto in C_2 tale da rendere la capacità equivalente pari a C

d) La densità di carica di polarizzazione σ_p presente sulle facce del dielettrico, in C/m^2

a) In una serie di due condensatori la capacità equivalente è pari a:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} \tag{66}$$

Dove, nel caso di un capacitore a facce piane e parallele in aria, vale:

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{67}$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{d}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{C} \tag{68}$$

Da cui:

$$d = \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1}\right) = \tag{69}$$

$$= \varepsilon_0 A \frac{C_1 - C}{C C_1} = 0.816\ mm \tag{70}$$

b) Collegata la serie di condensatori alla differenza di potenziale V, si accumula sulle facce dei condensatori la carica Q:

$$Q = CV \tag{71}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore C_2 è pertanto pari a:

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{CV}{C_2} = \tag{72}$$

$$= V \frac{C_1 - C}{C_1} = 2.61\ V \tag{73}$$

c) Il condensatore C_2 ha ora una capaticà pari a:

$$C_2' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d'} \tag{74}$$

A parità di capacità totale C questo significa che il materiale interposto tra le armature di C_2 ha costante dielettrica relativa pari a:

$$\varepsilon_r = \frac{CC_1}{C_1 - C} \frac{d'}{\varepsilon_0} = 1.53 \tag{75}$$

d) La carica di polarizzazione che si presenta sulle armature è legata al vettore polarizzazione dalla relazione:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{76}$$

Dove, nel caso di dielettrico omogeneo e isotropo, vale la seguente:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r^a - 1) \vec{E} \tag{77}$$

Nel caso di un condesatore a facce piane, il modulo del campo elettrico è pari al rapporto tra la differenza di potenziale a cui sono poste le armature e la distanza tra di esse, quindi:

$$\sigma_P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{V_2}{d'} = \tag{78}$$

$$= 9.83 \times 10^{-9} \ \frac{C}{m^2} \tag{79}$$

2.3 Esercizio 3

Una sfera cava è collegata in parallelo ad una resistenza $R_2 = 12.5\,\Omega$ come mostrato in figura. La sfera cava ha raggio interno $a = 4.5\ cm$ e raggio esterno $b = 7.0\ cm$, ed è composta di silicio (materiale ohmico) di resistività $\rho = 25.0\,\Omega\, m$. Il generatore eroga una forza elettromotrice pari a $120\ V$, ed è caratterizzato dalla resistenza interna $r = 3.5\,\Omega$.

Si ricordi che il contributo infinitesimo alla resistenza dR prodotto da un elemento di materiale di spessore dr e di area S è pari a $\rho\frac{dr}{S}$

Determinare

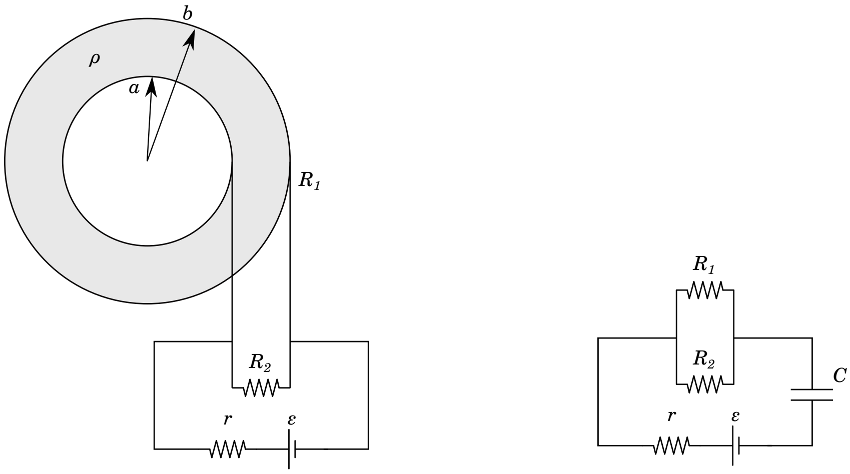
a) La resistenza R_1 della sfera cava (in Ω)

b) La resistenza totale equivalente R_{eq} del circuito, includendo la resistenza interna del generatore (in Ω)

c) La potenza P_2 dissipata dalla resistenza R_2 (in W)

Al circuito viene poi aggiunto un condensatore di capacità $C = 12.5\ \mu F$, inizialmente scarico. Determinare:

d) L'intensità di corrente i' circolante attraverso la resistenza r dopo un tempo pari a 3 volte la costante di tempo del circuito (in A)



a) Come da definizione, e come suggerito nel testo, il contributo infinitesimo alla resistenza è dato da:

$$dR_1 = \rho\frac{dr}{S} \tag{80}$$

La corrente che circola attraverso la sfera è radiale, e pertanto dobbiamo considere la resistenza nell'attraversare una serie di gusci sferici di spessore dr e superficie pari a $4\pi r^2$.

Pertanto:

$$R_1 = \int dR_1 = \int_a^b \rho\frac{dr}{4\pi r^2} = \tag{81}$$

$$= \frac{\rho}{4\pi}\frac{b-a}{ab} = 15.8\ \omega \tag{82}$$

b) Il circuito complessivo presenta il parallelo di R_1 e R_2, in serie alla resistenza interna del generatore r.

Complessivamente, la resistenza equivalente totale del circuito vale quindi:

$$R_{eq} = r + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})^{-1} = 10.5\ \Omega \tag{83}$$

c) Per calcolare la potenza dissipata da una resistenza percorsa da corrente è necessario prima ricavare l'intensità di corrente circolate:

$$P_2 = i_2^2 R_2 \tag{84}$$

Possiamo ricavare la caduta di potenziale ai capi di R_2 come:

$$V_2 = \mathcal{E} - ir \tag{85}$$

Con i la corrente circolante attraverso r. Quest'ultima si ricava semplicemente utilizzando la legge di Ohm generalizzata, e ricordando che le resistenze R_1 e R_2 sono poste in parallelo:

$$\mathcal{E} - ir = iR_{12} \tag{86}$$

Quindi:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \tag{87}$$

Nota V_2, possiamo ricavare i_2 applicando la legge di Ohm:

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} r}{R_2} = \tag{88}$$

$$= \frac{\mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{R_{eq}}\right)}{R_2} = \tag{89}$$

$$= \frac{\mathcal{E}\,(R_{eq} - r)}{R_{eq} R_2} \tag{90}$$

Questo porta infine al calcolo della potenza dissipata:

$$P_2 = \left(\frac{\mathcal{E}\,(R_{eq} - r)}{R_{eq} R_2}\right)^2 R_2 = \tag{91}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2\,(R_{eq} - r)^2}{R_{eq}^2 R_2} = 511\ W \tag{92}$$

d) Il circuito RC si può semplificare ad una pura serie composta dalla resistenza equivalente del circuito R_{eq} e dalla capacità C. La costante di tempo del cicuito, irrilevante ai fini della risoluzione dell'esericizio, è pari a:

$\tau = R_{eq} C = 0.131\ ms$

L'intensità di corrente che attraversa il circuito ha un andamento esponenziale che dipende dal rapporto t/τ:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} e^{-t/\tau} \tag{93}$$

Di conseguenza, dopo un tempo pari a $t = 3\tau$, la resistenza r è attraversata dalla corrente:

$$i' = i(t = 3\tau) = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} e^{-3} = 0.57\ A \tag{94}$$